Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

27–29.10.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 2

Aufgabe 1.
Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Aufgabe 2.
Seien X und A_i $(i \in I)$ beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} (A_i \cap X) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap X\,;$ (b) $\displaystyle X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i)\,.$

Aufgabe 3.
(a) Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Kann I als ein Durchschnitt von *offenen* Intervallen dargestellt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Kann I als eine Vereinigung von *abgeschlossenen* Intervallen dargestellt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 3.11.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Seien X und A_i $(i \in I)$ beliebige Mengen. Beweisen Sie, dass

$$\bigcap_{i\in I} (A_i \cup X) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup X\,.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)
(a) Seien A_i $(i \in I)$ Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodass je zwei Teilmengen A_i und A_j nichtleeren Durchschnitt haben. Folgt daraus, dass der Durchschnitt

$$(*) \qquad \bigcap_{i\in I} A_i$$

nichtleer ist?

(b) Seien A_i $(i \in I)$ Intervalle in $\mathbb{R}$, sodass je drei Intervalle A_i, A_j und A_k nichtleeren Durchschnitt haben. Folgt daraus, dass der Durchschnitt $(*)$ auch nichtleer ist?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Irrationalität (3 Punkte)

Zur Motivation: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Dazu wurde der „Standardbeweis“ geführt, wie er auch meistens in Schulbüchern zu finden ist (auch in Ihrem?). Die Pythagoräer entdeckten allerdings zuerst die Irrationalität einer anderen Zahl, und das auf „anschaulichem“ Wege. Sie erkannten ca. 450 v. Chr., dass das Verhältnis aus Diagonalenlänge und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck nicht rational sein kann (Abbildung 1).

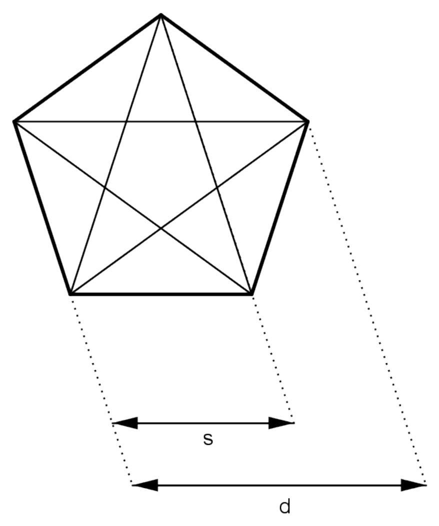

Abbildung 1

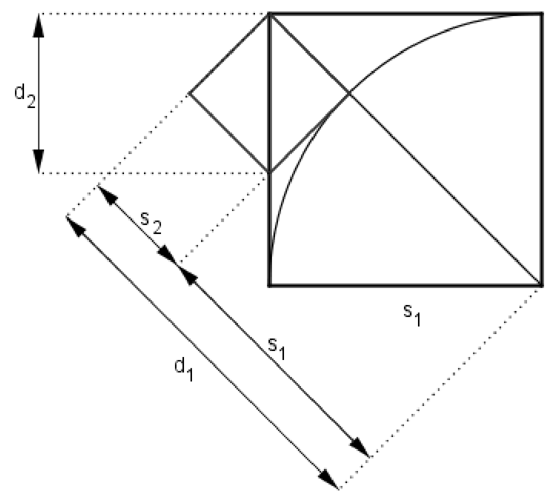

Abbildung 2

Ihre Idee verwenden wir nun, um einen weiteren (schulgeeigneten) Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu führen.

a) Die Länge der Diagonale d_1 in einem Quadrat mit der Seitenlänge $s_1 = 1$ ist (wie man sich leicht überlegt) $d_1 = \sqrt{2}$. Wir wollen nun zeigen, dass das Verhältnis $d_1 : s_1 = \sqrt{2}$ nicht rational ist. Dazu zeichnen wir in ein vorgegebenes Quadrat mit der Seitenlänge s_1 - wie in Abbildung 2 gezeigt - ein kleineres Quadrat mit der Seitenlänge $s_2 = d_1 - s_1$ ein. **Zeigen Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen, dass dann die Gleichung $d_2 = s_1 - s_2$ gilt!**

b) Wir werden nun zeigen, dass das Verhältnis $d_1 : s_1$ nicht rational ist.
Nehmen wir indirekt an, $d_1 : s_1$ sei rational. Dann muss es eine reelle Zahl $c > 0$ und natürliche Zahlen $n_1 > m_1$ geben mit $d_1 = n_1 \cdot c$ und $s_1 = m_1 \cdot c$ (siehe Fußnote[1]).
Zeigen Sie mit Hilfe der beiden Gleichungen aus a): Auch s_2 und d_2 sind durch das gleiche Maß c messbar!

Dieser Prozess lässt sich nun fortsetzen: Man kann in das kleine Quadrat ein noch kleineres mit Seitenlänge s_3 einzeichnen, usw. **Wie lässt sich daraus ein Widerspruch herleiten?**

---

[1] Man nennt dann die beiden Strecken d_1 und s_1 treffenderweise **durch das gleiche Maß c messbar** oder auch **kommensurabel.**