Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

21.6.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 08

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

Die konvexe Hülle $co\ E$ einer Menge E ist die kleinste konvexe Menge, die $E \subset \mathbb{R}^N$ umfasst. Wir wollen beweisen:

$$co\ E = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ x = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i, \quad x_i \in E, \ \sum_{i=1}^{N+1} = 1\}$$

Aufgabe 2:

Sei H ein Hilbertraum und $F \subset H$ ein beliebiger Untervektorraum. Zeigen Sie: Für jede stetige Linearform $\mu : F \to \mathbb{K}$ existiert genau eine stetige Fortsetzung zu einer Linearform $\nu : H \to \mathbb{K}$ mit $\nu_{|F^\perp} = 0$.

Aufgabe 3:

Sei H ein Hilbertraum und $P \in L(H)$ mit $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. P ist eine orthogonale Projektion,d.h. $P = P_G$, wobei G ein abgeschlossener Unterraum von H ist.
2. $\langle P\xi, \eta\rangle = \langle \xi, P\eta\rangle$ für alle $\eta, \xi \in H$.
3. P ist stetig mit Norm $||P|| \leq 1$.
4. $P(H) = (\mathrm{Ker}P)^\perp$.

In diesem Fall gilt $P = 0$ oder $||P|| = 1$.

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:

Sei $E \subset \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie:

1. Ist E kompakt, dann ist auch $co\ E$ kompakt.

2. Ist E offen, dann ist auch $co\ E$ offen.

Aufgabe 2:

Es sei F ein normierter Raum,. Zeigen Sie, falls die Parallelogrammgleichung gilt, d.h.

$$||\varphi + \psi||^2 + ||\varphi - \psi||^2 = 2(||\varphi||^2 + ||\psi||^2),$$

so ist F ein Prähilbertraum. Es gibt also genau eine positive hermitsche Sesquilinearform $s : F \times F \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so dass

$$s(\varphi, \varphi) = ||\varphi||^2 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in F$$

gilt. Hinweis: $s(\varphi, \varphi) := \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon ||\varphi + \varepsilon\psi||^2, \quad \varphi, \psi \in F$ und $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

Aufgabe 3:

Es sei H ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in H. Weiter sei (x_n) schwach konvergent gegen x in H,d.h. es gelte $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ für alle $y \in H$. Die schwache Konvergenz bezeichnen wir mit $x_n \overset{w}{\to} x$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$||x_n - x|| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \overset{w}{\to} x \wedge ||x_n|| \to x.$$