Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Campus Essen
Dirk Pauly

Einführung in die Hochschulmathematik

Übungen zur Vorlesung

Aufgabe 1

Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in \mathbb{N} \;:\; 0 < x < 4{,}8\}\,,\\
B &:= \{t \in \mathbb{N} \;:\; t \text{ ist Teiler von } 24\}\,,\\
C &:= \{z \in \mathbb{Z} \;:\; z \text{ ist positiv, durch 3 teilbar und kleiner als } 21\}\,,\\
D &:= \{y \in \mathbb{R} \;:\; y^2 - 1 = 0\}\,,\\
E &:= \{f \in \mathbb{R} \;:\; (f-1)^2 = 0\}\,,\\
F &:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x + 8 = 9\}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien die Mengen $A := \{1, 2\}$, $B := \{1, 2, 3\}$, $C := \{2\}$ und $M := \{1, A, B, C\}$. Welche Aussagen sind richtig?

$1 \in B$	$A \subseteq B$	$A \in M$	$A \subseteq M$	$2 \in M$	$\{C\} \in M$
$1 \in M$	$\emptyset \in C$	$\emptyset \subseteq M$	$C \in B$	$1 \subseteq M$	$\emptyset \subseteq \{C\}$
$\{1\} \in M$	$C \subseteq A$	$C \subseteq M$	$C \in M$	$\{C\} \subseteq M$	$C \in A$

Aufgabe 3

Stellen Sie die vollständige Liste aller Teilmengen von $M := \{2, 3, 4\}$ auf.

Aufgabe 4

Welche Elemente und welche Teilmengen besitzt die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

Aufgabe 5

Sei $M := \{2, 3, 4\}$ und $N := \{1, \pi, 4, 5\}$. Stellen Sie die Liste der Elemente von $M \times N$ und von $(M \times N) \cap (N \times M)$ auf.

Aufgabe 6
Sei D die Menge aller Dreiecke. Untersuchen Sie die Beziehungen zwischen den folgenden Teilmengen von D:

G : Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke

S : Die Menge aller gleichschenkligen Dreiecke

R : Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke

F : Die Menge aller Dreiecke, die mindestens einen Winkel der Größe 45° besitzen

Stellen Sie die Beziehungen graphisch in einem EULER-Diagramm dar.

Aufgabe 7
Vereinfachen Sie oder formen Sie um:

(i) $[-1\,,\,0] \cup [-2\,,\,0)$

(ii) $(-2\,,\,1] \cap (-1\,,\,1)$

(iii) $(-\infty\,,\,-\sqrt{2}\,] \cup [-3\,,\,5] \cup (5\,,\,\infty)$

(iv) $(-\infty\,,\,1\,]\backslash(-2\,,\,2]$

(v) $[1\,,\,\infty)\backslash(2\,,\,3]$

Aufgabe 8
Stellen Sie die folgenden drei Mengen grafisch in der kartesischen Ebene dar. Welche (mengentheoretischen) Beziehungen können Sie zwischen den Mengen erkennen?

$$K := [-2\,,\,2] \times [0\,,\,4] \quad , \quad L := [1\,,\,5] \times [2\,,\,5] \quad , \quad M := [3\,,\,4] \times (2\,,\,5)\,.$$

Aufgabe 9
Gilt eine der beiden Aussagen $(L\backslash M) \cup M = L$ und $(L \cup M)\backslash M = L$ für beliebige Mengen L und M? Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe 10
Handelt es sich um Aussagen im mathematischen Sinne? Welchen Wahrheitswert haben sie gegebenenfalls?

(a) Keine Ursache!

(b) Borneo ist die drittgrößte Insel der Welt.

(c) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

(d) Lernen, lernen, popernen!

(e) Mathematik ist sinnlos.

Aufgabe 11
Ein Arbeiter benötigt für eine Arbeit 12 Tage, ein anderer nur 9 Tage. Wie lange benötigen Sie gemeinsam?

Aufgabe 12
Bilden Sie die Negation der Allaussage „Alle Männer müssen sich rasieren“ und die Negation der Existenzaussage „Es gibt SchülerInnen, die nicht fleißig genug sind“.

Aufgabe 13
Anwendung der Distributivgesetze

Ausmultiplizieren:

(a)	$(2a+b)(3a+2b)$	**(b)**	$(-2n-t)(2n-t)$
(c)	$(x-2)(x+2)(x-3)$	**(d)**	$(7x+3y)(3x^2-x+1)$
(e)	$(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})$	**(f)**	$(2a+3b-c+d^2)^2$

Ausklammern:

(a)	yx^2+xy^2+3xy	**(b)**	$ax-by+cx-cy-ay+bx$
(c)	x^2-y^2	**(d)**	$x_1y_2+x_1x_2+y_1x_2+y_1y_2$
(e)	$16a^2-9$	**(f)**	$p^2+49-14p$

Aufgabe 14
Bruchrechnung

Kürzen:

(a)	$\frac{10a}{5ab}$	**(b)**	$\frac{15ac}{35b}$	**(c)**	$\frac{ab+a}{24abc}$
(d)	$\frac{5c+10}{3c+6}$	**(e)**	$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	**(f)**	$\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

Addieren (d.h. formen Sie in einen einzigen Bruchausdruck um)**:**

(a)	$\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}$	**(b)**	$\frac{6}{p+q}-\frac{5}{q}$
(c)	$\frac{3}{r}-\frac{2}{1+r}+\frac{1}{2-r}$	**(d)**	$\frac{t^2}{\sqrt{7}-1}-\frac{t^2\sqrt{7}}{6}$

Aufgabe 15
Vereinfachen Sie soweit wie möglich

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}, \quad \frac{x+y}{x^2-xy}-\frac{x-y}{x^2+xy}+\frac{4x}{x^2-y^2}, \quad \frac{\frac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\frac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\frac{b^2}{16a^2-b^2}}.$$

Aufgabe 16

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) und vereinfachen Sie

$$\sqrt{6^2 \cdot 8^2}, \quad \sqrt{6^2 + 8^2}.$$

Aufgabe 17

Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

(a) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ **(b)** $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - \sqrt{a}$ **(c)** $\sqrt{0,01a^4b^2}$

(d) $\sqrt{3}\sqrt{21}\sqrt{7}$ **(e)** $\sqrt[a]{b} + 2\sqrt[a]{b} + 4\sqrt[a]{b^2}$ **(f)** $\sqrt{\dfrac{a^5b^2c}{d^3}} : \sqrt{\dfrac{ad}{b^2c^3}}$

Aufgabe 18

Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

(i) $\sqrt[3]{(0,000027)^{-1}}$

(ii) $\dfrac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}}$

(iii) $\big(26 \cdot 5^m - 5^m\big)/5^{m+2}$

(iv) $\dfrac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$

(v) $\dfrac{2x^3 - x^2 + 2}{x^{n+1}} - \dfrac{x^5 - 1}{x^{n+3}} + \dfrac{2 - x}{x^{n-1}}$

(vi) $\left(\dfrac{a^2b}{cd^3}\right)^3 : \left(\dfrac{ab^2}{c^2d^2}\right)^4$

(vii) $\dfrac{u^{y+1}v^{2y+3}w^{-y-4}}{u^{-2y-1}v^{y+1}w^{1-y}} : \dfrac{u^{3y-1}v^{-y+1}w^{y-3}}{u^{2y}v^{-3}w^{3-2y}}$

(viii) $\dfrac{x\sqrt[3]{y^2} - y\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2y^2}}$

(ix) $t^{4p} - 12t^{2p} + 36$

Aufgabe 19

Formen Sie so um, dass die Wurzeln im Nenner verschwinden, und vereinfachen Sie:

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{1}{a - \sqrt{b}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}}$

(d) $\dfrac{2 + \sqrt{a^2 - 2}}{2 - \sqrt{a^2 - 2}}$

(e) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$

(f) $\dfrac{12 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6\sqrt{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3} - 1}$

(g) $\dfrac{6 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} + 8\sqrt{\dfrac{1}{5}} - \dfrac{-2 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

(h) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

Aufgabe 20

Lösen Sie:

(i) $x^2 + 5x = 0$

(ii) $(3x - 15)(x + 8) = 0$

(iii) $4x^2 + 8x + 4 = 0$

(iv) $x^3 = 5x - x^2$

(v) $2 + x = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

(vi) $\sqrt{9 + x^2} - 1 = x$

(vii) $\sqrt{x + 5} = x - 1$

(viii) $(x + 2)(6x - 1) = (2x - 1)(3x + 4)$

(ix) $|x + 2| = 4$

(x) $|x - 1| + |x - 2| = 5$

Aufgabe 21

Beispiele für Gleichungen, bei deren Lösung naheliegende Umformungen nicht immer äquivalente Umformungen sind:

(a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} = 0$,

(b) $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$.

Diskutieren Sie die möglichen Vorgehensweisen, wenn bei einer wünschenswerten Umformung keine Äquivalenz, sondern nur die Implikation „$\Rightarrow$“ in der Schreibrichtung gilt. Welche Beziehung besteht dann zwischen der Zahlenmenge, die man schließlich erhält, und der Lösungsmenge der Gleichung? Was bedeutet es im Grunde, wenn man von einer erforderlichen „Probe“ spricht?
Lässt sich u.U. zeigen, dass eine Umformung doch eine äquivalente Umformung ist, wenn man sich auf die Betrachtung des Definitionsbereiches der Gleichung beschränkt?

Aufgabe 22

Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ nach x auf.

Aufgabe 23

Welche quadratischen Gleichungen haben als Nullstellen

- 4 und 2,
- $-2 + \sqrt{5}$ und $-2 - \sqrt{5}$?

Aufgabe 24
Für welche Werte von c hat die Gleichung

$$x^2 - (2c-1)x + (c-1/2) = 0$$

genau eine Lösung?

Aufgabe 25
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - (a+b)x + ab - c^2 = 0$$

für alle Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung besitzt. Für welche Parameter a, b, c besitzt die Gleichung genau eine Lösung?

Aufgabe 26
Für welche reellen Zahlen x sind folgende Ungleichungen erfüllt? Kennzeichnen Sie das Ergebnis auf der Zahlengeraden!

1. $7x + 15 \leq -22$

2. $|x-3| < 1$ und $|x+4| \geq 2$

3. $|x-2| > x$

4. $x^2 - x > 0$ und $x^2 - 6x + 10 < 0$

5. $\frac{1}{x} < x$

6. $\frac{x}{x-5} \geq 0$

7. $2x^2 > 18$

Aufgabe 27
Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle positiven Zahlen a und b:

$$\textbf{(i)}\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad , \quad \textbf{(ii)}\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \quad , \quad \textbf{(iii)}\ \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leqslant \sqrt[4]{ab}\,.$$

Aufgabe 28
Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung

$$ax^2 + 4x > 1 - 3a$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt?

Aufgabe 29
Entscheiden Sie ohne Taschenrechner:

- Was ist größer: 3 oder $10 - 4\sqrt{3}$?
- Gilt $\sqrt{10} + \sqrt{2} > \sqrt{20}$?

Aufgabe 30
Berechnen Sie die Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(2i-1)$ **(b)** $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} 2^{-(j+1)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k-1}\cdot k^2$

Aufgabe 31

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

(a) $1+4+7+10+13$ **(b)** $1+8+27+64+125$

(c) $3+8+15+24+35$ **(d)** $a+1+a+3+a+5$

Aufgabe 32
Schreiben Sie die Summen mit dem Summenzeichen und berechnen Sie die Werte:

- $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^{10}}$
- $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \pm \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$

Aufgabe 33
(a) Berechnen Sie: **(i)** $(x-1)^7$ **(ii)** $(u-2v)^5$

(iii) $\binom{10}{4}$ **(iv)** $\binom{12}{3}$

(v) $\binom{8}{3}$ **(vi)** $\binom{19}{15}$

(b) Finden Sie ein n mit $\binom{n}{10} = \binom{n}{13}$.

Aufgabe 34
Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n-te Potenz von a rekursiv durch

$$a^0 := 1, \quad a^{n+1} := a^n a.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ die folgenden Regeln gelten:

(i) $a^{n+m} = a^n a^m$ und $(a^n)^m = a^{nm}$

(ii) $(ab)^n = a^n b^n$ und $(a/b)^n = a^n / b^n$ (für $b \neq 0$)

(iii) $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$ (für $n \geq 1$)

Aufgabe 35
Finden Sie heraus, für welche $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage

$$2^n > n^2$$

gilt, und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 36
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 37
Finden Sie mit dem Trick aus der Vorlesung einen Ausdruck für

$$\sum_{n=1}^{N} n^3, \quad N \in \mathbb{N},$$

in dem kein Summenzeichen mehr erscheint. Belegen Sie sodann Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 38
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$

$$\Big(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} 1/x_k \Big) \geq n^2.$$

Aufgabe 39
Zeigen Sie durch Induktion über $N \in \mathbb{N}$

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + 1/n)^n = \frac{(N+1)^N}{N!}.$$

Aufgabe 40
Zeigen Sie für $n, k \in \mathbb{N}$ per Induktion über k

$$\binom{n}{k} 1/n^k \leq 1/k!.$$

Aufgabe 41
Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k.$$

Aufgabe 42
Bestimmen Sie für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{1}{\ell(\ell+1)}, \quad \prod_{m=1}^{N} (1 + 1/m)^2.$$

Anleitung: Teleskopsumme bzw. -produkt

Aufgabe 43
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$x_{n+1} := 3x_n - 2x_{n-1}, \quad x_0 := 0, \quad x_1 := 1.$$

Zeigen Sie durch Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$

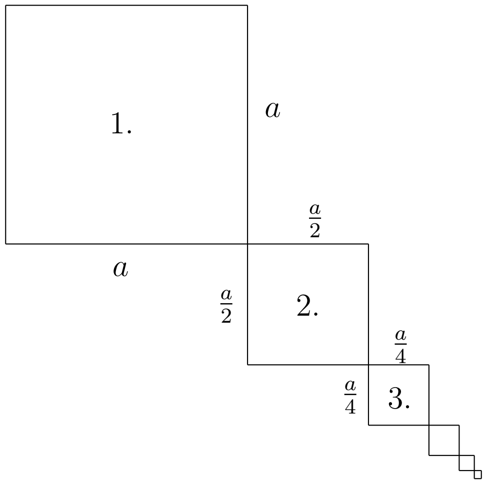
$$x_n = 2^n - 1.$$

Aufgabe 44
Zeigen Sie, daß für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}$ und $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

2. $2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

Aufgabe 45
Durch fortgesetzte Halbierung der Seiten eines Quadrats erhält man eine unendliche Kette von Quadraten: Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates der 17. Halbierungsstufe, wie groß die Summe der Flächen bis zur 20. Halbierungsstufe? Kann die Summe der Quadratflächen beliebig groß werden? Wenn nicht, welchen Grenzwert strebt sie an?



Aufgabe 46
Jemand kauft einen Kühlschrank und erhält wegen einer Lackbeschädigung 5% Preisnachlass. Da er bar bezahlt, werden ihm weitere 2% Skonto gewährt. Er muss letztlich 139,65 € bezahlen. Wie teuer war der (unbeschädigte) Kühlschrank ursprünglich?

Aufgabe 47
Ein Arbeiter erhält einen Stundenlohn von 15,- €. Durch zwei gleich hohe prozentuale Steigerungen soll der Lohn nach zwei Jahren 16,- € pro Stunde betragen. Wie hoch ist der Prozentsatz?

Aufgabe 48
Ein Sparbrief mit einer Einlage von 6000 Euro und zehn Jahren Laufzeit werde die gesamte Laufzeit lang fest mit 8 Prozent pro Jahr verzinst. Wie groß ist der Zinsgewinn (vor Steuer) in Euro, den man am Ende der Laufzeit erhält? Was passiert, wenn viermal pro Jahr mit 2 Prozent verzinst wird? Was passiert, wenn x-mal pro Jahr mit $8/x$ Prozent verzinst wird? $x \to \infty$?

Aufgabe 49
Vor einer Blende mit einer Öffnung vom Radius 1 befindet sich im Abstand x eine Glühbirne (punktförmige Lichtquelle). Wie groß muß der Abstand x gewählt werden, damit auf einem 3 Einheiten hinter der Blende befindlichen Schirm ein Lichtfleck vom Radius y erzeugt wird? Fertigen Sie zunächst eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 50
Die Versorgung eines Haushaltes mit elektrischer Energie kann zu zwei alternativen Tarifen erfolgen:

Tarif I Grundgebühr: 30,- €/Monat; Arbeitspreis: 0,25 €/kWh.
Tarif II Grundgebühr: 12,- €/Monat; Arbeitspreis: 0,40 €/kWh.

(i) Man ermittle für jeden der beiden Tarife die Gleichung der Kostenfunktion, die die monatlichen Gesamtkosten K in Abhängigkeit des monatlichen Energieverbrauchs x angibt. Man zeichne beide Kostenfunktionen in dasselbe Koordinatensystem.

(ii) Man berechne den monatlichen Energieverbrauch, für den sich in beiden Tarifen dieselben Kosten ergeben. Für welche Verbrauchswerte ist Tarif I günstiger als Tarif II?

Aufgabe 51
Kevin möchte sich beim Mobilfunkanbieter F-Minus ein Handy beschaffen. Er überlegt nun, ob er sich ein Kartenhandy oder eines mit Vertrag anschaffen soll, wobei der Preis des Gerätes selbst keine Rolle spielt. Die laufenden Kosten stellen sich wie folgt dar:

	Vertrag	Prepaid-Karte
Grundgebühr pro Monat	9,95 €	0,- €
Minutenpreis	0,49 €	0,77 €

Ab wie vielen Gesprächsminuten pro Monat lohnt sich das Vertragshandy?

Aufgabe 52
Liegen die Punkte $(-2,1)$, $(5,7)$ und $(3,2)$ auf einer Geraden?

Aufgabe 53
Gegeben seien die Punkte $P=(-2,5)$ und $Q=(-7/2,1)$. Die Strecke $\vec{PQ}$ soll so zu einem Quadrat $\boxed{\text{PQRS}}$ ergänzt werden, daß der Koordinatenursprung im Innern des Quadrats liegt. Geben Sie die Koordinaten von R und S an.

Aufgabe 54
Zeichnen Sie die Schaubilder folgender Funktionen:

(i) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+1 \end{array}$ und $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}$

(ii) $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+4x \end{array}$ und $Z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |z(x)| \end{array}$

(iii) $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(x) \end{array}$ mit $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$

(iv) $\begin{array}{rcl} b : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & b(x) \end{array}$ mit $b(x) := |x-1| + |x+4|$

Wo schneiden die Graphen die x- bzw. y-Achse?

Aufgabe 55

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 4$. Zeichnen Sie die Graphen von

- $f, \quad 2f, \quad \frac{1}{2}f, \quad -f;$
- $f, \quad f(2\,\cdot), \quad f(\frac{1}{2}\,\cdot), \quad f(5\,\cdot);$
- $f, \quad f+5, \quad f-1;$
- $f, \quad f(\,\cdot-2), \quad f(\,\cdot+3)$

jeweils in <u>ein</u> Koordinatensystem!

Aufgabe 56

Bringen Sie die folgenden Funktionen auf die Form $y(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$ und geben Sie jeweils die Scheitelpunktskoordinaten an.

(i) $\varphi(x) := x^2 - 6x + 10$

(ii) $\psi(x) := \frac{1}{4}x^2 - x + 4$

(iii) $\eta(x) := -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

(iv) $\xi(x) := 2x^2 + 6x$

Aufgabe 57

Rechnen Sie Grad in Bogenmaß bzw. umgekehrt um:

(i) $90°$ **(iv)** $-72°$

(ii) $\frac{5}{6}\pi$ **(v)** $\frac{5}{4}\pi$

(iii) $15°$ **(vi)** 1

Aufgabe 58

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen:

(i) $\sin(x)$ **(ii)** $\sin(2x)$

(iii) $\sin(x + \pi/2)$ **(iv)** $\sin(x) + 2\cos(x)$

Benutzen Sie in **(i)** bis **(iii)** <u>keinen</u> Taschenrechner oder gar Computer!

Aufgabe 59
Geben Sie alle reellen Nullstellen der Kosinusfunktion (Bogenmaß!) an, d.h., alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\cos(x) = 0$ gilt. Wieviele solche x gibt es?

Aufgabe 60
Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Zahlen

$$\cos(\alpha), \quad \tan(\alpha), \quad \sin(2\alpha)$$

für α mit $\sin(\alpha) = 0,6$ und $0 < \alpha < 90°$, und ferner

$$\sin(\pi/12), \quad \cos(\pi/12).$$

Hinweis: $1/12 = 1/3 - 1/4$

Aufgabe 61
Vereinfachen Sie:

(i) $\cos^2(\alpha)\tan^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$

(ii) $\dfrac{1 - \cos^2(\phi)}{\sin(\phi)\cos(\phi)}$

(iii) $1 - \dfrac{1}{\cos^2(\phi)}$

(iv) $\sin(\alpha)\sin(2\alpha) + \cos(\alpha)\cos(2\alpha)$

(v) $\dfrac{1}{1 - \sin(\phi)} + \dfrac{1}{1 + \sin(\phi)}$

(vi) $\dfrac{\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$

(vii) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$

Aufgabe 62
Bestimmen Sie x im Bogenmaß:

(a) $\sin(3x) = 1$ **(b)** $\cos(4x) = 0$ **(c)** $\sin(2x) + 3\sin(x) - 2\tan(x) = 0$

Aufgabe 63
Berechnen Sie die Längen der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 17\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$. Welchen Winkel schließen die Raumdiagonalen mit den Grundflächen ein?

Aufgabe 64
Das Wassermolekül ist ein Dipol. Die beteiligten Atome bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Öffnungswinkel von 104°. Der Abstand jedes Wasserstoffatoms vom Sauerstoffatom beträgt 0.0958 nm. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Wasserstoffatomen? Skizze!

Aufgabe 65

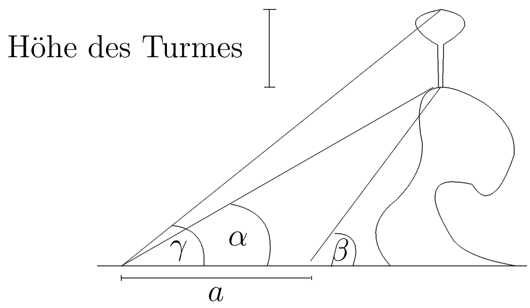
Es soll die Länge der Luftlinie zweier Geländepunkte A und B bestimmt werden. Von einem dritten Punkt C, dessen Abstand zu A 420 m und zu B 335 m beträgt, werden beide Punkte unter einem Winkel von 64° beobachtet.

Aufgabe 66

Aus einer Entfernung von $e = 60\,\mathrm{m}$ erblickt Christfried die Spitze eines Turmes unter dem Erhebungswinkel von $\alpha = 27°$. Wie hoch ist der Turm, wenn die Augenhöhe Christfrieds $a = 1{,}50\,\mathrm{m}$ beträgt?

Aufgabe 67

Um die Höhe eines Turmes zu bestimmen, der auf einem unzugänglichen Berg steht, mißt Chantalle gemäß der Abbildung die Winkel $\alpha = 21°$, $\beta = 46°$ und $\gamma = 26°$, sowie die Länge der Basislinie $a = 40\,\mathrm{m}$.



Aufgabe 68

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche, und zeichnen Sie die Schaubilder (Graphen) folgender Funktionen:

(1) $y(x) := \tan(\pi/2 - x)$ **(2)** $y(x) := \tan(x/2)$

Aufgabe 69

Zeigen Sie

$$\tan(2t) = \frac{2\tan(t)}{1-\tan^2(t)}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 70

Geben Sie <u>ohne</u> Taschenrechner an:

(i) $\tan(\frac{5}{3}\pi)$ **(ii)** $\arccos(-1)$

(iii) $\arccos(-\frac{1}{2})$ **(iv)** $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Aufgabe 71

Berechnen Sie jeweils c und φ mit

- $-4\sin(x) + 3\cos(x) = c\sin(x+\varphi)$;
- $6\sin(2t) + 8\cos(2t) = c\sin(2t+\varphi)$.

Aufgabe 72
Zeigen Sie:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\big(\frac{\alpha+\beta}{2}\big)\cos\big(\frac{\alpha-\beta}{2}\big)$$

Anleitung: Was ist die Summe, was die Differenz von $(\alpha+\beta)/2$ und $(\alpha-\beta)/2$?

Aufgabe 73
Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner:

(i) $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{5x}}\right)$

(ii) $\ln\sqrt{\mathrm{e}}$

(iii) $\ln(0,5) - \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(16)$

(iv) $\lg(x) + 2\lg(y) - \big(\frac{1}{3}\lg(y) + 2\lg(x)\big)$

(v) $\log_8(\log_4(\log_2 16))$

(vi) $\lg(\lg\sqrt{\sqrt[5]{10}})$

(vii) $49^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}$

Aufgabe 74
Lösen Sie:

(1) $2^{x-3} = 3^{4-x}$

(2) $\mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

(3) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$

(4) $\log_9\big(\frac{2x}{x+1}\big) = 0,5$

(5) $xy = 1$ und $x^{\ln(y)} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Aufgabe 75
Eine Seerose verdopple ihre Blattoberfläche in jeweils 10 Tagen. Das Wachstum ihrer Blattoberfläche o wird beschrieben durch $o(t) := e^{at-b}$ mit unbekannten Parametern a und b, wobei die Zeit t in Tagen gemessen wird. Nach wie viel Tagen hat sie ihre Blattoberfläche jeweils verdreifacht?

Aufgabe 76
Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Funktionswerte $f(0,1)$ und $f(\sqrt[3]{10})$ der Funktion

$$f(x) := x^{7+3\lg(x)} - 10\,x^5.$$

Aufgabe 77
Für welche reellen Zahlen x gilt $\ln|x-2| > 1$ und für welche $\lg(x) \le -1$?

Aufgabe 78

Das Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall lautet: $s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v := s'$ als Funktion von t.
- Drücken Sie t in Abhängigkeit von s und auch v in Abhängigkeit von s aus.
- Nach einer Fallstrecke von $s = 15\,\mathrm{m}$ wird die Zeit $t = 1{,}748\,\mathrm{s}$ gemessen. Wie groß ist dann die Geschwindigkeit v? Um welche Beträge ändern sich v und t, wenn sich s um $8\,\mathrm{cm}$ vergrößert?

Aufgabe 79

Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich D_f und die Ableitung folgender Funktionen f:

a) $f(x) := x^2 - 3x - 2 + \sin(x)$

b) $f(x) := x\,\sin(x)$

c) $f(x) := |x|$

d) $f(x) := \dfrac{3x+1}{x-1}$

e) $f(x) := \dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}$

f) $f(x) := \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

Aufgabe 80

Bestimmen Sie die (maximalen) Definitionsbereiche D_f und $D_{f'}$ sowie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{-x}$

(d) $f(x) = x^{-3/2}$

(e) $f(x) = x\sin(x)$

(f) $f(x) = x\tan(x)$

(g) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2\cos(x)}{1+x^2}$

(i) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(j) $f(x) = (2x^2-1)^{11}$

(k) $f(x) = xe^{x^2}$

(l) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

(m) $f(x) = x^x$

(n) $f(x) = x^{\sin(x)}$

(o) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Aufgabe 81
Bilden Sie die Verkettung $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ von g und f, bestimmen Sie sodann den Definitionsbereich $D_{g\circ f}$ und berechnen Sie schließlich die Ableitung der Verkettung auf zwei Arten, einmal direkt und einmal mit der Kettenregel. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

a)	$f(x) = x + 2$	und	$g(x) = x^{-1}$
b)	$f(x) = 3x$	und	$g(x) = \sin(x)$
c)	$f(x) = x^2$	und	$g(x) = \ln(x)$
d)	$f(x) = \sin(x)$	und	$g(x) = 3x$

Aufgabe 82
Die Funktion f sei differenzierbar und streng monoton wachsend in ihrem Definitionsbereich. Was können Sie mit Hilfe der Ableitung zur Monotonie der Funktion g sagen (soweit diese definiert ist)?

(a) $g(x) = -f(x)$ **(b)** $g(x) = (f(x))^2$ **(c)** $g(x) = (f(x))^{-1}$

Aufgabe 83
Berechnen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Geben Sie auch die Geradengleichung der Tangenten an.

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 := 1 \qquad ; \qquad f(x) := x\sin(x), \quad x_0 := \pi$$

Aufgabe 84
Zeigen Sie: An einer Parabel $y = ax^2$ („Parabolspiegel“) werden alle einfallenden achsenparallelen Strahlen so reflektiert, daß sie sich in einem Punkt treffen. Geben Sie auch die Koordinaten des Punktes an.
<u>Hinweis:</u> Fertigen Sie zunächst eine Skizze der Situation an.

Aufgabe 85
Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) := x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$$

durch. Hierzu gehört auch eine Skizze ihres Graphen!

Aufgabe 86
Diskutieren Sie die Funktion $f(x) := x\,\mathrm{e}^{2x}$.

Aufgabe 87
Jemand möchte einen PKW mieten um von Essen nach Rosenheim zu fahren (Streckenlänge 700 km). Der Treibstoffverbrauch c [l/100 km] hängt dabei gemäß

$$c(x) := \frac{240}{x} + \frac{1}{10}x - 3$$

von der Fahrgeschwindigkeit $x > 0$ [km/h] ab.

(a) Welche konstante Geschwindigkeit x sollte gefahren werden um den Treibstoffverbrauch zu minimieren?

(b) Der Mietpreis für den PKW beträgt 12,- €/h plus zusätzlich 50,- € Grundgebühr. Der Treibstoff kostet 1,20 €/l. Weitere Kosten entstehen nicht. Stellen Sie eine Kostenfunktion für die Fahrt nach Rosenheim auf, in der die Fahrgeschwindigkeit x als unabhängige Variable auftritt. Die Kostenfunktion summiert dabei alle genannten Kosten.

(c) Welche Geschwindigkeit sollte gefahren werden um die Kosten zu minimieren?

Aufgabe 88
Spinat soll in kreiszylindrische Konservendosen mit vorgegebenem Volumen V abgefüllt werden. Aus ökologischen und ökonomischen Gründen sollen die Konservendosen so gefertigt werden, daß der Materialverbrauch minimal wird. In welchem Verhältnis stehen dann Kreisdurchmesser und Dosenhöhe?

Aufgabe 89
Für eine Unternehmung, die nur ein Produkt herstellt, gilt die Preis-Absatz-Funktion

$$\begin{array}{rcccc} p & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & p(x) := 63,75 - 6,5x \end{array} ,$$

und die Kostenfunktion

$$\begin{array}{rcccc} K & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & K(x) := \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 30x + 81 \end{array} .$$

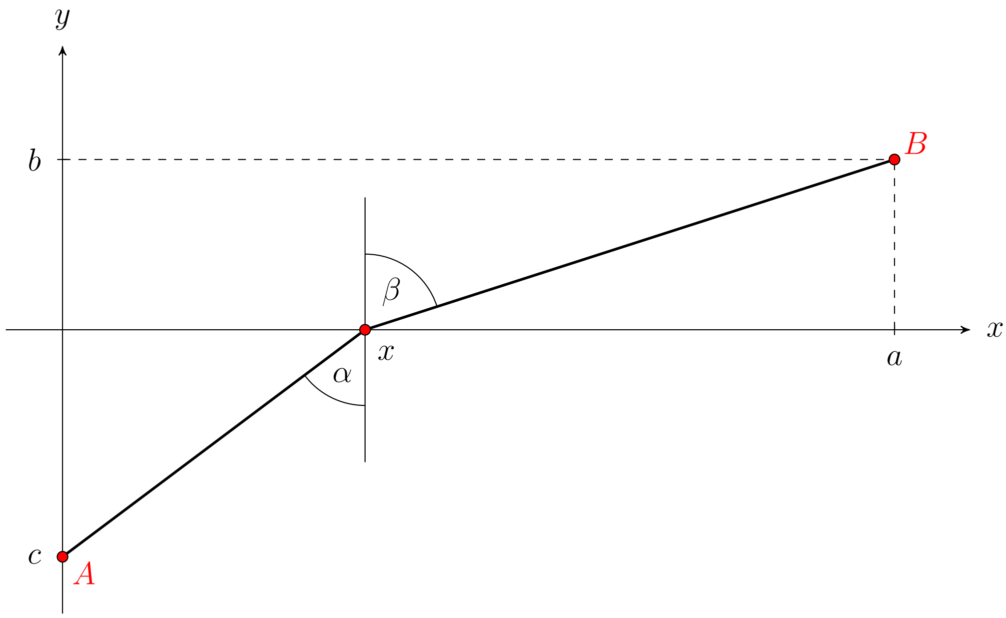
(a) Wie heißt die Gewinnfunktion G?

(b) Bei welcher Produktionsmenge x wird der Gewinn maximal?

(c) Wie groß sind die Durchschnittskosten bei einer Produktionsmenge von $\bar{x} := 10$ Einheiten?

Aufgabe 90

Ein Wanderer möchte in der skizzierten Weise vom Punkt $A := (0, -c)$ zum Punkt $B := (a, b)$ gelangen $(a, b, c > 0)$. Seine Geschwindigkeit für $y \leqslant 0$ beträgt v_A, für $y > 0$ soll sie $v_B > v_A$ sein.



Bestimmen Sie die Laufzeit $T(x)$ in Abhängigkeit von der „Knickstelle“ $x \in [0, a]$. Zeigen Sie, dass T ein absolutes Minimum besitzt, und dass für dieses das „SNELLIUSsche Brechungsgesetz“

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_A}{v_B}$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass eine auf $[x_l, x_r]$ (mit den reellen Zahlen $x_l < x_r$) definierte stetige Funktion f immer ihre absoluten Extrema annimmt. Ist die Funktion zusätzlich rechtsseitig differenzierbar in x_l mit $f'(x_l) < 0$ und linksseitig differenzierbar in x_r mit $f'(x_r) > 0$, so liegt das absolute Minimum in (x_l, x_r), d.h. nicht am Rand (Skizze!). Was gilt dann für die Ableitung an dieser Minimalstelle, falls f dort differenzierbar ist?

Aufgabe 91

Ein schnelles Auto startet mit einer konstanten Beschleunigung von $10\frac{m}{s^2}$, die für mehr als fünf Sekunden beibehalten wird. Welchen Weg hat das Auto nach fünf Sekunden zurückgelegt?

Aufgabe 92

- Geben Sie alle Stammfunktionen F zu $f(x) := x^2 + 1 + (\sqrt{x})^3$ an.
- Bestimmen Sie die Stammfunktion F von f mit $F(2) = 1$, wobei

$$f(x) := -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + 1.$$

Aufgabe 93
Prüfen Sie folgende Gleichungen:

- $\displaystyle\int_0^x \frac{2}{(y+a)^2}\,dy = \frac{x-1}{x+1}$
- $\displaystyle 2\int_1^x \sin^2(y-1)\,dy = x - \frac{1}{8}\sin(8x-2) + 2$

Was stimmt hier eventuell nicht?

Aufgabe 94
Stimmen $|\int_a^b f(x)\,dx|$ und $\int_a^b |f(x)|\,dx$ immer überein? Geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 95
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_2^5 (3\sqrt{x} - 2x^2 + 1)\,dx$ **(iii)** $\displaystyle\int_1^5 x\ln(x)\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos(x)\,dx$ **(v)** $\displaystyle\int_{-84117}^{84117} x^{29}\,dx$ **(vi)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Aufgabe 96
Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen:

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **(v)** $x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$

(ii) $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ **(vi)** $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ **(vii)** $x \mapsto \cos(2x-2)$

(iv) $x \mapsto x^2\sin(x)$ **(viii)** $x \mapsto \dfrac{x+1}{(x+3)^2+1}$

Aufgabe 97
Berechnen Sie:

(i) $\displaystyle\int_0^2 (1-x)^3\,dx$ **(v)** $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$

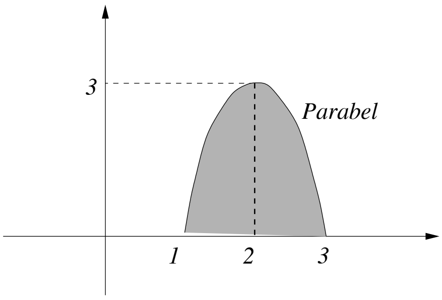
(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3(x)}\,dx$ **(vi)** $\displaystyle\int_0^t x\sqrt{1+3x}\,dx$

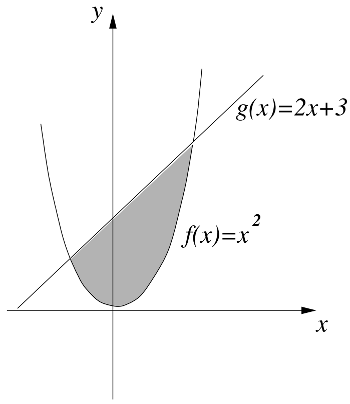
(iii) $\displaystyle\int_1^{10} \sqrt{2x-1}\,dx$ **(vii)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x-2)\,dx$

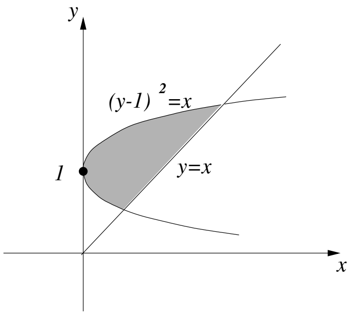
(iv) $\displaystyle\int_{-2}^{17} (ax+b)^4\,dx, \qquad (a \neq 0)$

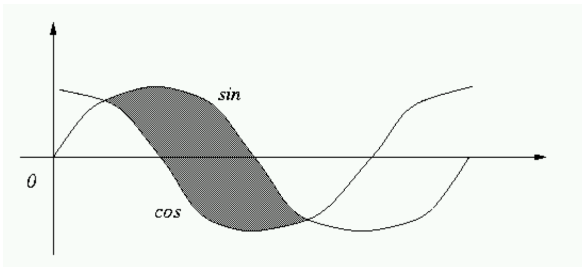
Aufgabe 98

Berechnen Sie den Inhalt der angegebenen Flächen:









Aufgabe 99

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i)	$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$	**(ii)**	$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$
(iii)	$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx$	**(iv)**	$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$
(v)	$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\,dx$	**(vi)**	$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx$

Aufgabe 100

Zwei Arbeiter sollen einen Garten umgraben. Wenn beide zusammen arbeiten, benötigen sie drei Tage. Arbeitet der erste nur einen Tag und der zweite zwei Tage, so schaffen sie 7/12 der Arbeit. Wie lange würde jeder alleine für die Arbeit benötigen?

Aufgabe 101

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(i)
$$\begin{aligned} 3x + y + 2z - u &= 13 \\ 6x + 2y - z + 2u &= 10 \\ 12x - 5y + 4z &= 13 \\ -9x - 4y + 3z + 9u &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x - 2y + 6z &= 1 \\ x - y + 5z &= 5 \\ -2x + 7y - 9z &= -14 \end{aligned}$$

Aufgabe 102

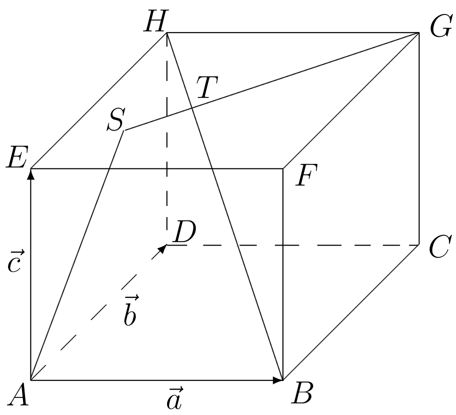
Welche Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ und $y \in \mathbb{R}^4$ lösen die folgenden beiden linearen Gleichungssysteme?

(i)
$$\begin{aligned} 3x_1 &= 5x_2 - 6x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 6x_1 + 3x_3 \\ -7x_3 &= -2x_1 + x_3 + x_2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= -2 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 &= 1 \\ -4y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 3y_4 &= 4 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 - 2y_4 &= -5 \end{aligned}$$

Aufgabe 103

In dem rechten Spat gehen von A die Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. Der Punkt T teile die Raumdiagonale $\vec{BH}$ im Verhältnis $3:1$, die Strecke $\vec{GT}$ werde bis zur Fläche $\boxed{\text{ADHE}}$ verlängert und schneide diese in S. Wie läßt sich $\vec{AS}$ durch die Basisvektoren ausdrücken? In welchem Verhältnis teilt ferner T die Strecke $\vec{GS}$?



Aufgabe 104

Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Ebene E in Normalenform, in der die Gerade g_1 liegt, und die zu g_2 parallel ist. Bestimmen Sie ferner den Abstand von g_2 zu E. Hierbei seien

$$g_1 : x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 105
Untersuchen Sie jeweils die Lage der Geraden g_1 und g_2 zueinander, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Abstand oder Schnittpunkt:

$$\textbf{(i)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(ii)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(iii)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(iv)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(v)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(vi)} \qquad g_1 : x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad g_2 : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 106
Gegeben seien die sechs Punkte $A = (5, 3, -2)$, $B = (17, -3, 7)$, $C = (7, 7, -6)$, $D = (5, 1, -1)$, $E = (2, 5, -6)$ und $F = (12, -5, 7)$. Zeigen Sie, daß die Ebene durch A, B und C zur Ebene durch D, E und F parallel ist, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen voneinander.

Aufgabe 107
Wie groß ist das Volumen des Vierflachs, das die Ebene $E : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ vom ersten Oktanten abschneidet?

Aufgabe 108
Gegeben seien die Ebene E durch $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und der Punkt $P = (7, 3, -2)$. Bestimmen Sie die Projektion P' von P auf E und den Abstand des Punktes P von E.

Aufgabe 109

Fünf Punkte $A = (2,0,2)$, $B = (6,2,2)$, $C = (6,4,1)$, $D = (-2,2,0)$ und $S = (3,2,5)$ seien gegeben.

(i) Zeigen Sie, daß die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene E liegen.

(ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $\boxed{\text{ABCD}}$.

(iii) S sei die Spitze der Pyramide, die $\boxed{\text{ABCD}}$ als Grundfläche besitzt. Bestimmen Sie Pyramidenhöhe.

(iv) Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

(v) g sei diejenige Gerade durch S, die auf E senkrecht steht. Zeigen Sie: Die Projektion von g in die x_1-x_2-Ebene steht auf der x_1-x_2-Spurgeraden von E senkrecht.

(vi) Gilt die letzte Behauptung allgemein, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht?

Aufgabe 110

Gegeben sei ein Vierflach durch die vier Punkte $A = (2,1,1)$, $B = (3,4,3)$, $C = (6,3,4)$ und $S = (4,4,6)$.

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche des Dreiecks $\Delta = ABC$

- aus der Länge der Grundlinie und der zugehörigen Höhe;
- mit Hilfe des Vektorproduktes.

2. Berechnen Sie das Volumen des Vierflachs

- aus dem Flächeninhalt der Grundfläche Δ und der zugehörigen Höhe;
- mit Hilfe des Spatproduktes.

3. Bestimmen Sie den Winkel, den die Kante $\vec{AS}$ mit der Grundfläche einschließt.

4. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von der Geraden durch A und B.

Aufgabe 111

Gegeben seien die Punkte $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 0, 6)$ und $C = (1, 6, 2)$ und eine Gerade g durch die Punkte $D_k = (5 - 2k, 1, k)$ für $k \in \mathbb{R}$.

1. Stellen Sie die Gleichung der Ebene E durch A, B und C in Normalenform auf.

2. Bestimmen Sie k so, daß D_k in der Ebene E liegt.

3. Für welche Werte von k sind die Vektoren $\vec{AB}$ und $C\vec{D}_k$ orthogonal?

4. Berechnen Sie den Abstand d_k des Punktes D_k von E.

5. Projizieren Sie D_k senkrecht auf die Ebene E. Was folgt aus dem Ergebnis geometrisch?

6. Berechnen Sie im Dreieck $\Delta = ABC$ die Länge der von C auf $\vec{AB}$ gefällten Höhe.

7. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks Δ.

8. Berechnen Sie das Volumen V_k des Vierflachs mit den Eckpunkten A, B, C und D_k.