Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

8–10.12.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 8

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{2^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$.

Aufgabe 3.
(a) Sei a_n eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert. Folgt daraus, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei a_n eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ absolut konvergiert. Folgt daraus, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 15.12.2009 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Benutzen Sie ausschließlich weißes Papier und achten Sie auf ordentliche Handschrift, Leserlichkeit, Grammatik und Übersicht. Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen. Rechnungen ohne Begründung sind wertlos.
Beschriften Sie die Blätter nur einseitig und tackern sie zusammen (nicht heften oder abheften). Ab jetzt werden Hausübungen auf kariertem Papier etc. nicht mehr korriegiert.

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}$ (3 Punkte), (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+2}{n(n+1)}$ (3 Punkte).

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (3 Punkte) **Ist** $0,\overline{9}$ **gleich** 1**?** (Aus einer aktuellen Staatsexamensklausur in der Fachdidaktik)

(a) Eine (von Schülern und Studenten) häufig gestellte Frage lautet: „Ist eigentlich $0,\overline{9}$ dasselbe wie 1?". Beantworten Sie sie, indem Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ untersuchen! Ist diese Reihe eine Dezimalbruchentwicklung?

(b) Sie sind immer noch nicht überzeugt? Sie denken immer noch, dass $0,\overline{9} < 1$ gilt? Dann sehen wir uns an, welche Konsequenzen die Annahme $0,\overline{9} < 1$ hätte. Wenn die beiden Zahlen nicht gleich sind, müssen sie einen Abstand haben. Sei $a := 1 - 0,\overline{9}$ dieser Abstand. Fertigen Sie zunächst eine Skizze dazu an!

Nun betrachten wir die Folge $\{0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; \cdots\}$. Alle Folgenglieder sind offensichtlich kleiner als $0,\overline{9}$. Zeichnen Sie auch diese Folgenglieder in Ihre Skizze ein! Erkennen Sie, zu welchem Widerspruch die Annahme $0,\overline{9} < 1$ führt? Leiten Sie diesen Widerspruch formal her!

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Beweisen Sie den großen Umordnungssatz (Skript S. 78, Teil 3) in allen fehlenden Einzelheiten mit allen zusätzlichen Begründungen.