

Analysis I, Übung 1

Man definiere für jede reelle Zahl a den *Betrag von a* :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 1.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $|x - 1| + |x + 1| = 7$, (b) $||x + 1| + 1| + 1| = 5$.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$, (b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Aufgabe 3.

Beweisen Sie, dass für alle positiven, reellen Zahlen a, b die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$. (b) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$.

Für welche Zahlen a, b gilt die Gleichheit?

Aufgabe 4.

Lösen Sie die folgende Gleichung $\sqrt{x^3 + 1} + (x^4 - 1)^2 = 0$.

Aufgabe 5. Sprache der Mathematik versus Alltagssprache

In der Mathematik drückt man sich meist viel präziser aus, als wir das von der Alltagssprache gewöhnt sind. Beantworten Sie vor diesem Hintergrund folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten!

(a) Ist folgende Aussage wahr? „In unserem Seminarraum haben höchstens 100000 Menschen Platz.“

(b) Eine Frau ist sehr tierlieb und setzt sich stark für die Umwelt ein. Was ist wahrscheinlicher?

1. Sie hat einen Hund, arbeitet in einem Umweltbüro und liest Bücher von modernen Schriftstellern.

2. Sie arbeitet in einem Büro.

(c) Eine Mutter sagt zu ihrem Kind: „Wenn du nicht brav bist, wirst du bestraft!“ Zehn Minuten später wurde das Kind bestraft. Was war passiert?

(d) Ist folgende Aussage wahr?

„Jedes Quadrat ist ein Rechteck oder ein Drachenviereck.“

(e) Ist folgende Schlussfolgerung wahr?

„Sie sind ein Mensch, der fliegen kann. Daraus folgt, dass Sie heute noch zum Mond fliegen werden.“

(f) Ist folgende Aussage wahr? „Es gibt einen Friseursalon in Essen.“

(g) Was sagen Sie zu folgender Argumentation? „Es gibt in Wirklichkeit keine violetten Kühe, denn ich habe noch nie eine auf einer Wiese gesehen.“

(h) In der Mathematik ist niemals eine Aussage und ihre Negation gleichzeitig falsch. Welche der beiden folgenden Aussage ist dann aber wahr?

1. Alle Bäume sind Laubbäume.

2. Kein Baum ist ein Laubbaum.

Hausaufgaben

Abgabe bis zum 26.10.2009, 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| < x,$

(b) $|x-a| + |x-b| \leq b-a,$ wobei a und b gegebene reelle Zahlen sind.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle positiven Zahlen x, y die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Für welche Zahlen x und y gilt die Gleichheit?