Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

24–26.11.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 6

Aufgabe 1.
Mit Hilfe der ε-Definition eines Grenzwertes beweisen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

gegen 2 konvergiert. Bestimmen Sie eine Zahl n_0, sodass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - 2| < \frac{1}{100}$ gilt.

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, ob die Folge $a_n = n(\sqrt{n^2+7} - n)$ konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen konvergieren. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+3}}$, (b) $b_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+2n}$, (c) $c_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

Aufgabe 4.
Die Folge $\{a_n\}$ ist durch die folgenden Bedingungen festgelegt:

$$a_0 = 0\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n} \quad \text{für } n \geq 0\,.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergiert und finden Sie den Grenzwert.

Aufgabe 5. Nullfolgendefinition
Was passiert, wenn man in der Nullfolgendefinition ε durch $\frac{1}{\varepsilon}$ ersetzt: Welche Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind durch

„Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_0$ gilt."

charakterisiert? Geben Sie eine Begründung dafür!

Bitte wenden!

Hausaufgaben

Abgabe bis zum 1.12.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie weißes Papier und achten Sie auf Handschrift, Leserlichkeit und Grammatik. Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen. Rechnungen ohne Begründung sind wertlos.

Aufgabe 1.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen konvergieren. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt{3^n + 4^n}}{2^{n+1} + 52}$ (2 Punkte); (b) $b_n = \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}}$ (2 Punkte);

(c) $c_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1} + \dfrac{n^2+2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}$ (3 Punkte).

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}$ ist durch die folgenden Bedingungen festgelegt:

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 0.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergiert und finden Sie den Grenzwert.