Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

17–19.11.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 5

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Funktionen. Skizzieren Sie den Graph und entscheiden Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Dort wo es möglich ist, bestimmen Sie auch die Umkehrfunktion. Zum Schluss bestimmen Sie $f^{-1}((-1,1))$ (das Urbild des Intervalls $(-1,1)$).

(a) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|-5}\,,$ (b) $f(x) = 1 + \log_2(x-4)\,.$

Aufgabe 2.
Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Seien $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$. Beweisen Sie, dass

(a) $C \subseteq f^{-1}(f(C))\,,$ (b) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D\,.$

Stimmt es, dass für alle Funktionen f und alle Teilmengen $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$ die Aussagen

(a) $C = f^{-1}(f(C))\,,$ (b) $f(f^{-1}(D)) = D$

gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$. Beweisen Sie, dass

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,.$$

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 24.11.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie weißes Papier und achten Sie auf Handschrift, Leserlichkeit und Grammatik. Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen. Rechnungen ohne Begründung sind wertlos.

Aufgabe 1. Darstellungsformen (3 Punkte)
Zur Intention der Aufgabe: Eine wichtige mathematische Tätigkeit ist, ein und dasselbe Objekt in unterschiedlichen Darstellungsformen wiederzuerkennen und auch selbst zwischen diesen Darstellungsformen übersetzen zu können. In den Aufgaben a) und b) sehen Sie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, spezielle Funktionen zu beschreiben: als stückweise definierte Funktion (Beispiel b) und als *ein* Objekt (hier unter Zuhilfenahme der Betragsfunktion, Beispiel a). Ihre Aufgabe ist es nun, zu den gegebenen Darstellungsformen die jeweils andere Darstellungsform zu finden und so Ihr bewegliches Denken zu schulen! Außerdem trainieren Sie den Umgang mit Betragsfunktionen, stückweise definierten und linearen Funktionen.

(a) Schreiben Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$x \mapsto f(x) := 3 \cdot |x+3| - 2 \cdot |x-1|\,,$$

als stückweise definierte Funktion! Eine Skizze des Funktionsgraphen wird Ihnen helfen!

(b) Schreiben Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} 3-3x & x<0 \\ 3+x & 0 \le x < 3 \\ -3+3x & x \ge 3 \end{cases}$$

als *ein* Objekt (unter Zuhilfenahme der Betragsfunktion)! Auch hier ist eine Skizze von Vorteil!

Bitte wenden!

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Funktionen. Entscheiden Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Dort wo es möglich ist, bestimmen Sie auch die Umkehrfunktion. Zum Schluss bestimmen Sie $f^{-1}((-1,1))$ (das Urbild des Intervalls $(-1,1)$).

(a) $f(x)=(x+7)\sqrt{x+7}-8$, (b) $f(x)=2[\sqrt{x}+\frac{1}{2}]$,

($[a]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist).

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $f\colon X\to Y$ eine Funktion und seien $A,B\subseteq X$ beliebige Mengen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$; (b) $f(A)\cap f(B)\supseteq f(A\cap B)$.

Sei f zusätzlich injektiv. Gilt dann die Aussage $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)$? Begründen Sie Ihre Antwort.