

Analysis I, Übung 3

Aufgabe 1.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Gleichheit gilt:

$$(a) \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} .$$

$$(b) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} .$$

Bemerkung: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten k -Elemente aus einer n -elementigen Menge ohne zurücklegen auszuwählen.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt:

$$(a) \binom{2n}{n} < \frac{1}{2} \cdot 4^n \quad (b) 2^n > n^2 - 2 .$$

Aufgabe 3.

Stellen Sie Vermutungen zu den folgenden Fragen auf und beweisen Sie sie durch vollständige Induktion:

- Wie viele Schnittpunkte haben n (paarweise verschiedene) Geraden in der Ebene maximal (dabei sind natürlich alle Schnittpunkte zwischen je zwei Geraden gemeint)?
- Eine Gerade teilt die Ebene in zwei Gebiete. In wie viele Gebiete teilen n Geraden die Ebene maximal?

Hausaufgaben

Abgabe bis zum 10.11.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskästen Nr. 6. Bitte benutzen Sie weißes Papier und achten Sie auf Handschrift, Leserlichkeit und Grammatik.

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Gleichheit gilt:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} .$$

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n , für die die Ungleichung $\binom{3n}{n} < 7^n$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n , für die die Ungleichung $30n < 2^n + 110$ gilt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$ ein Quadrat in genau n kleinere Quadrate aufgeteilt werden kann ($n = 4$ wäre klar: 4 gleiche Quadrate).

Griechische Buchstaben

Das griechische Alphabet gibt uns weitere Bezeichnungsmöglichkeiten an die Hand:

Kleinbuchstaben:

alpha – α , beta – β , gamma – γ , delta – δ , epsilon – ε , zeta – ζ , eta – η , theta – θ , iota – ι , kappa – κ , lambda – λ , mu – μ , nu – ν , xi – ξ , o – \o , pi – π , rho – ρ , sigma – σ , tau – τ , upsilon – υ , phi – ϕ , chi – χ , psi – ψ , omega – ω .

Großbuchstaben:

Gamma – Γ , Delta – Δ , Theta – Θ , Lambda – Λ , Xi – Ξ , Pi – Π , Sigma – Σ , Upsilon – Υ , Phi – Φ , Psi – Ψ , Omega – Ω .