Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

1–3.12.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 7

Aufgabe 1. Grenzwerte
Zwei Schüleraussagen zum Thema Grenzwert:

Sarah: „Die Folge $\frac{1}{n}$ erreicht die Zahl Null ja nie, deswegen kann Null auch nicht der Grenzwert sein. Ist doch logisch! Egal, welches Folgenglied man nimmt, es passt immer noch was dazwischen!"
Peter: „Die Differenz der Zahlenfolge und dem Grenzwert gibt im Betrag den „Abstand" zum Grenzwert an. Dieser Abstand wird bei größer werdendem n immer geringer, sofern man den richtigen Grenzwert gewählt hat."

(a) Wo liegt der Fehler in Sarahs Argumentation? Wie würden Sie auf ihre Aussage reagieren? Fertigen Sie Hilfmittel an (z.B. Skizze, Text, Beispiel), die Sarah beim Verständnis des Grenzwertbegriffs unterstützen können!
(b) Formulieren Sie eine exakte „Grenzwertdefinition", die Peters Vorstellung entspricht! Ist diese Definition äquivalent zu jener in der Vorlesung? Wenn ja, beweisen Sie es! Wenn nein, finden Sie ein Gegenbeispiel!

Aufgabe 2.
Mithilfe der Definition beweisen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ eine Cauchy Folge ist.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und bestimmen Sie deren Summe.

(a) $a_n = \dfrac{2^n+5^n}{10^n}$, (b) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Aufgabe 4.
Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{100}}$, (b) $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$, (c) $a_n = \dfrac{1}{3n+1}$, (d) $a_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 8.12.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie weißes Papier und achten Sie auf Handschrift, Leserlichkeit und Grammatik. Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen. Rechnungen ohne Begründung sind wertlos.
Bitte beschriften Sie die Blätter nur einseitig und tackern sie zusammen (nicht heften oder abheften).

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie deren Summe.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ (3 Punkte); (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_2 n}{2n+1}$ (3 Punkte);

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ (3 Punkte).

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie mithilfe des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums ihre Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Mit vollständiger Induktion (zeigen!) gilt für alle n und k:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |x_{k+1} - x_1|.$$