Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

24.05.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 05

Gruppenübung:

Bezeichnungsweise: Wir wollen mit $\delta I(v)(\varphi) := \int_a^b F_y(x,y,y')\varphi + F_{y'}(x,y,y')\varphi' dx$ die erste Variation und mit $\delta^2 I(v)(\varphi,\varphi)$ die in der ersten Präsenzübung zu bestimmende zweite Variation bezeichnen.

Aufgabe 1:
Die Langrange-Funktion F sei zweimal bezüglich der letzten beiden Variablen stetig partiell differenzierbar. Ist für $y \in D \subset C^1[a,b]$ und $\varphi \in C_0^1[a,b]$ die Funktion $g(t) = I(y + t\varphi)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definiert, dann heißt

$$g''(0)$$

die „zweite Variation von I in y in Richtung φ". Zeigen Sie die Darstellung

$$g''(0) = \int_a^b F_{yy}\varphi^2 + 2F_{yy'}\varphi\varphi' + F_{y'y'}(\varphi')^2 \, dx,$$

wobei $F_{yy}(x, y(x), y'(x))$ und analog $F_{yy'}, I_{y'y'}$ die zweiten partiellen Ableitungen von F nach den letzten beiden Variablen mit den angegebenen Argumenten sind.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie Extremale für $I(y) := \int_0^1 F(x,y,y')dx$ in $\{C^1[0,1] | y(0) = 0, y(1) = 1\}$ mit

1. $F(x,y,y') = y'$,
2. $F(x,y,y') = yy'$,
3. $F(x,y,y') = xyy'$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen in $C^2[0,1]$ und lösen Sie diese durch „scharfes" Hinsehen.

1. $I(y) := \int_0^1((y')^2 + 2y)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$
2. $I(y) := \int_{-1}^2((y')^2 + 2yy')dx, \quad y(-1) = 1, y(2) = 0$

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:
Unter den Voraussetzungen von Präsenzaufgabe 1 exisitiert die zweite Variation von I in $y \in D \subset C^1[a,b]$ in Richtung $\varphi \in C_0^1[a,b]$. Wir setzen $F_{yy'} \in C^1[a,b]$ voraus. Zeigen Sie:

$$\delta^2 I(y)(\varphi,\varphi) = \int_a^b P \cdot h^2 + Q \cdot (h')^2 \; dx,$$

mit $P = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \in C^0[a,b]$ und $Q = F_{y'y'} \in C^0[a,b]$.

Aufgabe 2:
Bestimmen und lösen Sie die Eulergleichung in $C^2[J]$. J bezeichnet das durch die Integrationsgrenzen vorgegebene Intervall.

1. $I(y) := \int_0^1 ((y')^2 + 2xy' + x^2) dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$
2. $I(y) := \int_0^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2) dx \quad y(0) = 0, y(2) = 1.$

Aufgabe 3:
Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1 existiert die zweite Variation von I in $y \in D \subset C^1[a,b]$ in Richtung $\varphi \in C_0^1[a,b]$. Zeigen Sie:
Gilt für ein $y \in D := \{C^1[a,b] |\; y(a) = A, y(b) = B\}$, dass die erste Variation gleich 0 (für diese bestimmte y) und die zweite Variation größer oder gleich 0 ist für alle $\tilde{y} \in D$ und $\varphi \in C_0^1[a,b]$ so ist y ein Minimierer für I auf D. Genauer:

$$\delta I(y)(\varphi) = .0$$
$$\delta I(\tilde{y})(\varphi,\varphi) \geq 0.$$

Hinweis: Es gilt $g(1) - g(0) = g'(0) + \int_0^1 (1-t) g''(t) dt$ für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.