Formelzusammenstellung

1. Grundbegriffe

Harmonische Schwingung → Sinusschwingung: $X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

→ Cosinusschwingung: $X(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$

Schwingungsamplitude: A

Kreisfrequenz: ω

Phasenwinkel: $\vartheta = \varphi - \frac{\pi}{2}$

Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Schwingungsdauer, Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

2. Überlagerung von Schwingungen

2.1 gleichfrequente Schwingungen

$$A_1 \cos(\omega t + \vartheta_1) + A_2 \cos(\omega t + \vartheta_2) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

wobei $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

und $$\vartheta = \arctan \frac{A_1 \sin \vartheta_1 + A_2 \sin \vartheta_2}{A_1 \cos \vartheta_1 + A_2 \cos \vartheta_2}$$

2.2 verschiedenfrequente Schwingungen ohne Phasenwinkel

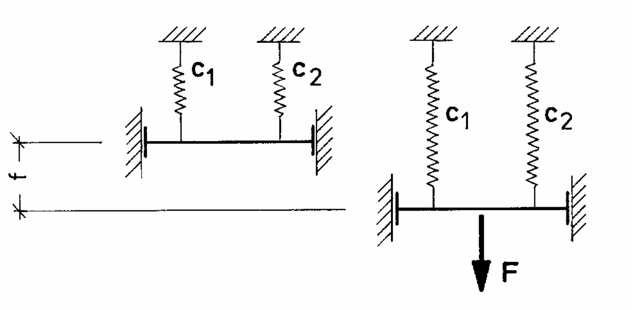
$$A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) = A(t) \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \vartheta(t)\right]$$

wobei $$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

und $$\tan \vartheta(t) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

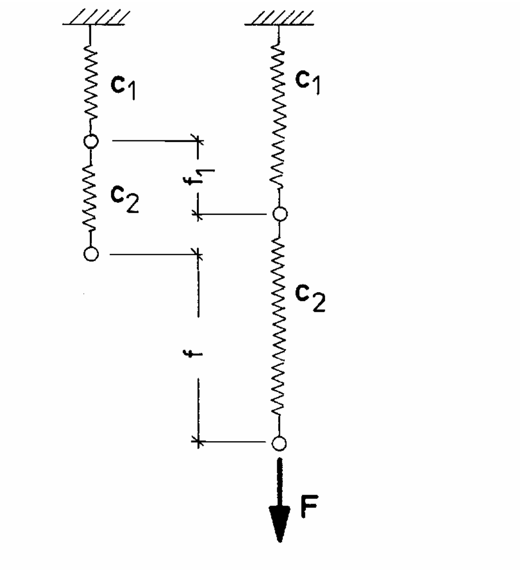
3. Federn

Parallelschaltung



$$F = (c_1 + c_2) f$$

Hintereinanderschaltung



$$F = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} f$$

4. Freie ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Normierte Differentialgleichung:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2\, X(t) = 0$$

Lösung:

$$X(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

Eigenkreisfrequenz: ω_0

Integrationskonstanten: C_1, C_2

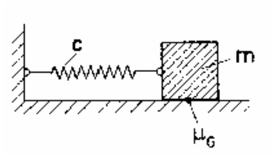
5. Freie gedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

5.1 Dämpfung durch trockene Reibung

Normierte Differentialgleichung:

$$\ddot{X}(t) + \frac{c}{m} X(t) + \frac{R}{m} = 0$$

Beispiel:



Gleitreibungskraft: $R = \mu_G N$

Federsteifigkeit: c

Umformung:

$$\ddot{X}(t) + \frac{c}{m}\left(X(t) + \frac{R}{c} \right) = 0$$

Lösung durch Koordinatentransformation:

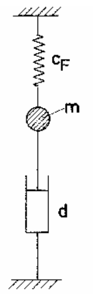
$$\overline{X}(t) = X(t) + \frac{R}{c}; \quad \ddot{\overline{X}}(t) = \ddot{X}(t)$$

Differentialgleichung:

$$\ddot{\overline{X}}(t) + \omega_0^2\, \overline{X}(t) = 0$$

Lösungsansatz (siehe 4.) jeweils für eine Halbschwingung, da R die Richtung wechselt.

5.2 Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung



Normierte Differentialgleichung:

$$\ddot{X}(t) + 2\,D\,\omega_0\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = 0$$

*Lehr*sches Dämpfungsmaß: D

z.B. bei Einmassenschwinger, Translation: $D = \frac{d}{2\,m\,\omega_0}$

Dämpfungskonstante: d

Allgemeine Lösung der DGL für 3 Fälle

5.2.1 Schwache Dämpfung (D < 1)

$$X(t) = e^{-D\,\omega_0\,t}\left[C_1\cos(\upsilon t) + C_2\sin(\upsilon t)\right]$$

Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung:

$$\upsilon = \omega_0\sqrt{1-D^2} \qquad \left[s^{-1}\right]$$

Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden gleichen Vorzeichens:

$$\frac{x(t)}{x(t+T')} = e^{D\,\omega_0\,T'} = e^{\vartheta} = e^{\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Logarithmisches Dekrement:

$$\vartheta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T')} = D\,\omega_0\,T'$$

*Lehr*sches Dämpfungsmaß:

$$D = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\,\pi^2 + \vartheta^2}}$$

5.2.2 Starke Dämpfung (D > 1)

$$X(t) = e^{-D\,\omega_0\,t}\left(C_1 \cosh\left(\overline{\upsilon} t\right) + C_2 \sinh\left(\overline{\upsilon} t\right)\right)$$

mit $\overline{\upsilon} = \sqrt{D^2 - 1} \cdot \omega_0$

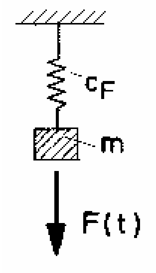
5.2.3 Aperiodischer Grenzfall (D = 1)

$$X(t) = (C_1 + C_2\,\omega_0\,t)\,e^{-\omega_0\,t}$$

6. Erzwungene ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Harmonische Erregung: z.B.

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega\,t)$$
$$u(t) = u_0 \cos(\Omega\,t)$$



Erregeramplitude: F_0, u_0

Erregerkreisfrequenz: Ω

Normierte Differentialgleichung: $\ddot{X} + \omega_0^2\,X = a\cos(\Omega\,t)$

Amplitude der „Erregerbeschleunigung“: a

Partikularlösung: (stationärer Zustand) $X_{sp}(t) = X_0 \cos(\Omega\,t)$

Amplitude: $X_0 = \dfrac{a}{\omega_0^2 - \Omega^2} = V_a \cdot X_{Stat}$

Statische Auslenkung (infolge F_0): $X_{Stat} = \dfrac{a}{\omega_0^2}$

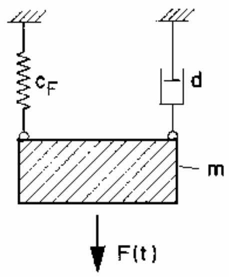
Frequenzverhältnis: $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

Vergrößerungsfunktion: $$V_a = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

7. Erzwungene geschwindigkeitsproportional gedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Normierte Differentialgleichung: $$\ddot{X} + 2\,D\,\omega_0\,\dot{X} + \omega_0^2\,X = \bar{a}\cos(\Omega\,t)$$

Partikularlösung: (stationärer Zustand):



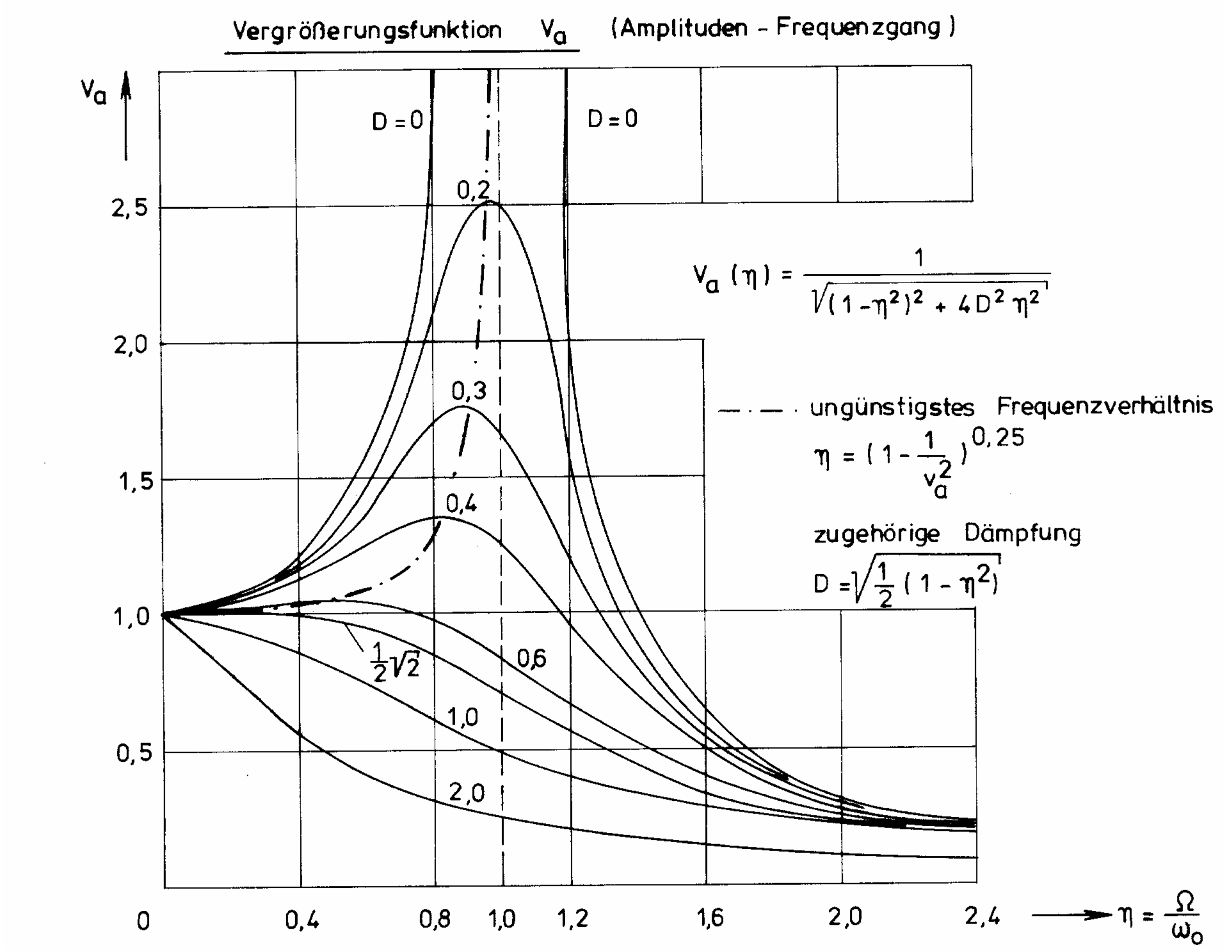
$$X_{sp}(t) = X_0\,\cos(\Omega\,t - \varphi)$$

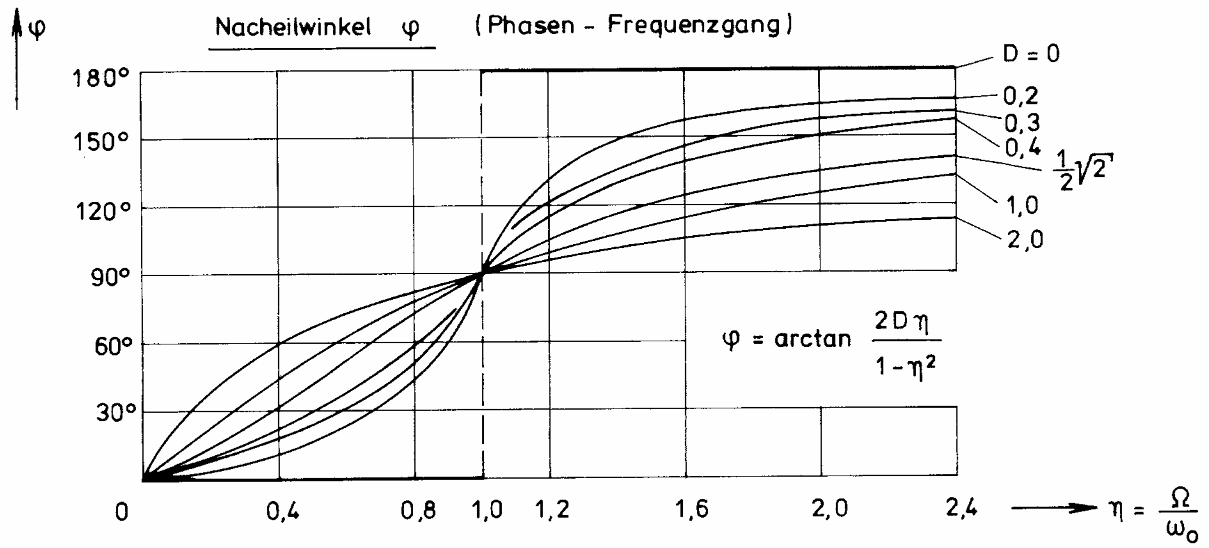
Amplitude: $$X_0 = V_a \cdot X_{Stat}$$

Statische Auslenkung: $$X_{Stat} = \frac{\bar{a}}{\omega_0^2}$$

Vergrößerungsfunktion: $$V_a = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}$$

Nacheilwinkel: $$\varphi = \arctan\frac{2\,D\,\eta}{1 - \eta^2}$$


Vergrößerungsfunktion V_a (Amplituden - Frequenzgang)
V_a
D = 0
D = 0
0,2
0,3
0,4
0,6
1/2 √2
1,0
2,0
V_a (η) = 1 / √((1 - η²)² + 4D² η²)
ungünstigstes Frequenzverhältnis
η = (1 - 1/V_a²)^0,25
zugehörige Dämpfung
D = √(1/2 (1 - η²))
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,4
0,8
1,0
1,2
1,6
2,0
2,4
η = Ω/ω₀


Nacheilwinkel φ (Phasen - Frequenzgang)
φ
D = 0
0,2
0,3
0,4
1/2 √2
1,0
2,0
φ = arctan 2Dη / (1 - η²)
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0
0,4
0,8
1,0
1,2
1,6
2,0
2,4
η = Ω/ω₀

8. Freie ungedämpfte Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Voraussetzungen:
- gleiche Phase φ
- gleiche Frequenz ω
- kleine Amplituden

Man erhält ein System von n Differentialgleichungen (n: Anzahl der Freiheitsgrade)

Die Lösungsansätze lauten:

$$
\begin{aligned}
X_1(t) &= C_1 \sin(\omega t - \varphi) \\
X_2(t) &= C_2 \sin(\omega t - \varphi) \\
&\;\;\ldots \\
X_n(t) &= C_n \sin(\omega t - \varphi)
\end{aligned}
$$

Setzt man die Lösungsansätze in das DGL-System ein, erhält man durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante die Frequenzgleichung, deren Lösung die unbekannten Kreisfrequenzen ω sind.

9. Mit Einzelmassen belegte Stäbe

9.1 Freie Schwingung

Voraussetzung: Gleichfrequente Schwingungen mit kleinen Amplituden

Gleichungssystem zur Berechnung der Frequenz. (2 Freiheitsgrade)

$$
\left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \omega^2}\right) F_1 + \delta_{12} F_2 = 0
$$

$$
\delta_{21} F_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \omega^2}\right) F_2 = 0
$$

ausgewertet: $\omega_{1,2}^2 = B \pm \sqrt{B^2 - A}$

wobei: $A = \dfrac{1}{m_1 m_2 \left(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2\right)^2}$; $B = \dfrac{A}{2}\left(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}\right)$

Statische Belastungsgleichwerte:

$$F_1 = m_1\, \omega^2\, y_{10}$$
$$F_2 = m_2\, \omega^2\, y_{20}$$

(bei Rotation tritt Θ_i an Stelle von m_i)

y_{10}, y_{20}: Durchbiegung der Schwingungsgrenzlinie

δ_{ik}: Einflußgrößen

9.2 Erzwungene Schwingung

Harmonische Erregung: $$F = F_0 \sin\left(\Omega\, t\right)$$

Amplitude der Schwingungsgrenzlinie:

$$y_{i0} = \delta_{i1}\, F_1 + \delta_{i2}\, F_2 + ... + \delta_{in}\, F_n + \delta_{i0}\, F_0$$

Amplituden der Partikularlösung (2 Freiheitsgrade):

$$F_1 = \frac{-\delta_{10}\, \bar{\delta}_{22} + \delta_{20}\, \delta_{12}}{\bar{\delta}_{11}\, \bar{\delta}_{22} - \delta_{12}^2}\, F_0$$
$$F_2 = \frac{-\delta_{20}\, \bar{\delta}_{11} + \delta_{10}\, \delta_{21}}{\bar{\delta}_{11}\, \bar{\delta}_{22} - \delta_{12}^2}\, F_0$$

$$\bar{\delta}_{11} = \delta_{11} - \frac{1}{m_1\, \Omega^2}$$
$$\bar{\delta}_{22} = \delta_{22} - \frac{1}{m_2\, \Omega^2}$$

10. Schwinger mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Massenbelegung: $$\mu = \frac{dm}{dX_1}$$

10.1 Freie Längsschwingungen von Stäben

Partielle Differentialgleichung: $EAu'' - \mu\ddot{u} = 0$

Bernnoulli-Ansatz: $u(X_1, t) = \phi(t) \cdot U(X_1)$

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\ddot{\phi} + \omega^2\, \phi = 0$$

$$U'' + \alpha^2 = 0$$

Lösungsansätze:

$$\phi = A \sin(\omega\, t) B \cos(\omega\, t)$$

$$U = C_1 \sin(\alpha\, X_1) C_2 \cos(\alpha\, X_2)$$

Konstante: $\alpha^2 = \frac{\omega^2\, \mu}{EA}$

10.2 Freie Torsionsschwingungen von Stäben

Partielle Differentialgleichung: $GJ_T\, \varphi'' - \Theta\, \ddot{\varphi} = 0$

Bernoulli-Ansatz: $\varphi(X_1, t) = \varphi_0(X_1)[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$

Gewöhnliche Differentialgleichung: $GJ_T\, \varphi_0'' + \omega^2\, \Theta\, \varphi_0 = 0$

Lösungsansatz: $\varphi_0(X_1) = C_1 \sin(\alpha\, X_1) + C_2 \cos(\alpha\, X_1)$

Konstante: $\alpha^2 = \frac{\Theta}{GJ_T}\, \omega^2$

10.3 Freie Biegeschwingung von Stäben

Partielle Differentialgleichung: $EJ_T\, w^{IV} + \mu\, \ddot{w} = 0$

Bernoulli-Ansatz: $w(X_1, t) = w_0(X_1)[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$

Gewöhnliche Differentialgleichung: $EJ\, w_0^{IV} - \omega^2\, \mu\, w_0 = 0$

Lösungsansatz:

$$w_0(X_1) = C_1 \sin(\alpha\, X_1) + C_2 \cos(\alpha\, X_1) + C_3 \sinh(\alpha\, X_1) + C_4 \cosh(\alpha\, X_1)$$

Konstante: $\alpha^4 = \frac{\mu}{EJ}\, \omega^2$

Für alle Gleichungen gilt: EJ, EA, GJ_T sind konstant.

10.4 Näherungslösung (Rayleigh-Quotient) für die niedrigste Eigenkreisfrequenz

Allgemein: $$\omega^2 \le \frac{\int_l EJ\, \tilde{w}^{IV} \cdot \tilde{w}\, dX_1}{\int_l \mu\, \tilde{w}^2\, dX_1}$$

$\tilde{w}(X_1)$: einparametriger Ansatz für $w_0(X_1)$ (z.B. Biegelinie infolge Streckenlast).