Ringvorlesung „Moderne Physik“ (LA, Modul 5)

Messtechnik: Messung verrauschter Signale

- Rauschen
- Methoden zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses
- Lock-In-Messtechnik

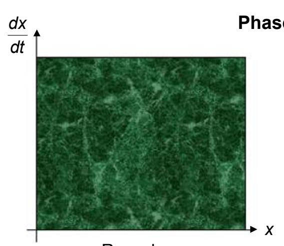
Hans Clemens

1. Rauschen

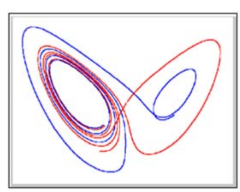
Rauschen ist ein stochastischer Prozess (Schwankungsprozess), bei dem über den Wert einer zeitabhängigen Größe *x*(*t*) für jeden Zeitpunkt *t* nur Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen werden können. (Viele Einzelvorgänge ohne deterministischen Zusammenhang)

Beispiele: Regen, Brown’sche Molekularbewegung, Stereoanlage, Turbulenzen, radioaktive Zerfälle
nicht: deterministisches Chaos (nichtlineare Systeme, Butterfly-Effekt)

Phasenraum



Rauschen



Deterministisches Chaos

Ist meist Gauß’scher stochastischer Prozess:
Die schwankende Größe *x*(*t*) folgt der **Gauß’schen Normalverteilung** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x(t)}}{\sigma}\right)^2\right],$$

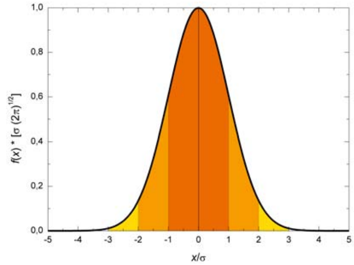
mit $\overline{x(t)} = \overline{x}$ - Mittelwert, oft $\overline{x} = 0$,

σ - Standardabweichung (Streuung)

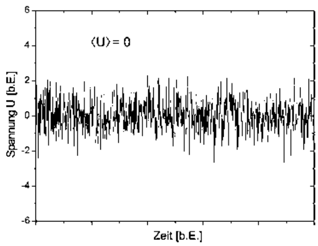
$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, oft $\sigma = \sqrt{\overline{x^2}}$

d.h. meist Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right]$$



68,3% aller x-Werte liegen im Intervall $\pm\sigma$.
95,5% aller x-Werte liegen im Intervall $\pm 2\sigma$.
99,7% aller x-Werte liegen im Intervall $\pm 3\sigma$.



Mathematische Beschreibung der Zufälligkeit von Signalen mittels **Autokorrelationsfunktion**

$$R_x(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot x(t+\vartheta)\, dt \qquad , x(t) \text{ reell}$$

Ist ein Maß für die Ähnlichkeit (Korrelation) eines Signals zu zwei um ϑ verschobenen Zeitpunkten.

Beispiele: unkorrelierte Prozesse $R_x(\vartheta) = \delta(\vartheta)$, (wenn Prozesse beliebig schnell),
periodische Prozesse R_x max., wenn ϑ einer oder mehreren Perioden ($2n\pi$) entspricht.

Analog bei zwei stochastischen Prozessen: **Kreuzkorrelationsfunktion**

$$\boxed{R_{xy}(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y(t+\vartheta)\, dt} \qquad , x(t) \text{ und } y(t) \text{ reell}$$

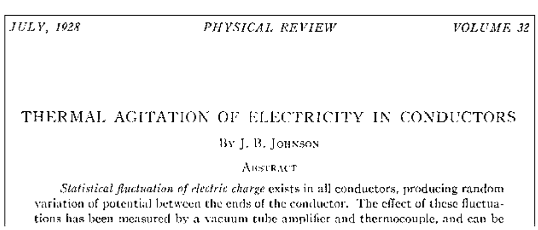
Wird z.B. im Lock-In-Verstärker gebildet! (Siehe Teil 3.)

Im Folgenden:
Elektrische Signale, da in Messtechnik sehr oft elektrische/elektronische Messverfahren

1.1 Widerstandsrauschen (Nyquist- oder Johnson-Rauschen, thermisches Rauschen)

- Experiment: Gleichspannungsmessung mit rel. gutem Digitalmultimeter

Erste Veröffentlichungen zu Widerstandsrauschen:



JULY, 1928 PHYSICAL REVIEW VOLUME 32

THERMAL AGITATION OF ELECTRICITY IN CONDUCTORS

By J. B. Johnson

Abstract

Statistical fluctuation of electric charge exists in all conductors, producing random variation of potential between the ends of the conductor. The effect of these fluctuations has been measured by a vacuum tube amplifier and thermocouple, and can be

J.B. Johnson, Phys. Rev. **32** (1928) 97-109

JULY, 1928 PHYSICAL REVIEW VOLUME 32

THERMAL AGITATION OF ELECTRIC CHARGE IN CONDUCTORS*

By H. Nyquist

Abstract

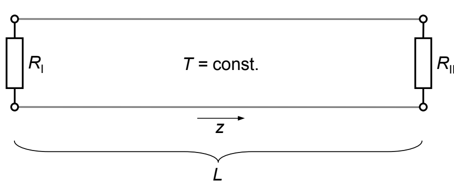
The electromotive force due to thermal agitation in conductors is calculated by means of principles in thermodynamics and statistical mechanics. The results obtained agree with results obtained experimentally.

DR. J. B. JOHNSON[1] has reported the discovery and measurement of an electromotive force in conductors which is related in a simple manner to the temperature of the conductor and which is attributed by him to the thermal agitation of the carriers of electricity in the conductors. The work to be resported in the present paper was undertaken after Johnson's results were available to the writer and consists of a theoretical deduction of the electromotive force in question from thermodynamics and statistical mechanics.[2]

H. Nyquist, Phys. Rev. **32** (1928) 110-113

Zunächst:

Theoretischer Gedankengang in Anlehnung an die Veröffentlichung von H. Nyquist, da konzeptionell ähnlich zu anderen wichtigen Arbeiten.



Zwei Widerstände $R_I = R_{II} = R$ mit gleicher Temperatur T, verbunden durch ideal leitende Drähte (R_L = 0) der Länge L

Gemäß T führen Atome/Moleküle innerhalb der Widerstände R **ungeordnete Wärmebewegungen** aus. Durch Wechselwirkung („Stöße") kommt es bei den freien Ladungsträgern (meist: Elektronen) zu statistischen Verschiebungen ihrer Ladungsschwerpunkte.

⇒ Zwischen Enden eines jeden Widerstands: schnell fluktuierende Spannung $\boldsymbol{U_R(t)}$ **, Rauschspannung**

Rauschspannung an R_I führt im Kreis zum Strom $I_{R_I} = U_{R_I} / 2R$.

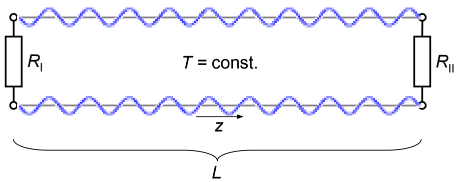
Erzeugt in R_{II} Joule'sche Wärmeleistung $P_{II} = I^2 \cdot R$.

Wegen 2. Hauptsatz der Thermodynamik $P_{II} = P_I$.

Gleiche Leistung $P_{\Delta\upsilon\,II} = P_{\Delta\upsilon\,I}$ muss auch für jedes Frequenzintervall $\Delta\upsilon$ gelten.

⇒ Beide Widerstände senden (im Zeitmittel) Wellen gleicher Amplitude aus.

⇒ Entlang der ideal leitenden Drähte bilden sich stehende Wellen aus.



$\Rightarrow \Delta n = \frac{2L}{v} \cdot \Delta\nu$ d.h. in jedem gleich großen Frequenzintervall $\Delta\upsilon$ gibt es gleich viele Schwingungsformen Δn.

$\Rightarrow$ für „normale" Frequenzen ($h\upsilon \ll k_B T$) gilt:

$$\overline{P_\nu} \propto \Delta\nu \qquad , \overline{P_\nu} \text{ - mittlere Rauschleistung}$$
$$\cong \Delta\nu \cdot k_B T$$

Außerdem gilt: $\overline{P_\nu} = \overline{I_R^{\,2}} \cdot R = \overline{U_R^{\,2}} / 4R$

$\Rightarrow$ Nyquist-Beziehung: $\boxed{\sqrt{\overline{U_R^{\,2}}} = \sqrt{4\, k_B T \cdot R \cdot \Delta\nu}}$ für $h\nu \ll k_B T$

Beispiel: $T = 300\,\text{K},\ R = 1\,\text{M}\Omega,\ \Delta\nu = 1\,\text{MHz}$:

$$\sqrt{\overline{U_R^{\,2}}} \approx \sqrt{4 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{-21}\,\text{Ws} \cdot 10^6\,\Omega \cdot 10^6/\text{s}}$$
$$\approx 0{,}13\,\text{mV}$$

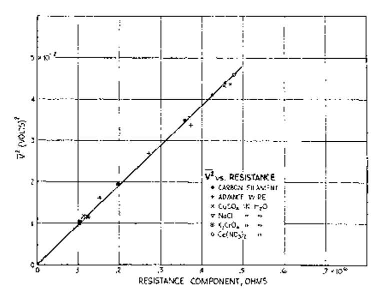


Fig. 4. Voltage-squared vs. resistance component for various kinds of conductors.

$\Rightarrow \overline{U_R^{\,2}} \propto R$,
gilt unabhängig von
Art des Widerstands (!)

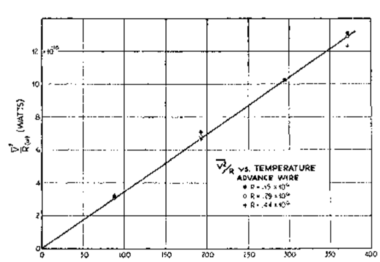
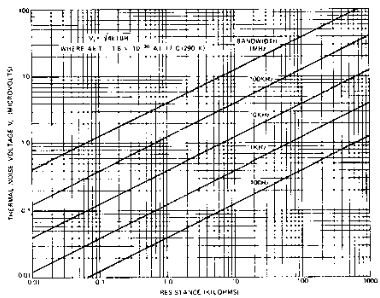


Fig. 6. Apparent power vs. temperature, for Advance wire resistances.

Beide Abbildungen aus:
J.B. Johnson, Phys. Rev. **32** (1928) 97



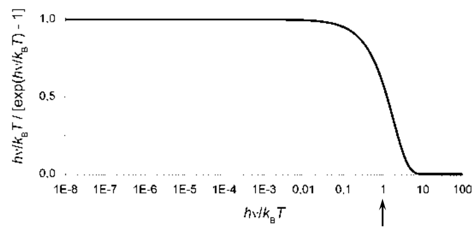
Thermal noise voltage as a function of resistance and bandwidth.

Aber:
$\overline{P_\nu} \propto \Delta\nu$ kann wegen Energiesatz nicht für beliebig große Bandbreiten (Frequenzintervalle) gelten.

Die stehenden Wellen müssen wie Photonen im thermodynamischen Gleichgewicht der **Bose-Einstein-Statistik** genügen:

$$\overline{N} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$, $\overline{N}$ - mittlere Besetzungszahl

$\Rightarrow$ Die Funktion $\dfrac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$ ist proportional zur spektralen Rauschleistung:



$\approx$ 6 THz (bei T = 300 K)

1.2 Schrotrauschen

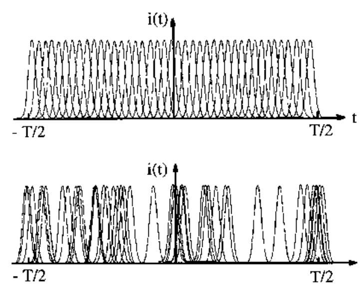
Diskrete Natur der Ladung (von Elektronen, Ionen etc.)

$\Rightarrow$ Auch bei kontinuierlichem „Gleichstrom“: statistische Schwankungen in der Anzahl der momentan „fließenden“ Ladungen

$$I(t) = I_0 + I_{N-\overline{N}}(t)$$

Meist unkorrelierte Prozesse: Emission in Röhren, Generation/Rekombination in Halbleitern u. Ä.

$$I(t) = e_0 \cdot N(t)/\tau \quad \text{, mit } \tau - \text{Laufzeit}$$



Bei N unabhängigen Einzelprozessen (z.B. radioaktiven Zerfällen) beträgt der Fehler $\sqrt{N}$.

$\Rightarrow$ In Analogie: Schottky-Beziehung $\boxed{\sqrt{\overline{I_S^2}} = \sqrt{2 \cdot e_0 \cdot I_0 \cdot \Delta\nu}}$ für $\nu \ll \dfrac{1}{2\pi\,\tau}$

Auch hier „weißes“ Rauschen nur unterhalb υ_{max}

Beispiel: $I_0 = 1\,\text{pA},\ \Delta\nu = 1\,\text{MHz}$:

$$\sqrt{\overline{I_S^2}} \approx \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 10^{-12}\,\text{A} \cdot 10^{6}/\text{s}}$$
$$\approx 0{,}6\,\text{pA}$$

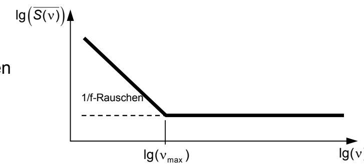
1.3 1/f-Rauschen

Bei niedrigen Frequenzen:

Zusätzliche Prozesse, die vielfältige, z.T. sehr komplizierte Ursachen haben.

$$\frac{\Delta \overline{P_\nu}}{\Delta \nu} \equiv \overline{S(\nu)}$$ – mittlere spektrale Rauschleistung

$$\boxed{\overline{S(\nu)} \propto 1/\nu}$$ – 1/f-Rauschen, „rosa“ Rauschen



Beispiele:

- in HL-Dioden, Bipolar- und Feldeffekt-Transistoren: fluktuierende Umladung von Oberflächenzuständen
- niederfrequentes Stromrauschen in Widerstandsschichten (z.B. in Kohlewiderständen)
- 1/f-Flussrauschen in SQUIDs (Random-Telegraph-Noise)

Wegen Energiesatz:

$$\overline{S(\nu = 0)} < \infty$$

Weitere Rauschquellen:

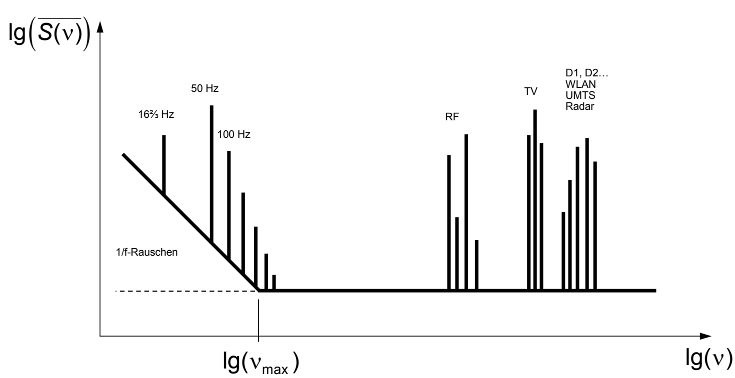
- Mikrofonie
- Digitalisierungsrauschen

2. Methoden zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses

Definition:

$$\boxed{\frac{\overline{P_S}}{\overline{P_N}} = \frac{\text{mittlere Signalleistung}}{\text{mittlere Rauschleistung}} \equiv \frac{S}{N} = \text{SNR}}$$

- Signal-(zu)-Rausch-Verhältnis
  (signal to noise ratio)
- Rauschabstand



2.1 Vermeiden von Störungen

- große Abstände zu Störquellen
- Einkoppeln von Störsignalen vermeiden (kapazitive, induktive Einkopplung)
  - Twisted Pair (Einstrahlung [auch Abstrahlung] minimieren)
  - BNC-Kabel, Abschirmleitung (low level) erden ● BNC-Kabel zeigen
  - sternförmig erden (Erdschleifen vermeiden)
  - elektrische/magnetische Abschirmkammern (Faradayscher Käfig - z.B. bei PTB „Uhrenraum", Kryostaten für mK-Bereich, oft: metallische Gehäuse
    magnet. Abschirm. - z.B. μ-Metall [weichmagnet.] bei HREELS)
  - Mikrofonie-, Schwingungsdämpfung
- Vermeiden von
  - Kontaktpotenzialen
  - Thermospannungen
  - Wirbelströmen
- Batterieversorgung bei Netz- und Messgeräten

2.2 Minimieren des Rauschens

- geeignete Messfrequenz wählen (z.B. wegen 1/f-Rauschen)
- zu kleine Ströme vermeiden (nicht nur wegen Schrotrauschen)

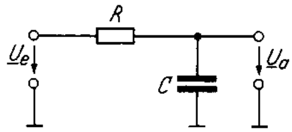
  ⇒ Vorverstärker in die Nähe der Signalquelle
- Niederohmige Signalquellen/Verstärker (wegen Widerstandsrauschen)
- Trafo-Kopplung (fast rauschfreie Verstärkung um bis zu Faktor 100)
- geeignete Anpassung der Nachweiselektronik (bezügl. Dynamik, Bandbreite, Drift usw.)
- tiefe Temperaturen (wenn möglich - z.B. Radioteleskop Effelsberg: Empfänger He-gekühlt
  FP-Versuch 4.9: Peltier-Kühlung für Photomultiplier)
- Verringern der Bandbreite (Frequenz-Filter einbauen)

Wichtig:

Für alle elektronischen Geräte gilt

$$\boxed{\text{Rauschzahl} \quad F \equiv \frac{(S/N)_{\text{Eing.}}}{(S/N)_{\text{Ausg.}}} \geq 1}$$

Einfaches Tiefpass-Filter



$$U_e = I \cdot \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right)$$

$$U_a = I \cdot \frac{1}{i\omega C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega RC + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}}$$

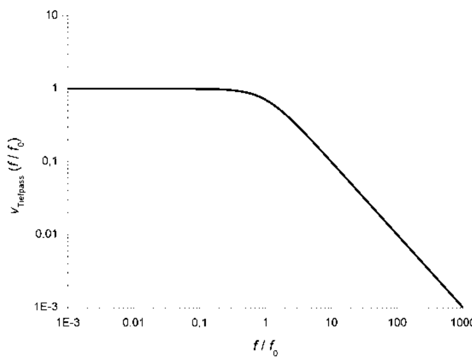
$RC = \tau$ – Zeitkonstante

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{für } \omega = \frac{1}{\tau}$$

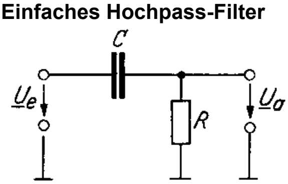
$$v \approx \frac{1}{\omega\tau} \quad \text{für } \omega \gg \frac{1}{\tau}$$

$$v \approx 1 \quad \text{für } \omega \ll \frac{1}{\tau}$$

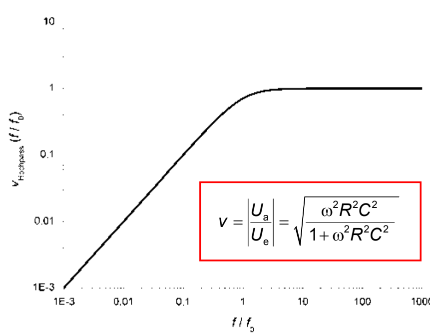
Wichtig beim Glätten von verrauschten Gleichspannungen



Einfaches Hochpass-Filter



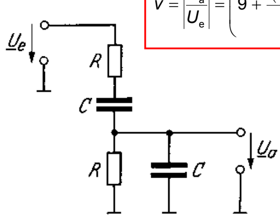
Wichtig beim Unterdrücken von Gleichspannungsanteilen

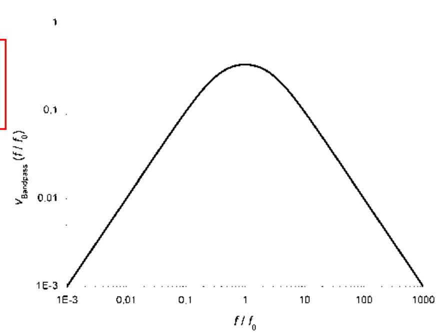


$$\boxed{v = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Einfaches Bandpass-Filter

$$\boxed{v = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \left(9 + \frac{\left(\omega^2 R^2 C^2 - 1\right)^2}{\omega^2 R^2 C^2} \right)^{-1/2}}$$



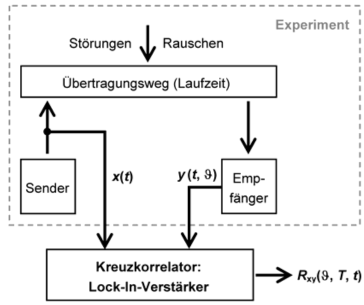


3. Lock-In-Messtechnik

Kreuzkorrelationsfunktion

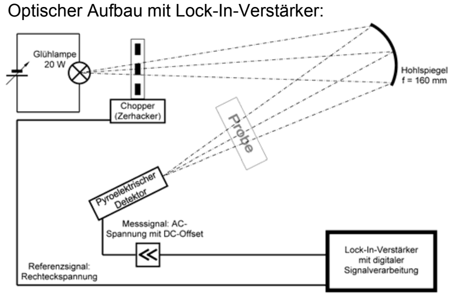
$$\boxed{R_{xy}(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot y(t+\vartheta)\,dt}\quad , x(t) \text{ und } y(t) \text{ reell}$$

Praktische Anwendung:



Lock-In-Verstärker,
Phasenempfindlicher Gleichrichter

Optischer Aufbau mit Lock-In-Verstärker:

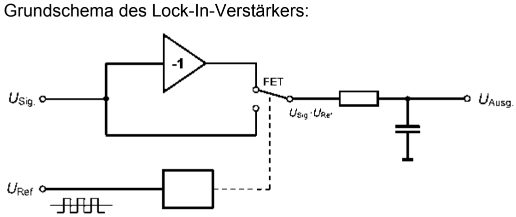


3.1 Grundkomponenten

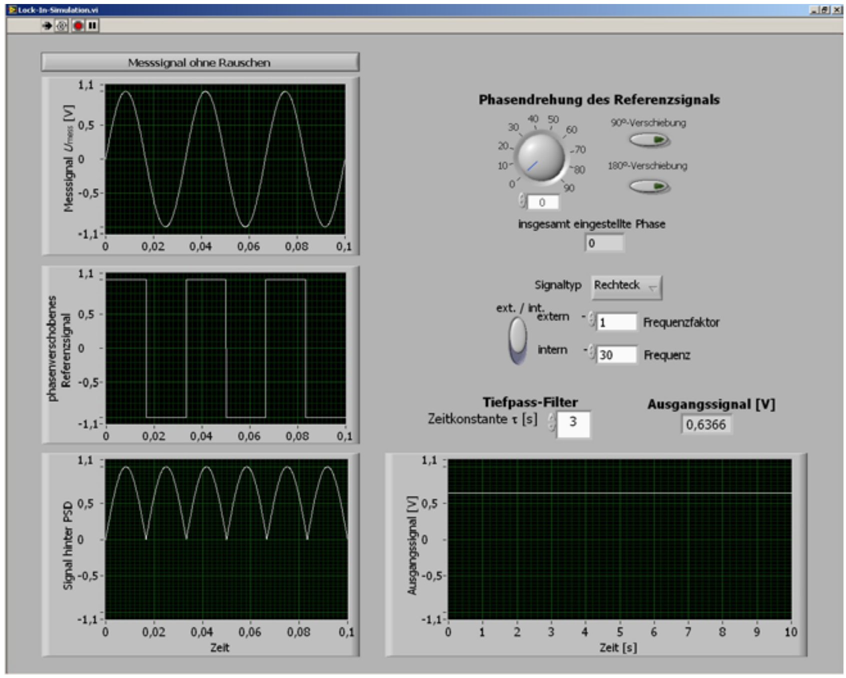
- Multiplikator – Mischer, Phase Sensitive Detector (**PSD**)
  bei analogem Lock-In-Verstärker mit rechteckigem $U_{Ref.}$:
  periodisches Umschalten zwischen $+U_{Sig.}$ und $-U_{Sig.}$
  $\Rightarrow$ (günstigenfalls) pulsierende Gleichspannung

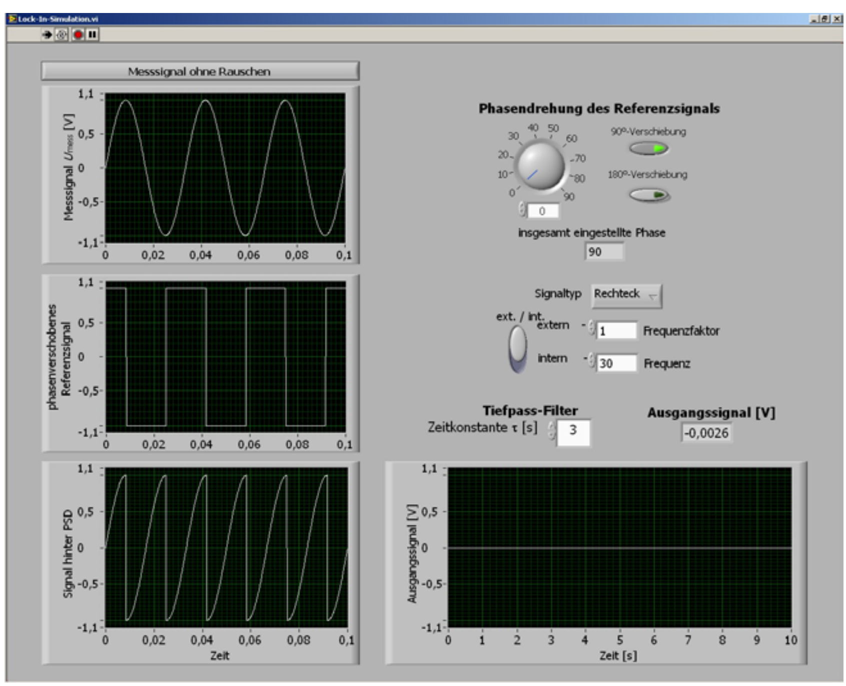
- Integrator – Tiefpass
  wirkt als Gleichrichter, aber: Integrationszeit $T < \infty$
  bei analogem Lock-In-Verstärker mit RC-Glied:
  $\tau = RC$ - Zeitkonstante, Integrationszeit

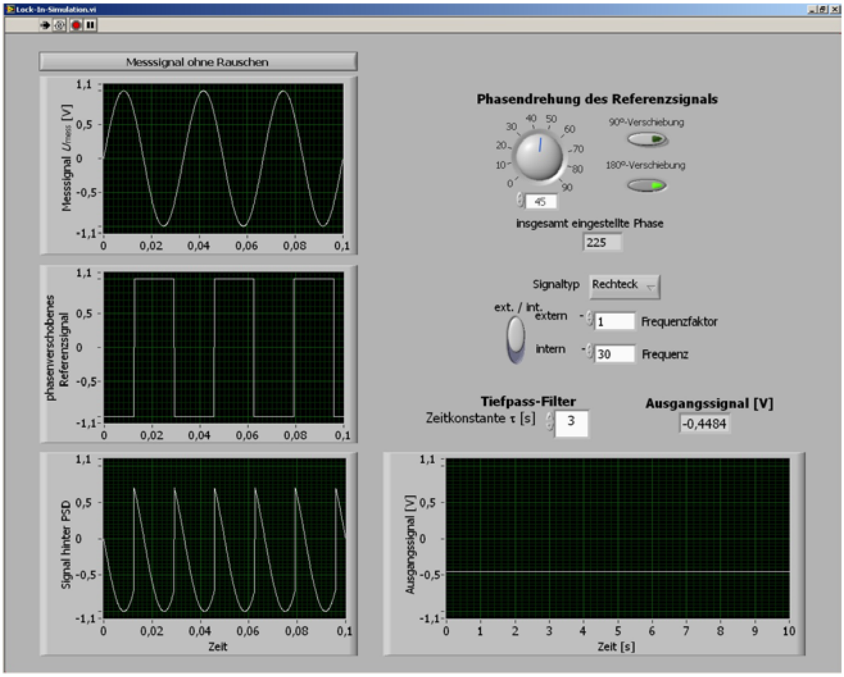
Grundschema des Lock-In-Verstärkers:



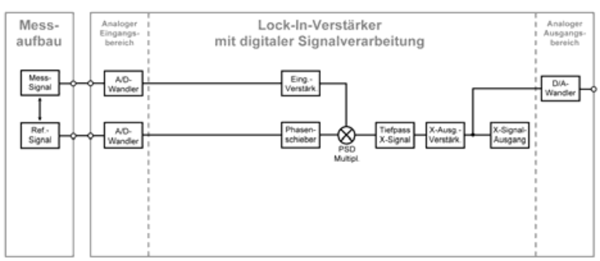
● Lock-In-Simulation: rechteckiges $U_{Ref.}(t)$, $\omega_{Ref.} = \omega_{Sig.}$


Lock-In-Simulation.vi
Messsignal ohne Rauschen
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
0
Signaltyp
Rechteck
ext. / int.
extern
intern
Frequenzfaktor
Frequenz
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
3
Ausgangssignal [V]
0,6366
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]


Lock-In-Simulation.vi
Messsignal ohne Rauschen
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
90
Signaltyp
Rechteck
ext. / int.
extern
intern
Frequenzfaktor
Frequenz
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
3
Ausgangssignal [V]
-0,0026
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]



3.2 Lock-In-Verstärker mit digitaler Signalverarbeitung



- **Numerische Multiplikation**

sinusförmiges Referenz-Signal (üblich): $U_{Ref.} = \hat{U}_{Ref.} \cdot \sin(\omega_{Ref.}\, t + \varphi_{Ref.})$

nur eine Fourier-Komponente des Mess-Signals: $U_{Sig.} = \hat{U}_{Sig.} \cdot \sin(\omega_{Sig.}\, t + \varphi_{Sig.})$

Produkt:

$$\boxed{U_{Sig.} \cdot U_{Ref.} = \frac{1}{2} \hat{U}_{Sig.} \hat{U}_{Ref.} \cdot \left\{ \cos\left[(\omega_{Sig.} - \omega_{Ref.})t + \Delta\varphi \right] - \cos\left[(\omega_{Sig.} + \omega_{Ref.})t + \varphi_{Sig.} + \varphi_{Ref.} \right] \right\}}$$

für $\omega_{Sig.} = \omega_{Ref.}$ nach Tiefpassfilterung ($\tau \to \infty$):

$$\boxed{U_{Sig.} \cdot U_{Ref.} = \frac{1}{2} \hat{U}_{Sig.} \hat{U}_{Ref.} \cdot \cos(\Delta\varphi)}$$

3.3 Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses

Weißes Rauschen: Fourier-Komponenten aller Frequenzen in $U_{Sig.}(t)$

zur Erinnerung Signal hinter PSD:

$$\boxed{U_{Sig.}\cdot U_{Ref.} = \frac{1}{2}\hat{U}_{Sig.}\hat{U}_{Ref.}\cdot\left\{\cos\left[(\omega_{Sig.}-\omega_{Ref.})t-\Delta\varphi\right] - \cancel{\cos\left[(\omega_{Sig.}+\omega_{Ref.})t+\varphi_{Sig.}+\varphi_{Ref.}\right]}\right\}}$$

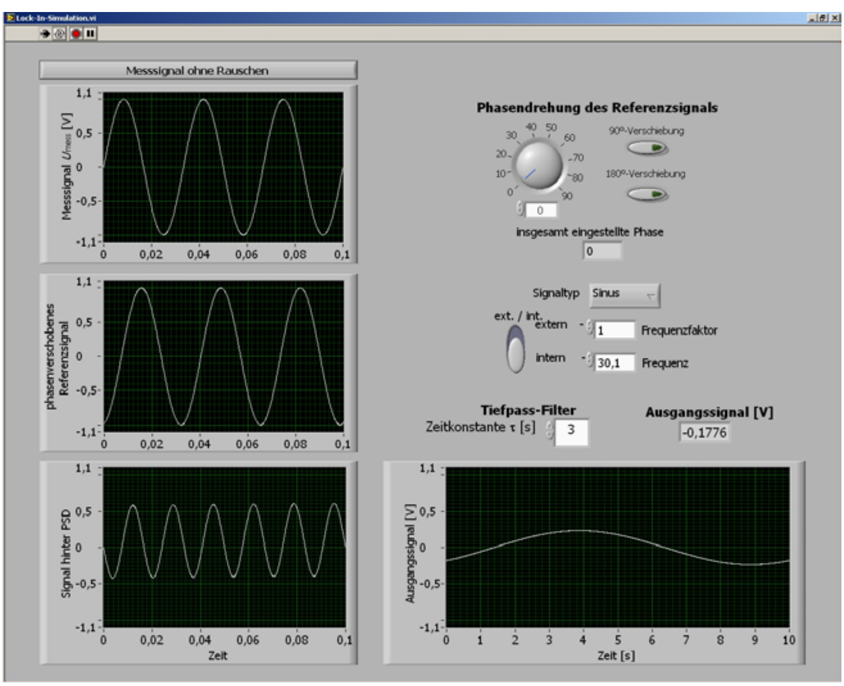
$\Rightarrow$ Schwebungsterm kritisch, wenn τ nicht größer als $(\Delta\omega)^{-1}$ ist.

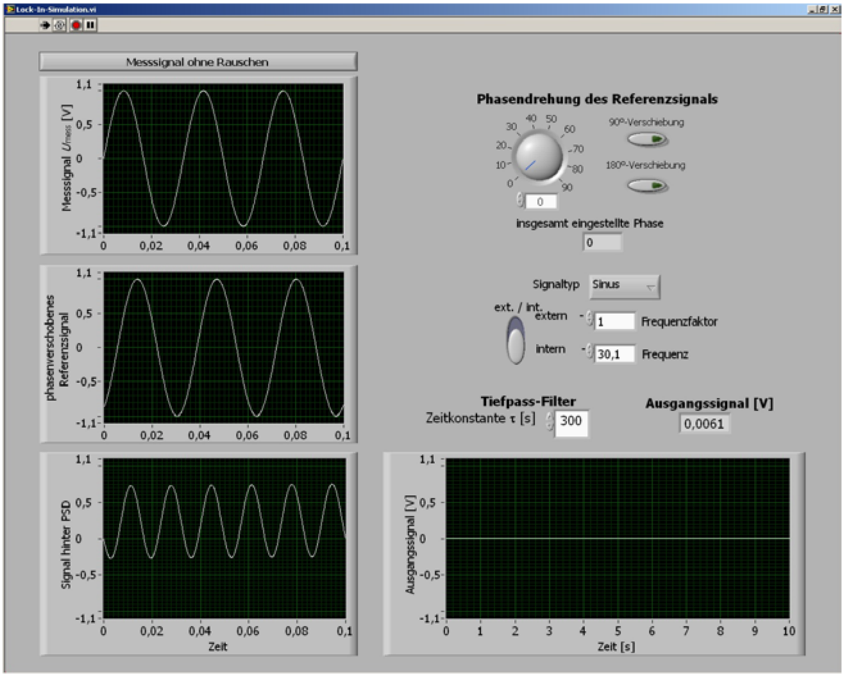
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rauschanteile nahe } \omega_{Sig.} \text{ mit genügend großer Integrationszeit unterdrücken}}$

- Lock-In-Simulation: sinusförmiges $U_{Ref.}(t)$, $\omega_{Ref.}\approx\omega_{Sig.}$, Variation von τ
  Signal + 10 V Rauschamplit., $\omega_{Ref.}=\omega_{Sig.}$, Var. v. τ

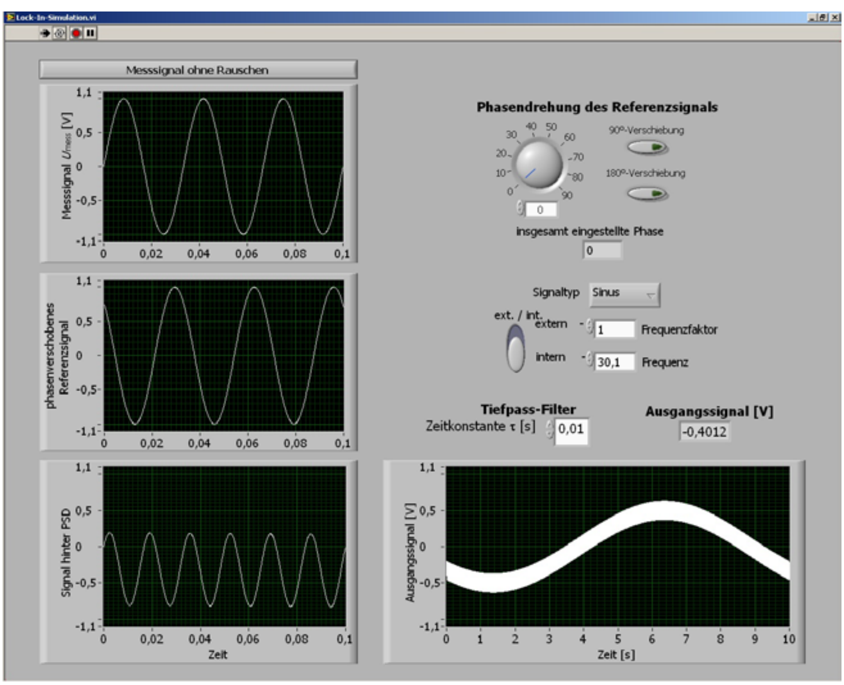
Mit guten Lock-In-Verstärkern möglich:

$$\boxed{\underline{\text{Verbesserung}}\text{ des SNR:}\quad \text{SNI} \equiv \frac{(S/N)_{Ausg.}}{(S/N)_{Eing.}}\quad \text{bis zu } 10^5}$$

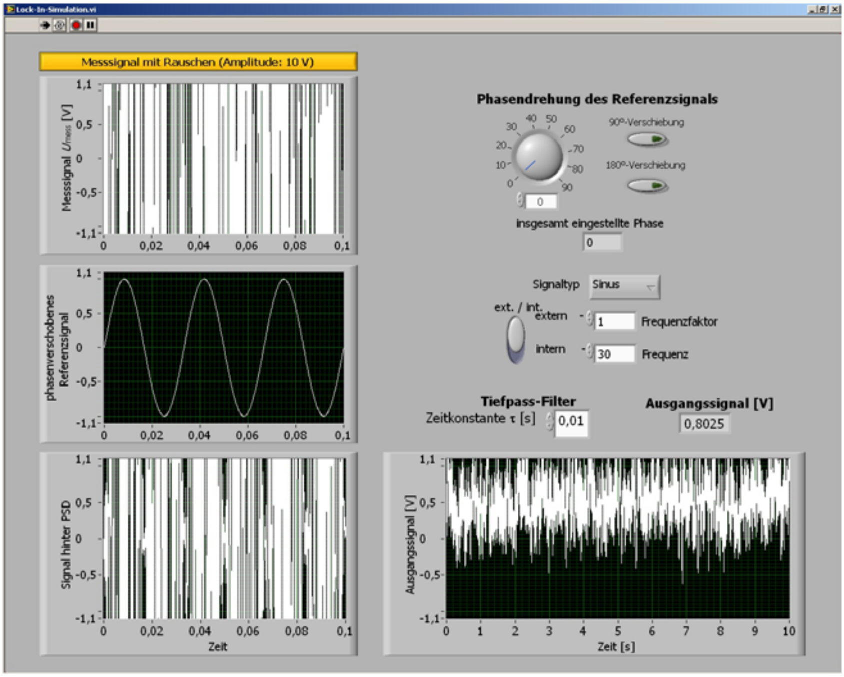


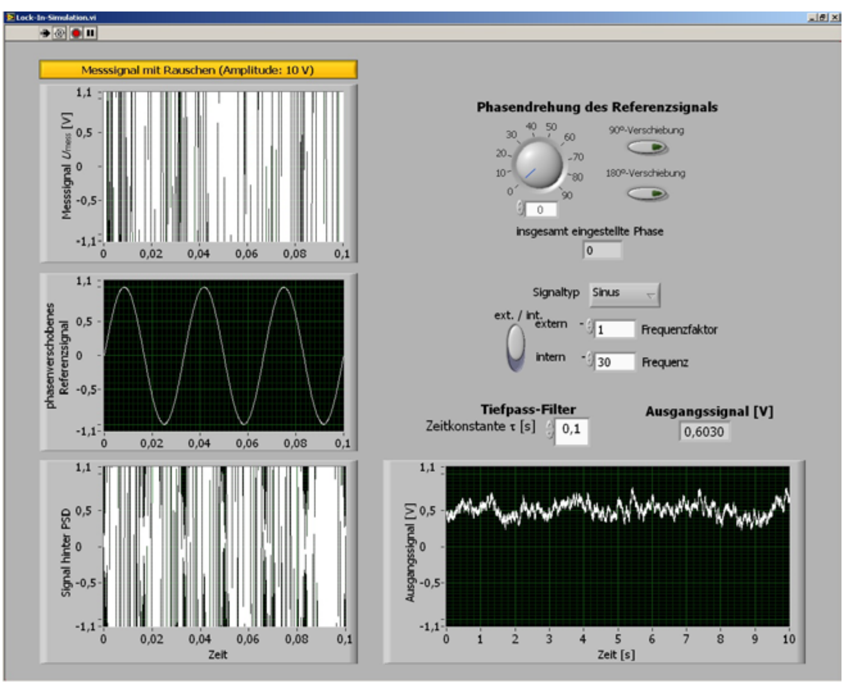


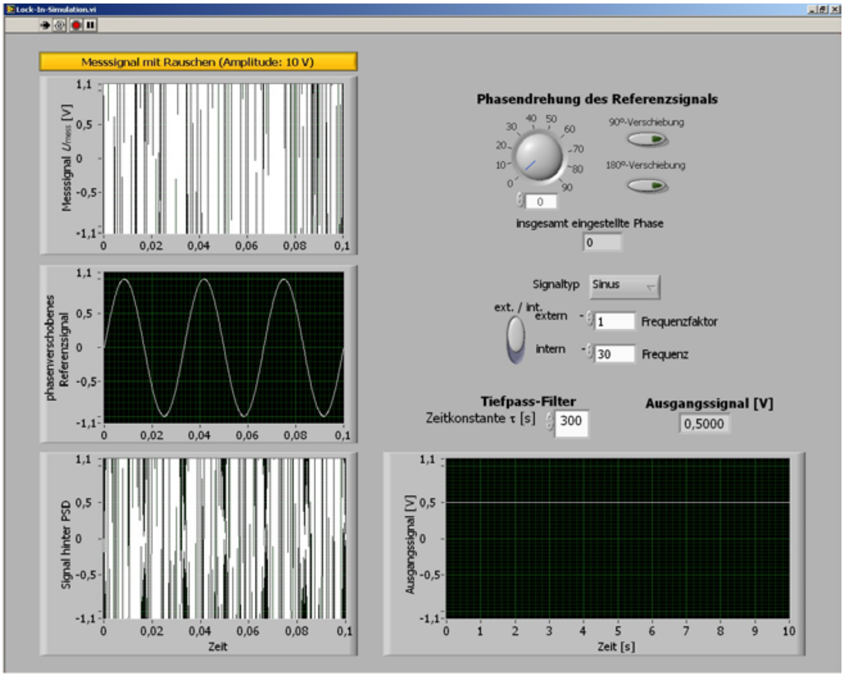
Lock-In-Simulation.vi
Messsignal ohne Rauschen
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
Signaltyp
Sinus
ext. / int.
extern
intern
Frequenzfaktor
Frequenz
30,1
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
300
Ausgangssignal [V]
0,0061
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]



Lock-In-Simulation.vi
Messsignal ohne Rauschen
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
Signaltyp
Sinus
ext. / int.
extern
intern
Frequenzfaktor
Frequenz
30,1
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
0,01
Ausgangssignal [V]
-0,4012
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]


Lock-In-Simulation.vi
Messsignal mit Rauschen (Amplitude: 10 V)
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
0
Signaltyp
Sinus
ext. / int.
extern
intern
1
Frequenzfaktor
30
Frequenz
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
0,01
Ausgangssignal [V]
0,8025
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]


Lock-In-Simulation.vi
Messsignal mit Rauschen (Amplitude: 10 V)
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
0
Signaltyp
Sinus
ext. / int.
extern
intern
1
Frequenzfaktor
30
Frequenz
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
0,1
Ausgangssignal [V]
0,6030
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]


Lock-In-Simulation.vi
Messsignal mit Rauschen (Amplitude: 10 V)
Messsignal U_{mess} [V]
phasenverschobenes Referenzsignal
Signal hinter PSD
Zeit
Phasendrehung des Referenzsignals
90°-Verschiebung
180°-Verschiebung
insgesamt eingestellte Phase
Signaltyp
Sinus
ext. / int.
extern
intern
Frequenzfaktor
Frequenz
Tiefpass-Filter
Zeitkonstante τ [s]
300
Ausgangssignal [V]
0,5000
Ausgangssignal [V]
Zeit [s]