Kraft, Masse, Trägheit

Um einen Körper in Bewegung zu setzen, also zu be-schleunigen, muss man „an ihm ziehen“. Die Ursache der Beschleunigung nennt man Kraft.
Kraft und Beschleunigung sind einander proportional:

$$\vec{F} \approx \vec{a}$$

Wir können leicht feststellen, dass die Größe des zu be-schleunigenden Körpers (die Trägheit) eine Rolle spielt. Diese Eigenschaft wird als Proportionalitätskonstante der obigen Beziehung berücksichtigt:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

Galilei behauptete, dass sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiter bewegt, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt.
Newton formulierte daraus in seinem Buch „Principia“ die „Drei Gesetze der Bewegung“ (Newtonsche Axiome)

Das erste Newtonsche Axiom lautet:

> Jeder Körper verharrt so lange im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wie keine Kraft auf ihn einwirkt.

Isaac Newton (1642–1727)

Die Tendenz eines Körpers, den Bewegungszustand beizubehalten, nennt man Trägheit, das erste Newtonsche Axiom nennt man daher auch Trägheitsgesetz

Das erste Newtonsche Axiom gilt nur in einem nicht beschleunigten Bezugssystem. Ein solches Systeme nennt man Inertialsystem.
In einem beschleunigten Bezugssystem gilt das Trägheitsgesetz nicht.

Ein Maß für die Trägheit ist die Masse.
Die Einheit der Masse ist das Kilogramm (kg).

Dann gilt das zweite Newtonsche Axiom:

Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn einwirkenden Kraft und umgekehrt proportional zu seiner Masse. Die Richtung der Beschleunigung ist die Richtung der auf den Körper wirkenden Kraft

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \qquad \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

Kraft = Masse x Beschleunigung

Die Einheit der Kraft ergibt sich aus den Basisgrößen zu:

1 Newton (N) = 1 Kilogramm (kg) 1 $\dfrac{Meter}{Sekunde^2} = 1kg\,\dfrac{m}{s^2}$

$$\boxed{1N = 1kg \cdot 1\frac{m}{s^2}}$$

Häufig benutzt wird auch: *1 kilopond (kp) = 9,8 Newton (N)*

Beispiele:

Beispiel 1: Welche Kraft ist erforderlich, um a) ein Auto mit der Masse m = 1000 kg und b) einen Apfel mit der Masse m = 200 g mit ½ g zu beschleunigen?

Die Beschleunigung beträgt

$$a = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) \approx 5\frac{m}{s^2}$$

Wir wenden das zweite Newtonsche Axiom an:

a) $$F = m \cdot a = 1000kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = 5000N$$

b) $$F = m \cdot a = 0{,}200kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = 1N$$

Beispiel 2: Welche konstante Kraft ist erforderlich, um ein Auto mit der Masse m = 1.500 kg von einer Geschwindigkeit von 100 km/h innerhalb von 55 m zum Stehen zu bringen?

Wir hatten für die Geschwindigkeit v als Funktion von a und x gefunden

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

Aufgelöst nach a ergibt:

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2(x - x_o)} = \frac{0 - (28\,m/s)^2}{2 \cdot 55m} = -7{,}1\frac{m}{s^2}$$

Die erforderliche Kraft erhält man aus dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$F = m \cdot a = 1500kg \cdot (-7{,}1\frac{m}{s^2}) = -1{,}1 \cdot 10^4\,N$$

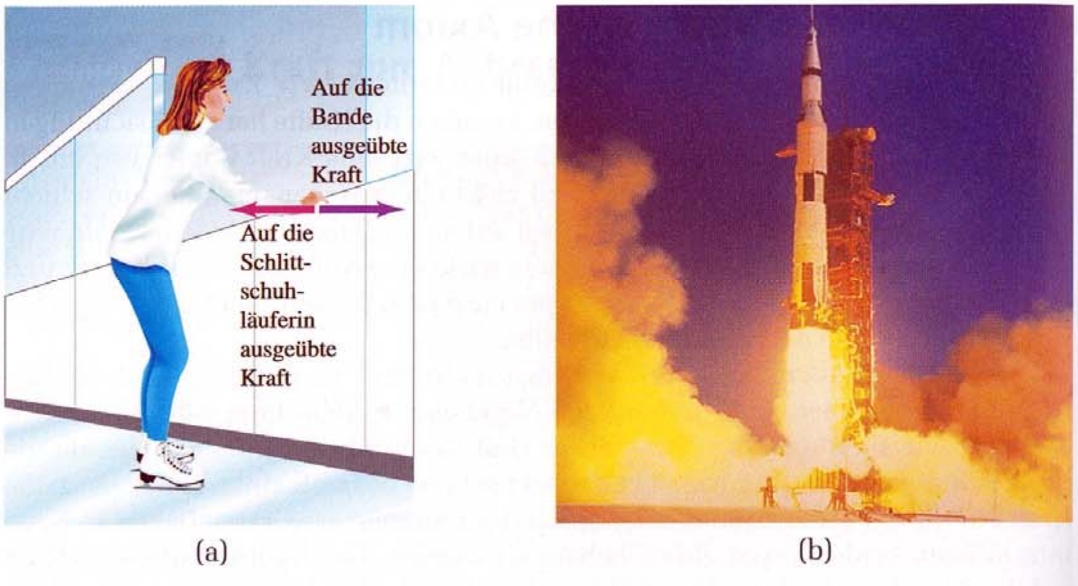
Die Richtung der Kraft muss der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet sein. Dies wird durch das Minuszeichen ausgedrückt.

Das dritte Newtonsche Axiom:

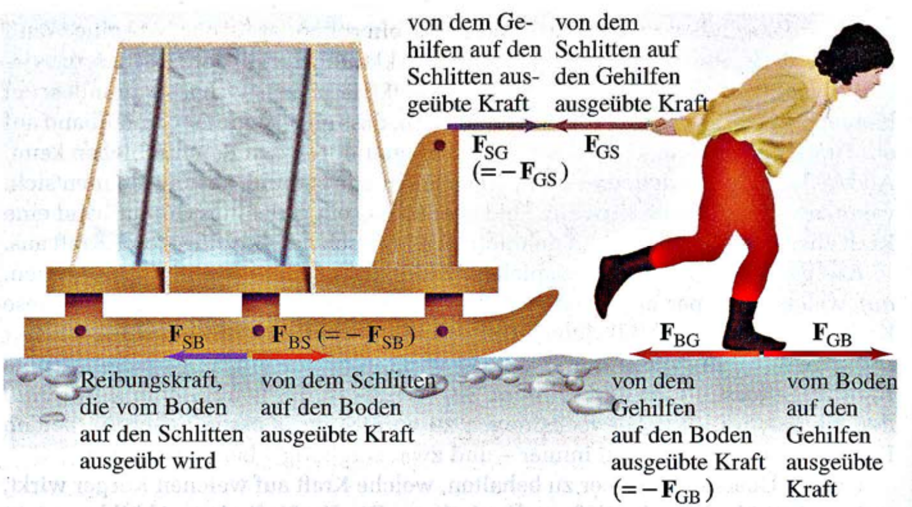
Wenn ein Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft ausübt, übt auch der zweite Körper eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf der ersten Körper aus.

actio = reactio

Zwei Beispiele für das dritte Newton'sche Axiom. (a) Wenn eine Schlittschuhläuferin gegen die Bande drückt, drückt die Bande zurück und diese Kraft veranlasst die Läuferin, sich von der Bande weg zu bewegen. (b) Start einer Rakete. Das Triebwerk der Rakete stößt die Gase aus und die Gase üben eine gleich große und entgegengerichtete Kraft zurück auf die Rakete aus und beschleunigen sie auf diese Weise.



Der 17jährige Michelangelo hat einen schönen Marmorblock für seine nächste Skulptur ausgesucht. Hier ist sein Gehilfe abgebildet, der den Block gerade auf einem Schlitten aus dem Steinbruch zieht. Die auf den Gehilfen wirkenden Kräfte sind als magentafarbene Pfeile dargestellt. Die auf den Schlitten wirkenden Kräfte sind als violette Pfeile, die auf den Boden wirkenden Kräfte als orangefarbene Pfeile dargestellt. Kräfte und Gegenkräfte, die gleich groß, aber entgegengerichtet sind, haben dieselben tiefgestellten Indizes, aber in umgekehrter Reihenfolge (wie z. B. $\mathbf{F}_{BG}$ und $\mathbf{F}_{GB}$) und sind farblich unterschiedlich dargestellt, da sie auf unterschiedliche Körper wirken. (Es sind nur horizontale Kräfte abgebildet.)



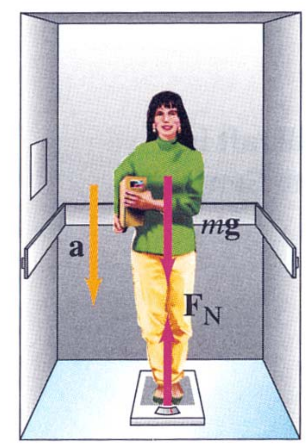
Gravitationskraft (Gewicht)

Körper, die in der Nähe der Erdoberfläche frei fallen, werden alle mit derselben Beschleunigung g beschleunigt. Die Kraft, die diese Beschleunigung verursacht, wird Gravitationskraft genannt. Der Betrag der Gravitationskraft wird als ihr Gewicht bezeichnet.

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$

Die Kraft ist auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet.

Beispiel 1: Eine Frau mit der Masse m = 65 kg fährt mit einem Aufzug nach unten. Der Aufzug beschleunigt beim Verlassen des Stockwerks kurz mit 0,2 g. a) Wie groß ist das Gewicht der Frau, wenn sie während dieser Beschleunigung auf einer Waage steht? b) Was zeigt die Waage an, wenn der Aufzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,0 m/s nach unten fährt?



a) Die Kraft, die die Person auf die Waage ausübt, ist identisch mit der Kraft F_N (Gegenkraft), wir erhalten sie aus dem zweiten Newtonschen Axiom (Die Richtung der Beschleunigung sei die pos. Richtung):

$$\sum F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad mg - F_N = 0{,}2mg \quad \Rightarrow \quad F_N = mg - 0{,}2mg = 0{,}8mg$$

Die auf die Frau wirkende Gravitationskraft (Gewicht) beträgt immer noch

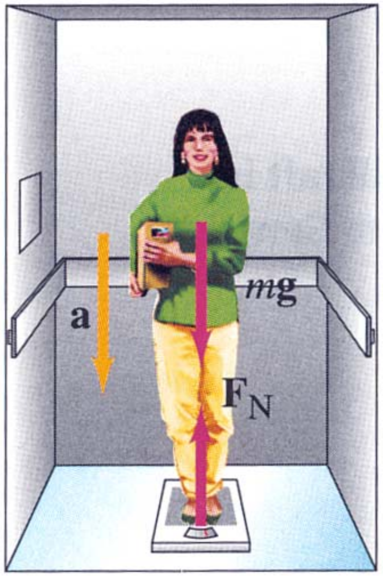
$$F_G = m \cdot g = 65kg \cdot 9{,}8\, m/s^2 = 640\,N$$

Die Waage zeigt jedoch die Kraft von *0,8 mg* an, d.h. eine Masse von

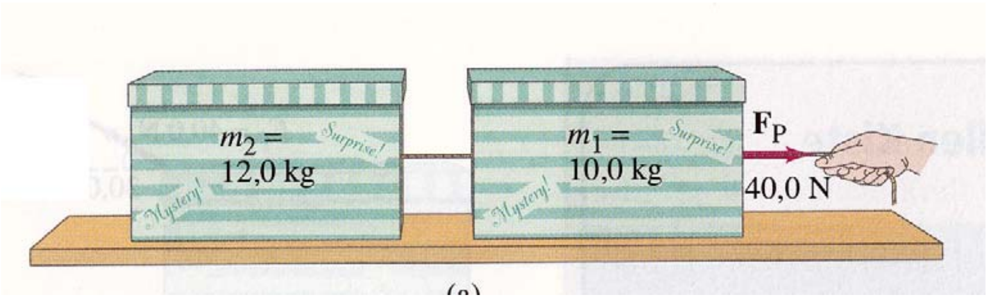
$$0{,}8m = 52kg$$

b) Die Beschleunigung ist *a* = *0*. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist $mg - F_N = 0$ und $F_N = m \cdot g$

Die Waage zeigt die richtige Masse von *m* = *65 kg* an.



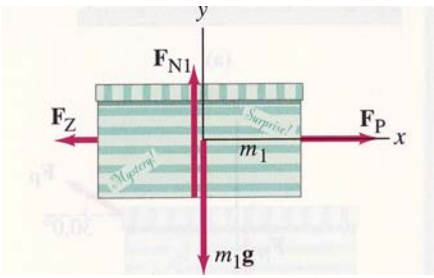
Beispiel 2: Zwei Kisten sind durch ein leichtes (masseloses) Seil miteinander verbunden und ruhen auf einem glatten Tisch. Die Kisten haben Massen von m_1 = *10 kg* (Kiste 1) und m_2 = *12 kg* (Kiste 2). Auf die Kiste 1 wird eine horizontale Kraft von F_p = *40 N* ausgeübt. a) Wie groß ist die Beschleunigung jeder Kiste und b) wie groß ist die Zugkraft in dem Seil?



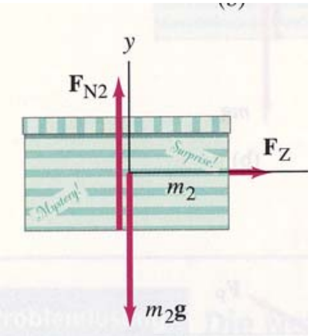
a) Die Kraft F_p wirkt auf Kiste 1, diese übt eine Kraft F_z auf das Seil aus, das Seil übt eine gleich große Kraft auf die Kiste 1 aus. Das Seil übt die Kraft F_z auf die Kiste 2 aus.

Wir wenden $\sum F_x = m \cdot a_x$ auf die Kiste 1 an:

$$\sum F_x = F_p - F_z = m_1 \cdot a_1$$



Kiste 1



Kiste 2

Auf Kiste 2 wirkt F_z, so dass gilt: $\sum F_x = F_z = m_2 \cdot a_2$

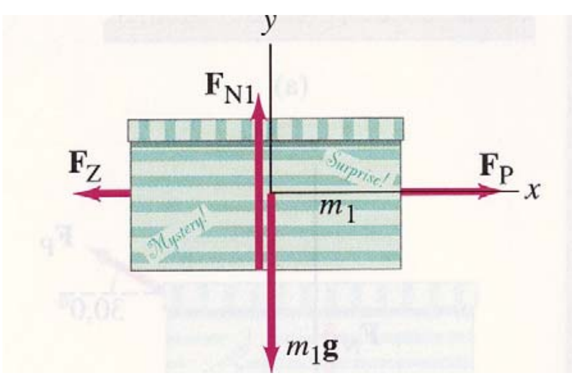
a) Da beide Kisten verbunden sind, haben sie die selbe Beschleunigung. Somit ist $a_1 = a_2 = a$ und wir erhalten (Addition der beiden Gleichungen):

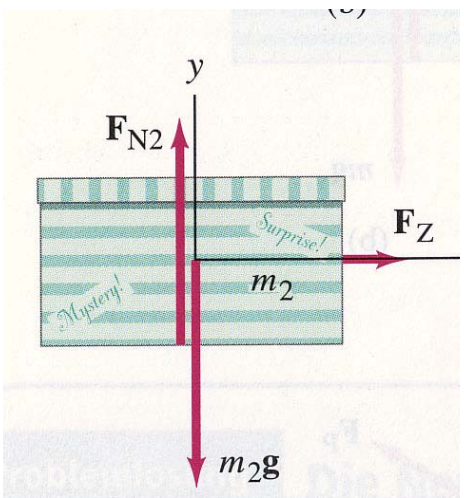
$$(m_1 + m_2)a = F_p - F_z + F_z = F_p$$

oder:

$$a = \frac{F_p}{(m_1 + m_2)} = \frac{40{,}0N}{22{,}0kg} = 1{,}82\, m/s^2$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir für eine einzige Masse mit *m=22 kg*.

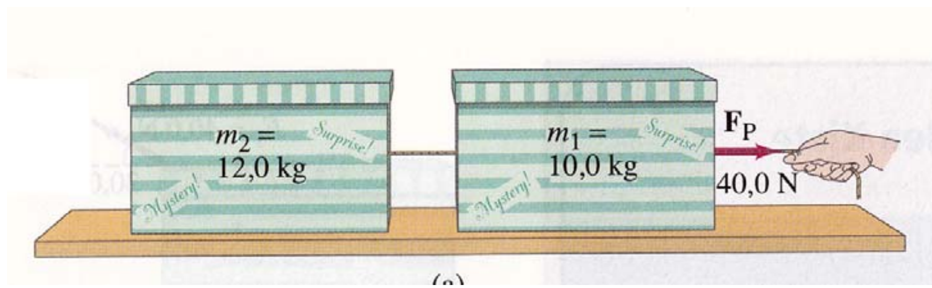


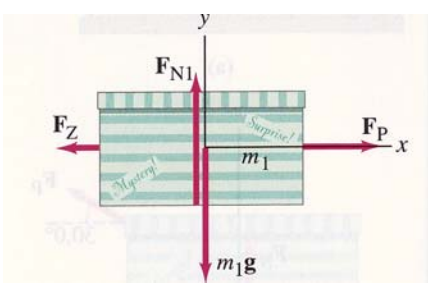


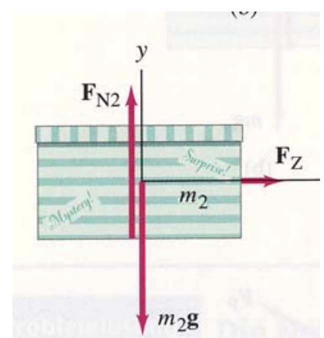
b) Aus der Gleichung für Kiste 2 ($F_z = m_2 \cdot a_2$)ergibt sich für die Zugkraft im Seil:

$$F_z = m_2 \cdot a = (12{,}0kg)(1{,}82\, m/s^2) = 21{,}8N$$

Somit ist F_z wie erwartet kleiner als F_p *(= 40 N),* da F_z nur m_2 beschleunigt.



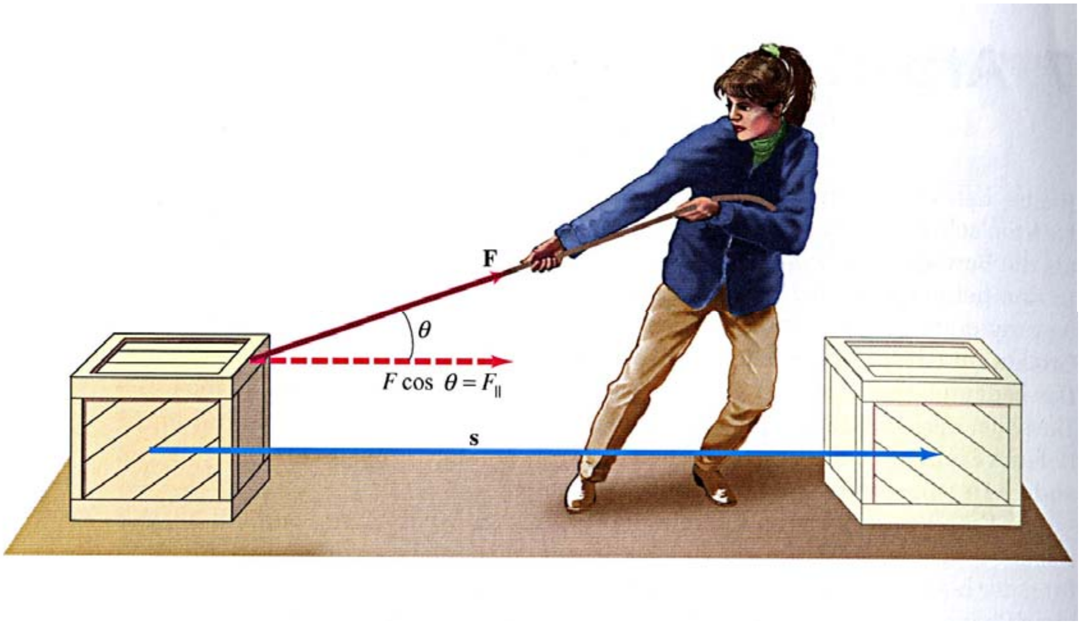




Arbeit, Leistung, Energie

Die an einem Körper durch eine konstante Kraft verrichtete Arbeit ist definiert als das Produkt aus dem Betrag des Weges und der Komponente der Kraft parallel zum Weg: $W = F_{\parallel} \cdot s$

Wir können auch schreiben: $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$



Die Arbeit ist das Punkt-Produkt aus Kraft und Weg:

$$\boxed{A = \vec{F} \bullet \vec{s}}$$

Kraft und Weg sind Vektoren, das resultierende Punktprodukt, die Arbeit, ist folglich ein Skalar.

Die Einheit der Arbeit ist im SI-System das Joule (J) $(= 10^7 erg)$

$$\boxed{J = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$$

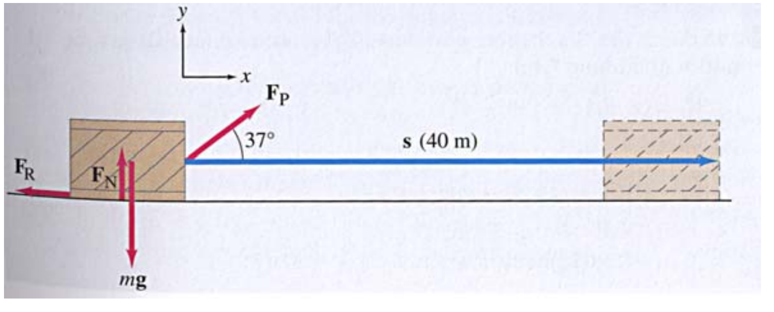
1 erg = 1 dyn 1 cm, weitere Einheiten: 1 Wattsekunde = 1 J

1 Kilopondmeter = 9,8 J

	kJ	kcal	kWh	kg SKE	kg RÖE	m^3 Erdgas
1 Kilojoule (kJ)	-	0,2388	0,000278	0,00003 4	0,000024	0,000032
1 Kilocalorie (kcal)	4,1868	-	0,001163	0,00014 3	0,0001	0,00013
1 Kilowattstunde (kWh)	3600	860	-	0,123	0,086	0,113
1 kg Steinkohleeinheit (SKE)	29308	7000	8,14	-	0,7	0,923
1 kg Rohöleinheit (RÖE)	41868	10000	11,63	1,428	-	1,319
1 m^3 Erdgas	31736	7580	8,816	1,083	0,758	-

Eine Kraft kann auf einen Körper ausgeübt werden, ohne dass Arbeit verrichtet wird.
Wird eine Last horizontal mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wird keine Arbeit verrichtet. Die ausgeübte Kraft F_p dient zur Kompensation des Gewichtes (Gewichtskraft *mg*). Längs des Weges s wird keine Kraft ausgeübt.

Beispiel: An einer Kiste verrichtete Arbeit
Eine Kiste mit einer Masse m = 50 kg wird durch eine konstante Kraft F_p = 100 N, die in einem Winkel von 37 Grad wirkt, 40 m über einen horizontalen Boden gezogen. Der Boden übt eine Reibungskraft von F_R = 50 N aus. Wie groß ist die durch jede auf die Kiste einwirkende Kraft verrichtete Arbeit und die an der Kiste verrichtete Gesamt-Arbeit?



Vier Kräfte wirken auf die Kiste:

- Die ausgeübte Kraft $\vec{F}_p$
- Die Reibungskraft $\vec{F}_R$
- Die Gewichtskraft $m \cdot \vec{g}$
- Die Normalkraft $\vec{F}_N$

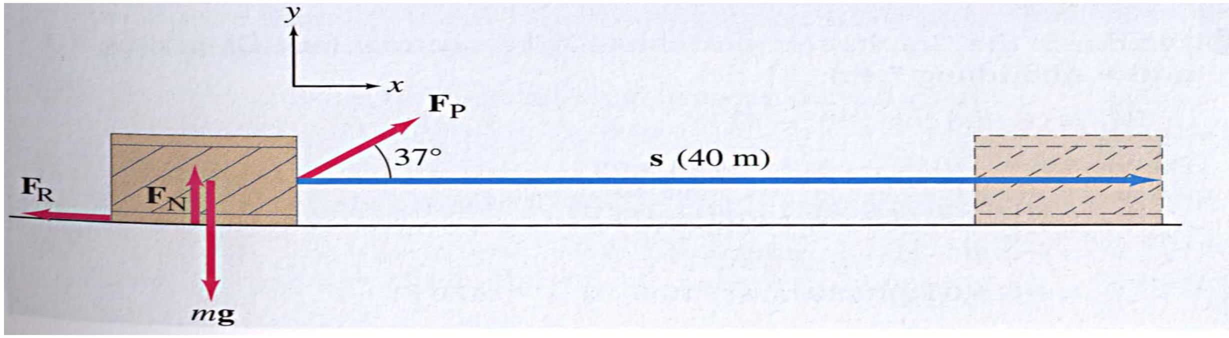
Die durch die Gravitationskraft und die Normalkraft verrichtete Arbeit ist jeweils Null, da beide senkrecht zum Weg verlaufen:

$$W_G = m \cdot g \cdot s \cdot (\cos 90^0) = 0$$

$$W_N = F_N \cdot (\cos 90^0) = 0$$

Die durch F_p verrichtete Arbeit ist

$$W_p = F_p \cdot s \cdot \cos\theta = 100N \cdot 40m \cdot \cos 37^0 = 3200J$$

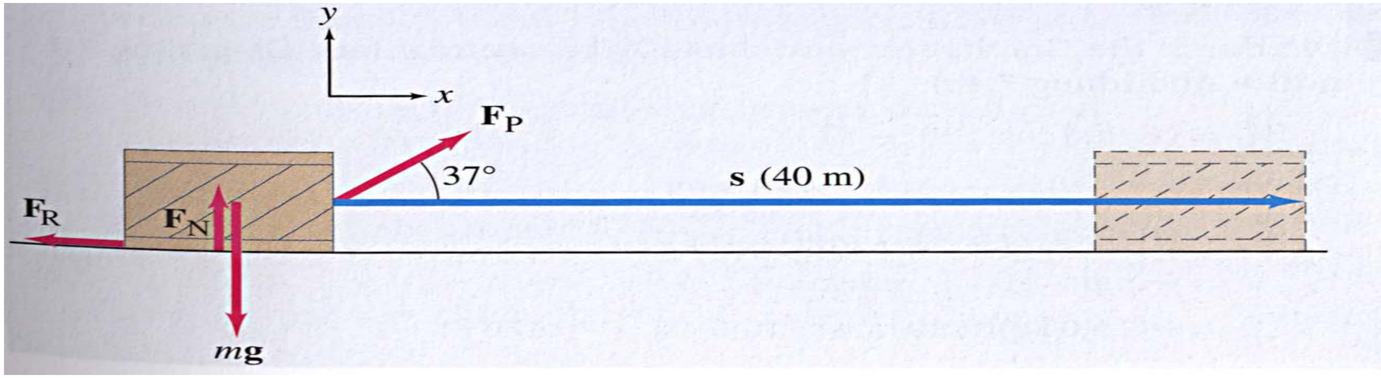


Die durch die Reibungskraft verrichtete Arbeit ist

$$W_R = F_R \cdot s \cdot \cos 180^0 = 50N \cdot 40m \cdot (-1) = -2000J$$

Die an der Kiste verrichtete Gesamtarbeit ist die Summe aller durch die einzelnen Kräfte verrichteten Arbeit:

$$\sum_i W_i = W_G + W_N + W_p + W_R = 0 + 0 + 3200J - 200J = 1200J$$

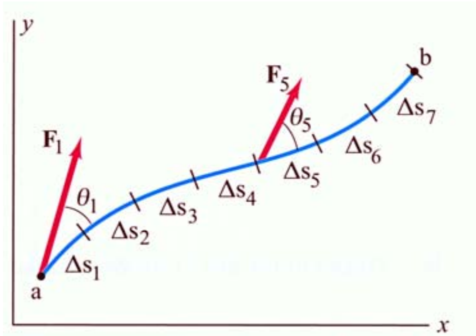


Durch eine nicht konstante Kraft verrichtete Arbeit
Während eines Prozesses können sich Berag und Richtung einer Kraft verändern.

Aus der Gleichung $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$

wird dann für das erste Intervall:

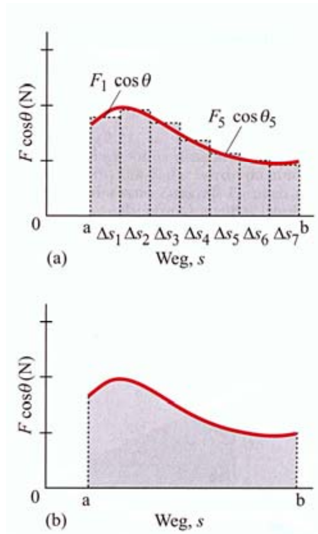
$$\Delta W_1 \approx F_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \Delta s_1$$



Ein Massenpunkt, auf den eine veränderliche Kraft **F** wirkt, bewegt sich entlang der dargestellten Bahn von Punkt a nach Punkt b.

Die gesamte bei der Bewegung des Massenpunktes verrichtete Arbeit ist die Summe über alle Terme:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos\theta_i \cdot \Delta s_i$$



Die durch eine Kraft **F** verrichtete Arbeit ist (a) annähernd gleich mit der Summe der Flächen der Rechtecke, (b) genau gleich mit der Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve.

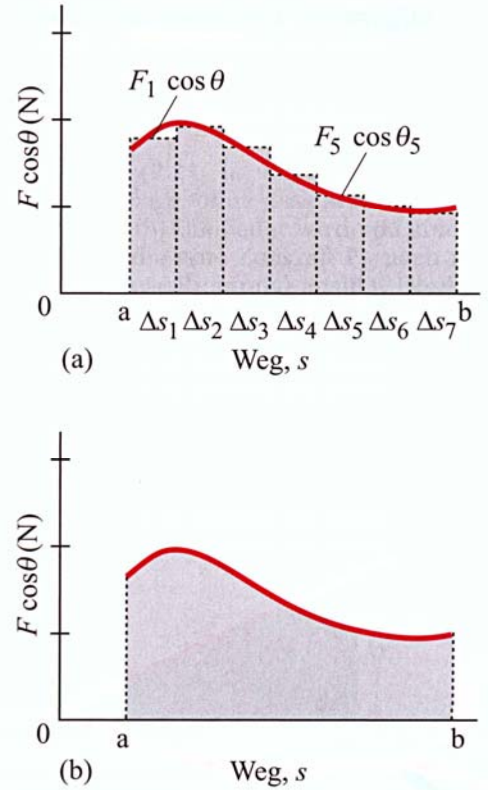
Lassen wir jedes Δs_i gegen Null gehen, erhalten wir:

$$W = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos\theta_i \cdot \Delta s_i = \int_a^b F \cdot \cos\theta \cdot ds$$

Das bedeutet, dass die durch eine veränderliche Kraft bei der Bewegung eines Körpers zwischen zwei Punkten verrichtete Arbeit gleich der Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve zwischen diesen beiden Punkten ist.

Allgemein erhalten wir (Linienintegral):

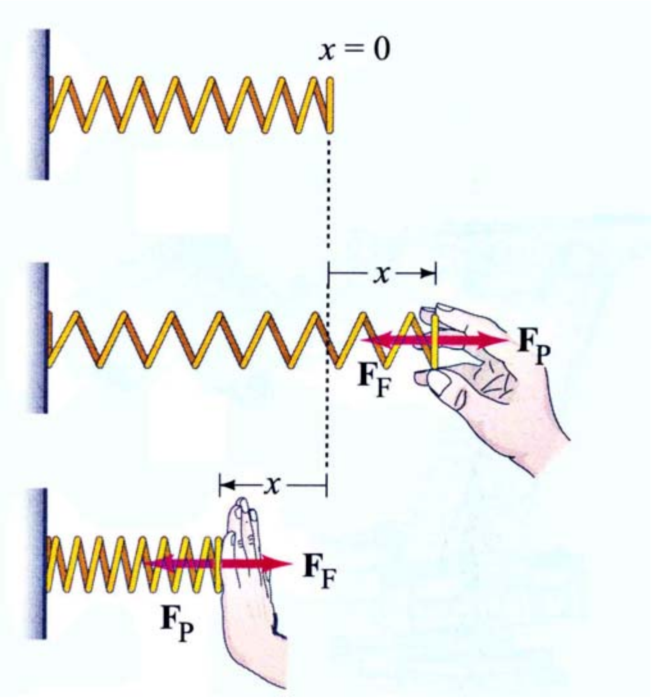
$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Die durch eine Kraft **F** verrichtete Arbeit ist (a) annähernd gleich mit der Summe der Flächen der Rechtecke, (b) genau gleich mit der Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve.

Beispiel: An einer Feder verrichtete Arbeit.
Damit eine Feder um einen Betrag x aus ihrer normalen (nicht gedehnten) Lage gedehnt oder gestaucht werden kann, benötigt man eine Kraft F_p, die direkt proportional zu x ist

$$F_p \approx x$$



Die Proportionalitätskonstante, k, nennt man die Federkonstante:

$$F_p = k \cdot x$$

Die Feder selbst übt eine Kraft in entgegen-gesetzte Richtung aus (Rückstellkraft):

$$F_F = -k \cdot x$$

Wir berechnen die Arbeit für die Auslenkung von $x_a = 0$ bis $x_b = x$. Die Kraft F_p wird parallel zur x-Achse ausgeübt, so dass F_p und ds parallel sind. Wir erhalten:

$$W_p = \int_{x_a=0}^{x_b=x} F_p(s)ds = \int_0^x F_p(s)ds = \int_0^x k \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2}ks^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}k \cdot x^2$$

Sei zum Dehnen der Feder um 3,0 cm eine maximale Kraft von 75 N erforderlich, dann erhalten wir für die dafür erforderliche Arbeit:

Federkonstante k:

$$k = \frac{F_{\max}}{x_{\max}} = \frac{75N}{0{,}030m} = 2{,}5 \cdot 10^3\ N/m$$

Arbeit:

$$W = \frac{1}{2}k \cdot x_{\max}^2 = \frac{1}{2}\left(2{,}5 \cdot 10^3\ N/m\right)\left(0{,}030m\right)^2 = 1{,}1J$$

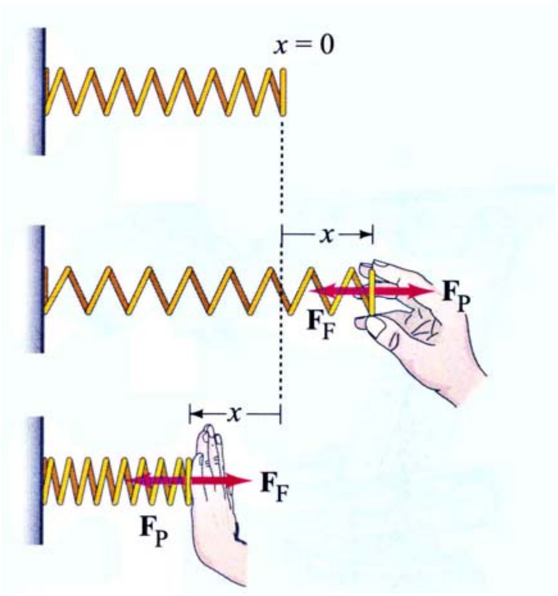
Wir berechnen die Arbeit, wenn die Feder um 3,0 cm zusammengedrückt wird.

Die Kraft ist ebenfalls F_p = kx, allerdings sind sowohl F_p als auch x negativ.

Die verrichtete Arbeit beträgt:

$$W_p = \int_{x_a=0}^{x_b=-0,03m} F_p(s)ds = \int_0^{x=-0,03m} k \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{-0,03m} = \frac{1}{2}\left(2,5 \cdot 10^3\ N/m\right)\left(-0,03m\right)^2 = 1,1J$$

Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie bei der Dehnung.



Unter Leistung verstehen wir:

$$Leistung = \frac{Arbeit}{Zeit} \qquad P = \frac{A}{t} \qquad P = \frac{dA}{dt}$$

Einheiten:
1 Watt (W) = 1 Joule / Sekunde (J/s)
1 kp m/s ; 1 PS = 75 kp m / s = 736 W = 0,736 kW

Beispiel: Ein Jogger mit einer Masse von 70 kg läuft eine Treppe in 4,0 s hoch. Die vertikale Höhe beträgt 4,5 m. Wie groß ist die Leistungsabgabe in Watt und PS?
Die Arbeit wird gegen die Gravitation verrichtet:

$$G = F_G = m \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad W = F_G \cdot s = m \cdot g \cdot h_{Treppe}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h_{Treppe}}{t} = \frac{(70kg)(9{,}8\,m/s^2)(4{,}5m)}{4{,}0s} = 770W$$

Da 1PS = 735,5 W, beträgt die Leistung etwas über 1PS

Die Leistung kann auch in der auf einen Körper ausgeübten Kraft und der Geschwindigkeit des Körpers ausgedrückt werden:

Aus $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$ folgt $$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Heben wir einen Körper auf eine bestimmte Höhe (oder spannen eine Feder), dann kann der Körper beim Loslassen Arbeit verrichten. In diesem Fall hat der Körper eine ***Arbeitsfähigkeit***, die er seiner Lage verdankt.

Ein gehobener Körper ist potentiell in der Lage, Energie in Arbeit umzusetzen (**Energie der Lage**). Diese Form der Energie nennt man

Potenzielle Energie

Sie entspricht genau der Arbeit, die man zum Hochheben des Körpers auf die Höhe *h* verrichten muss:

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

Auch ein in Bewegung befindlicher Körper hat die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Die Bewegungsenergie dieses Körpers wird

Kinetische Energie

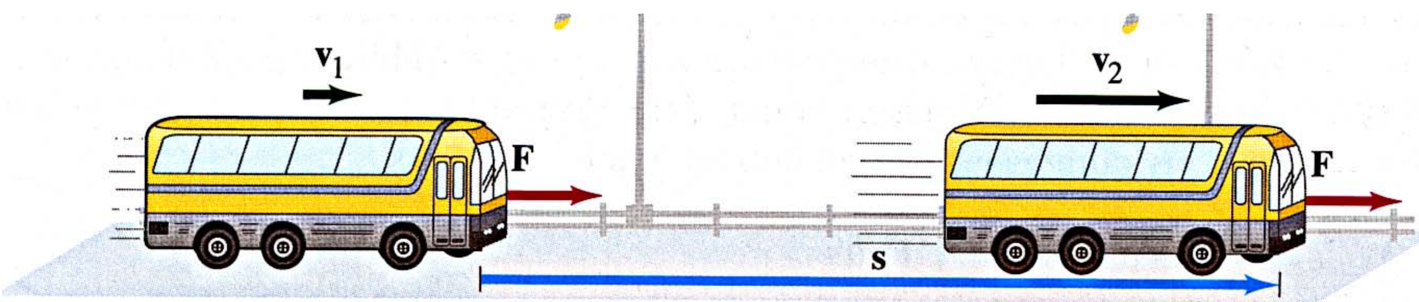
genannt.

Wir betrachten eine Fahrzeug der Masse *m*, der sich geradlinig mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 bewegt. Mit der parallel zu seine Weg ausgeübten konstanten Kraft *F* beschleunigen wir es gleichförmig auf die Geschwindigkeit v_2. Die an dem Fahrzeug verrichtete Arbeit beträgt $W = F\,s$. Unter Verwendung von

$$F = m \cdot a \qquad \text{und} \qquad v_2^2 = v_1^2 + 2as$$

ergibt sich

$$W = Fs = mas = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}\right)s$$



oder $$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Wir definieren die Größe $\frac{1}{2}mv^2$ als kinetische Energie der Translationsbewegung E_{kin} des Körpers:

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2}$$

Beispiel: Ein Baseball mit einer Masse von m = 145 g wird mit einer Geschwindigkeit von v = 25 m/s geworfen

a) Wie groß ist seine kinetische Energie?

b) Wie viel Arbeit wurde verrichtet, um diese Geschwindigkeit aus der Ruhelage zu erreichen?

a) Die kinetische Energie beträgt

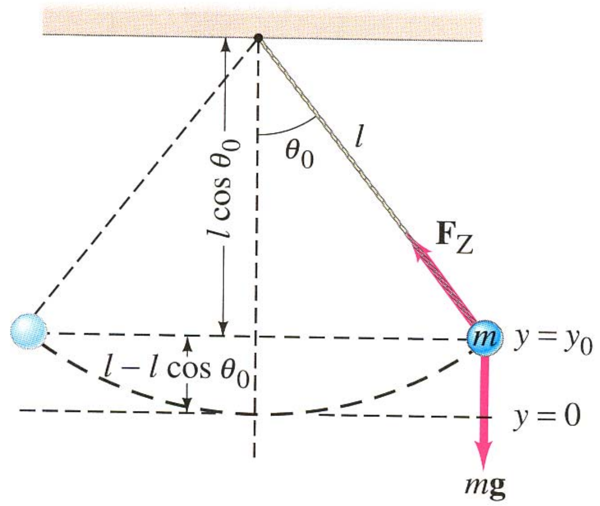
$$E_{kin=}\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0{,}145kg)(25\,m/s)^2 = 45\,J$$

a) Da die kinetische Anfangsenergie Null war, ist die verrichtete Arbeit gleich der kinetischen Endenergie: 45 J

Beispiel: Pendel

Die potentielle Energie der Kugel ist im höchsten Ausschlagspunkt

$$E_{pot} = mgh$$



Bewegt sich das Pendel abwärts, dann erfordert das die Arbeit (Beschleunigung der Masse m):

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}$$

Dies ist die Bewegungsenergie des beschleunigten Pendels.

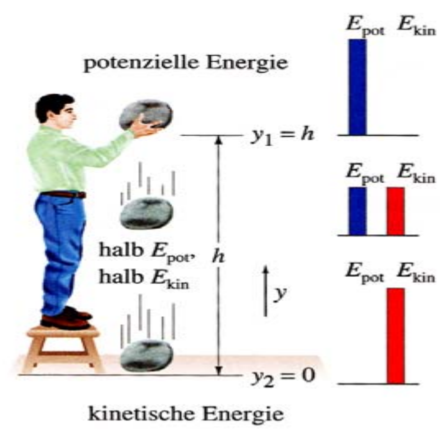
Ergebnis:

Die verlorene potentielle Energie verwandelt sich in kinetische Energie

Beim Nulldurchgang ist $E_{pot} = 0$, $E_{kin} = \max$

Vernachlässigen wir äußere Einflüsse, dann verwandelt sich stets die kin. Energie vollkommen in pot. Energie und umgekehrt. In einem solchen System (abgeschlossenes System) geht also keine Energie verloren und es gilt:

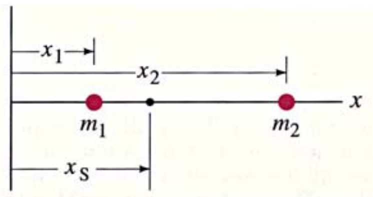
$$E_{pot} + E_{kin} = const. \qquad \text{Energieerhaltungssatz}$$



Während der Stein frei fällt, wandelt sich seine potenzielle Energie in kinetische Energie um. Beachten Sie die Balkendiagramme, die die potenzielle Energie E_{pot} und die kinetische Energie E_{kin} für die drei verschiedenen Positionen darstellen.

Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Wir betrachten zwei Massenpunkte, von denen der Mittelpunkt (Massenmittelpunkt) bestimmt werden soll:



Der Massenmittelpunkt eines Systems aus zwei Massenpunkten liegt auf der Geraden, die die beiden Massen verbindet. Hier ist $m_1 > m_2$, so dass der Massenmittelpunkt näher an m_1 als an m_2 liegt.

Gesucht ist der Ortsvektor X_S ($\vec{r}_S$) des Mittelpunktes. Wir sehen aus der Abbildung: die Abstände von X_S zu $m1$, $m2$ verhalten sich umgekehrt zu den Massen:

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{m_1} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}) \cdot m}{m_1 m_2} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot m_1}{m_1 m_2}$$

$$\frac{\vec{r}_2 m_2}{m_1 m_2} - \frac{\vec{r} m_2}{m_1 m_2} = \frac{\vec{r} m_1}{m_1 m_2} - \frac{\vec{r}_1 m_1}{m_1 m_2}$$

$$\frac{\vec{r}m_1}{m_1m_2} + \frac{\vec{r}m_2}{m_1m_2} = \frac{\vec{r}_1m_1}{m_1m_2} + \frac{\vec{r}_2m_2}{m_1m_2} \qquad / \cdot m_1m_2$$

$$\vec{r}\left(m_1 + m_2\right) = \vec{r}_1m_1 + \vec{r}_2m_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{r} = \frac{\vec{r}_1m_1 + \vec{r}_2m_2}{m_1 + m_2}}$$

Allgemein:

$$\boxed{\vec{r} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}}$$

Für die Komponenten (im kart. Koordinatensystem) gilt:

$$X_s = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad Y_s = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad Z_s = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}$$

Legt man den Koordinatenursprung in den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt, dann gilt: $\overline{X} = 0$, $\overline{Y} = 0$, $\vec{Z} = 0$

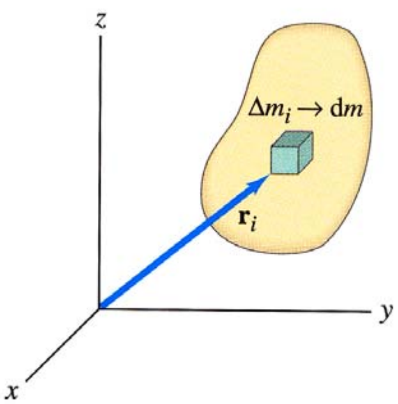
$$\sum_i x_i m_i = 0 \qquad \sum_i y_i m_i = 0 \qquad \sum_i z_i m_i = 0$$

Zusammengefasst ergibt sich die Definition des Schwerpunktes:

$$\boxed{\sum_i r_i \cdot m_i = 0}$$

Für kontinuierlich verteilte Massen erhalten wir:

$$\int r \cdot dm = 0$$

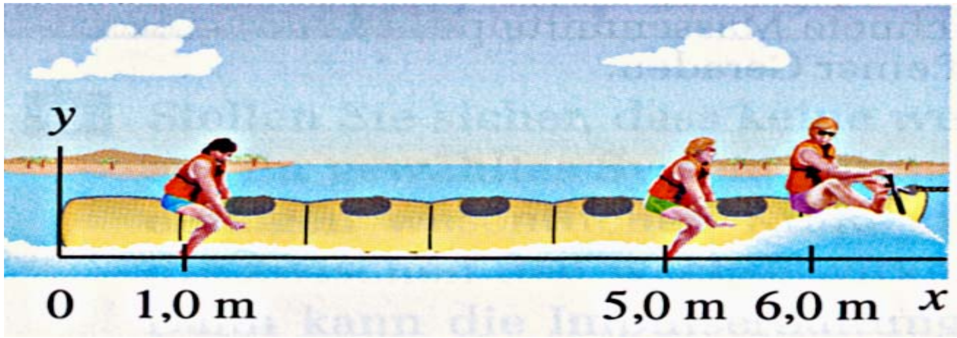


Ein ausgedehnter Körper, hier nur in zwei Raumrichtungen dargestellt, kann als aus vielen sehr kleinen Massenpunkten (n) bestehend betrachtet werden, die jeweils eine Masse von Δm_i haben. Ein solcher Massenpunkt ist im Ort $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ dargestellt. Wir nehmen den Grenzwert $n \rightarrow \infty$, so dass Δm_i das unendlich kleine dm wird.

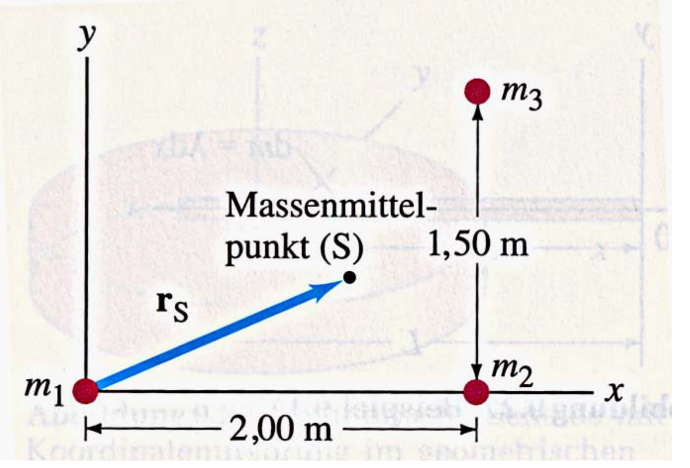
Beispiel 1: Drei Personen mit etwa gleichen Massen m sitzen auf einem leichten Bananenfloß entlang der x-Achse an den Orten x_1 = 1,0m, x_2 = 5,0 m und x_3 = 6,0 m. Ermitteln Sie den Ort des Massenmittelpunktes.

Wir betrachten die Personen als Massenpunkte (bzw. ihren Schwerpunkt). Dann erhalten wir

$$X_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m + m + m} = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{1{,}0m + 5{,}0m + 6{,}0m}{3} = \frac{12{,}0m}{3} = 4{,}0m$$



Beispiel 2: Drei Massenpunkte, jeder mit einer Masse von 2,5 kg, befinden sich an den Eckpunkten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten 2,0 m und 1,5 m lang sind. Berechnen Sie den Massenmittelpunkt (X_s, Y_s).



Wir legen den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Ort der Masse 1. Dann erhalten wir die Koordinaten:

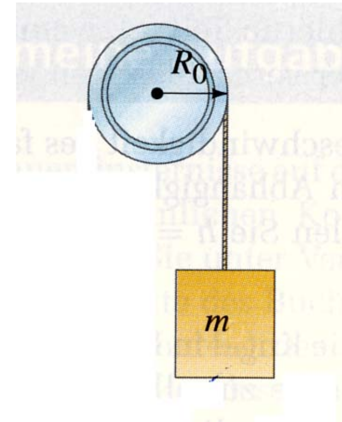
m_1: $x_1 = y_1 = 0$, m_2: $x_2 = 2{,}0$ m und $y_2 = 0$,
m_3: $x_3 = 2{,}0$ m und $y_3 = 1{,}5$ m.

$$X_s = \frac{2{,}5kg \cdot 0 + 2{,}5kg \cdot 2{,}0m + 2{,}5kg \cdot 2{,}0m}{3 \cdot 2{,}5kg} = 1{,}33m$$

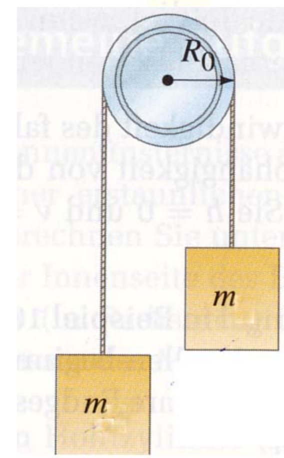
$$Y_s = \frac{2{,}5kg \cdot 0 + 2{,}5kg \cdot 0 + 2{,}5kg \cdot 1{,}5m}{3 \cdot 2{,}5kg} = 0{,}5m$$

Kräftepaar, Drehmoment

Durch Anhängen eines Gewichtes an eine drehbare Scheibe erzeugt man eine Drehkraft bzw. ein Drehmoment.



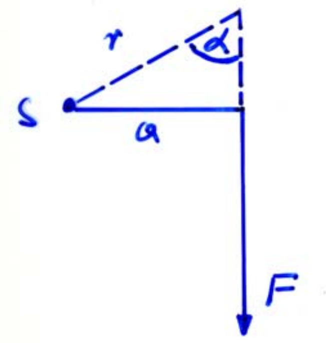
Das Drehen der Scheibe kann verhindert werden durch eine gleich große Drehkraft in anderem Drehsinn.



Die Angriffspunkte der Kräfte sind in ihrer Wirkungslinie verschiebbar, ohne dass sich an dem Bewegungszustand etwas ändert

Aus dem Experiment entnehmen wir: Die Drehkraft nimmt mit wachsendem Abstand vom Drehpunkt zu.

Es sei $a \cdot F = M$



Nach der Verschiebung der Kraft *F* ist *r* der Abstand vom Punkt *S* zum Angriffspunkt der Kraft.

$$\sin\alpha = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r\sin\alpha$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin(r, F)$$

Dies sieht aus wie der Betrag des Vektorproduktes der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$

Das Drehmoment $\vec{M}$ ist daher vollständig und allgemein beschrieben durch:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Der Vektor des Drehmomentes zeigt stets in die Richtung, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man sie im Sinne des wirksamen Drehmomentes dreht.

Wirken mehrere Drehmomente auf eine Achse, dann können die Drehmomente vektoriell zu einem Gesamtdrehmoment addiert werden:

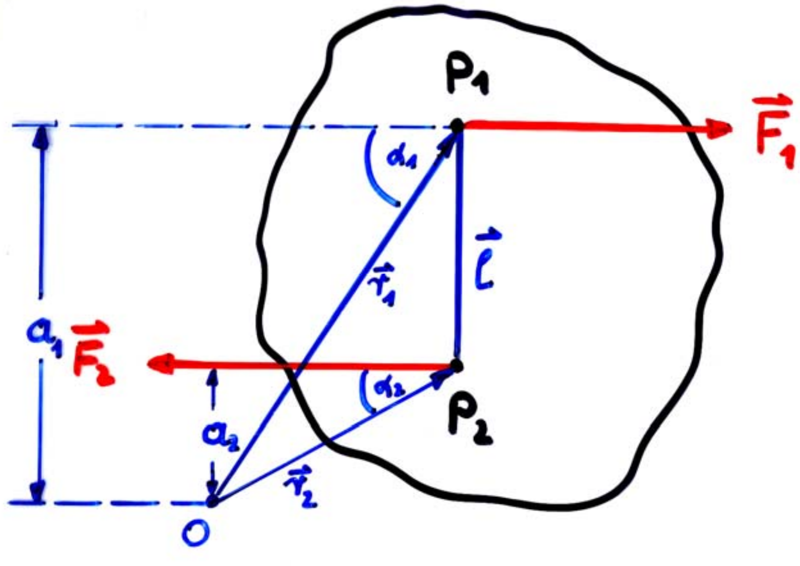
$$\boxed{\vec{M} = \sum_{\nu} M_{\nu}}$$

Von besonderer Bedeutung ist das so genannte Kräftepaar:
Man bezeichnet ein Kräftesystem aus zwei parallelen, gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, deren Angriffslinien nicht auf derselben Geraden liegen, als Kräftepaar.

Von $\vec{F}_1$ auf 0 ausgeübtes Drehmoment:

$$\left|\vec{M}_1\right| = \left|\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right| = r_1 \cdot F_1 \cdot \sin\alpha_1 = a_1 \cdot F_1$$

da $\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{r_1}$



$$\left|\vec{M}_2\right| = \left|\vec{r}_2 \times \vec{F}_2\right| = r_2 \cdot F_2 \sin\alpha_2 = a_2 \cdot F_2$$

= von F_2 auf 0 ausgeübtes Drehmoment.

Das resultierende Drehmoment ist gleich der Summe aller Einzeldrehmomente:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{M}_1\right| + \left|\vec{M}_2\right| = a_1 \cdot F_1 + a_2 \cdot F_2$$

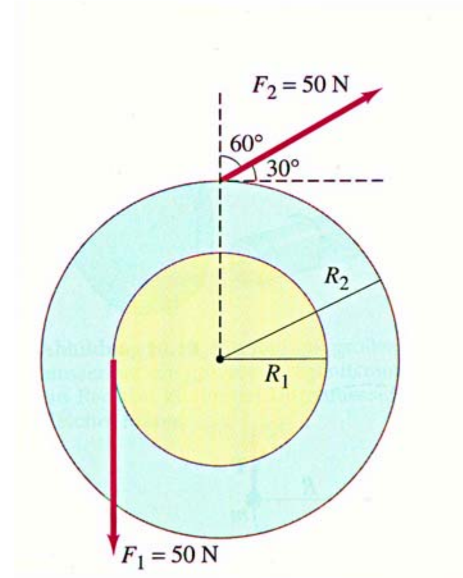
Da $F_2 = -F_1$ => $\left|\vec{M}\right| = (a_1 + a_2) \cdot F_1 = l \cdot F_1$

=>

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$$

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist gleich dem Vektorprodukt aus der Kraft und der Differenz der Ortsvektoren der Angriffspunkte.

Beispiel: Zwei dünne, zylinderförmige Räder mit den Radien R_1 = 30 c m und R_2 = 50 cm sind auf einer Achse aneinander befestigt, die durch den Mittelpunkt jedes Rades verläuft. Berechnen Sie das Gesamtdrehmoment (resultierendes Drehmoment) , das auf das Zwei-Räder-System wirkt und auf die beiden dargestellten Kräfte, die jeweils einen Betrag von 50 N haben, zurückzuführen ist.



Die Kraft $\vec{F}_1$ bewirkt eine Drehung des Systems gegen den Urzeiger-sinn, $\vec{F}_2$ eine Drehung im Urzeigersinn. Die Drehrichtung von $\vec{F}_1$ sei positiv. $\vec{F}_1$ übt das Drehmoment $M_1 = R_1 \cdot F_1$ aus, da der Hebel-arm R_1 ist.

$\vec{F}_2$ erzeugt ein negatives Drehmoment, wirkt aber nicht senkrecht zu R_2 so dass wir die senkrechte Komponente benutzen müssen.

$$M_2 = -R_2 \cdot F_{2\perp} = -R_2 \cdot F_2 \sin\theta$$

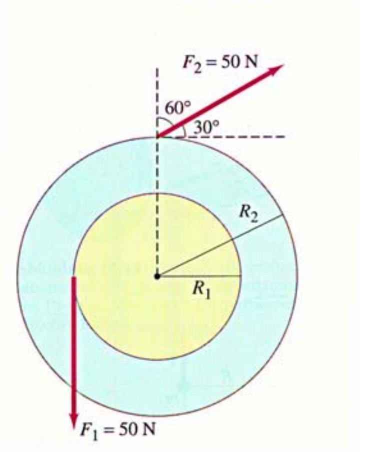
θ ist der Winkel zwischen $\vec{F}_2$ und einer radialen Linie von der Drehachse aus ($\theta = 60^o$).

Wir erhalten für das resultierende Drehmoment:

$$M = R_1 \cdot F_1 - R_2 \cdot F_2 \sin 60^o$$

$$= 50N \cdot 0{,}3m - 50N \cdot 0{,}5m \cdot 0{,}866 = -6{,}7\,Nm$$

Das Rad bewegt sich im Uhrzeigersinn



Bestimmung des Schwerpunktes

Definition des Schwerpunktes: $\sum m_i \vec{r}_i = 0$

Annahme: die Massen m_i des starren Körpers verändern sich nicht.

=> $m_i \approx F_i$

Auf m_i wirkt die Erdanziehungskraft (Schwerkraft): $F_i = m_i \cdot g$

Für den Schwerpunkt gilt also: $\sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = 0$

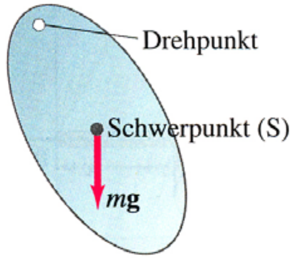
$\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$ ist aber das Drehmoment, das die schwere Masse m_i erzeugt mit Wirkung auf die Schwerpunktsachse. Wir müssen daher das Produkt schreiben: $\vec{F}_i \times \vec{r}_i$.

Für den Schwerpunkt muss also gelten:

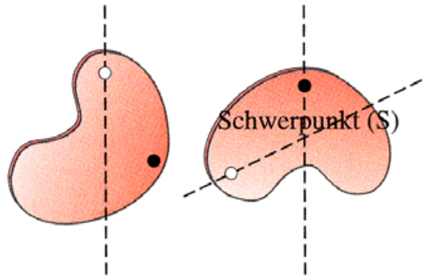
$$\boxed{\sum \vec{F}_{S,i} \times \vec{r}_i = \sum \vec{M}_{S,i} = 0}$$

Der Schwerpunkt ist derjenige Punkt, bei dem die Summe aller von den Massen *mi* (im Schwerefeld der Erde) ausgeübten Drehmomente Null ist

Experimentelles Auffinden des Schwerpunktes:



Man unterstützt den Körper in einem beliebigen Punkt (Drehpunkt) => der Körper dreht sich und kommt zur Ruhe, wenn die Wirkungslinie der angreifenden Kraft durch den Schwerpunkt geht. Der Schwerpunkt ist festgelegt durch den Schnittpunkt zweier Wirkungslinien.



Mit den o. a. Definitionen können wir eine allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht angeben:

$$\boxed{\sum \vec{M} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{F} = 0}$$

Der Körper ist dann in Ruhe

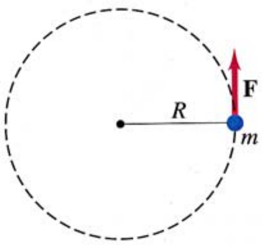
Trägheitsmoment

Analog zum zweiten Newtonschen Axiom für die Translationsbewegung $(a \propto \sum F)$ können wir für die Drehbewegung schreiben:

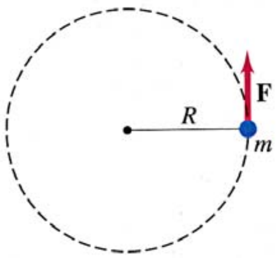
$$\alpha \propto \sum M$$

wobei α die Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers ist und $\sum M$ das auf einen Körper ausgeübte Gesamtdrehmoment.

Wir betrachten einen Massenpunkt mit der Masse m, der am Ende einer masselosen Schnur auf einer Kreisbahn mit dem Radius R rotiert.
Auf den Massenpunkt wirke die Kraft F.



Das Drehmoment, das die Winkelbeschleunigung bewirkt, ist $M = R \cdot F$



Mit dem zweien Newtonschen Axiom für lineare Größen $\sum F = m \cdot a$, und dem Ausdruck für die tangentiale Beschleunigung des Massenpunktes, $a_{\tan} = R \cdot \alpha$, erhalten wir:

$$F = m \cdot a = m \cdot R \cdot \alpha$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit R, erhalten wir die direkte Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung und dem ausgeübten Drehmoment M:

$$M = m \cdot R^2 \cdot \alpha$$

Die Größe $m \cdot R^2$ nennt man das Trägheitsmoment des Massen-punktes

Wir betrachten nun einen rotierenden starren Körper (z.B. ein Rad), der sich um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse dreht. Für jeden Massenpunkt *i* des Körpers gilt:

$$M_i = m_i \cdot R_i^2 \cdot \alpha$$

Die Summe über alle Massenpunkte ergibt:

$$\sum M_i = (\sum m_i \cdot R_i^2) \cdot \alpha$$

Das resultierende Drehmoment stellt die Summe aller inneren und aller äußeren Drehmomente dar

$$\sum M = \sum M_{\mathrm{int}} + \sum M_{ext}$$

Nach dem dritten Newtonschen Axiom ist aber die Summe aller inneren Drehmomente gleich Null. $\sum M$ stellt also das resultierende äußere Drehmoment dar.

$$J = \sum_i m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots$$

nennt man das **Trägheitsmoment des Körpers**.
Wir können also schreiben:

$$\sum M = J \cdot \alpha$$

Diese Bewegungsgleichung für Drehbewegungen, die für die Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse gilt, ist das Analogon zum zweiten Newtonschen Axiom der Translationsbewegung.
Die Gleichung gilt auch, wenn der Körper eine translatorische Beschleunigung erfährt, solange die Drehachse durch den Massen mittelpunkt nicht ihre Richtung ändert.

Die kinetische Energie eines translatorisch bewegten starren Körpers ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_\nu m_\nu\right)v^2 \quad \text{da} \quad M = \sum m_\nu$$

Wir betrachten nun die Rotation eines starren Körpers um eine Achse: Jedes Masseelement m_ν dreht sich mit der Geschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ die vom Abstand r des Masseelements vom Drehpunkt (Drehachse) abhängt:

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 \ , \quad \omega = const \quad \text{im ganzen Körper}$$

Daraus definieren wir:

$$\boxed{J = \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 \qquad \text{Trägheitsmoment}}$$

Für $E_{kin,rot}$ schreiben wir dann: $E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

Dimension von J: $M \cdot L^2$, Einheit z.B.: $kg \cdot m^2$

Analogie von translatorischer Bewegung und Drehbewegung:

Geschwindigkeit → Winkelgeschwindigkeit

Masse → Trägheitsmoment

An die Stelle des Impulses tritt der Drehimpuls:

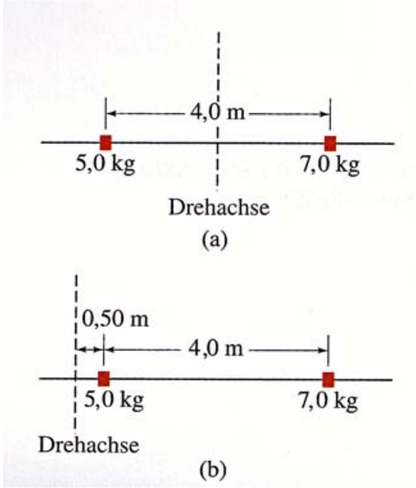
$$\boxed{L = J \cdot \omega}$$

Für einen Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung berechnet man das Trägheitsmoment aus

$$\boxed{J = \int r^2 \cdot dm}$$

Berechnung von Trägheitsmomenten

Beispiel 1: Zwei Gewichte mit den Massen 5,0 kg und 7,0 kg werden 4,0 m voneinander entfernt an einer (masselosen) Stange angebracht. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Systems, wenn die Drehachse wie in a) oder wie in b) angeordnet ist?



a) Beide Gewichte haben den gleichen Abstand von der Drehachse (2,0 m). Somit gilt:

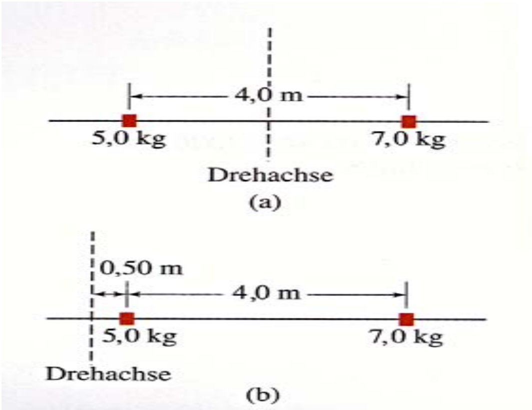
$$J = \sum M \cdot R^2 = (5{,}0kg)(2{,}0m)^2 + (7{,}0kg)(2{,}0m)^2$$

$$= 20kg \cdot m^2 + 28kg \cdot m^2 = 48kg \cdot m^2$$

b) Nun beträgt der Abstand der 5,0 kg-Masse zur Drehachse 0,5 m und der der 7,0 kg-Masse 4,50 m. Dann erhalten wir:

$$J = \sum M \cdot R^2 = (5{,}0kg)(0{,}50m)^2 + (7{,}0kg)(4{,}5m)^2$$

$$= 1{,}3kg \cdot m^2 + 142kg \cdot m^2 = 143kg \cdot m^2$$



Wir sehen, dass der in der Nähe der Drehachse befindliche Körper mit der Masse von 5,0 kg weniger als 1% zum Gesamtträgheitsmoment beiträgt.

Anleitung zum Berechnen von Trägheitsmomenten mit kontinuierlicher Massenverteilung:

Wir benutzen das Integral $J = \int r^2 \cdot dm$

1. Geometrischen Ausdruck für das Masseneelement *dm* finden.
2. Über die für den Körper „geeignete“ Größe integrieren.

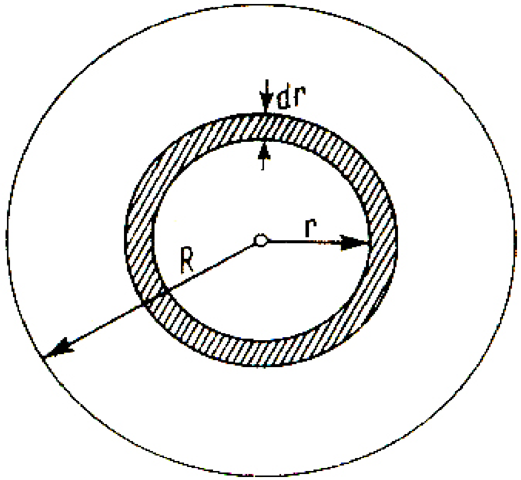
Benutzung der Dichte: statt Masseneelement Volumenelement verwenden.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho \cdot V \quad \Rightarrow \quad dm = \rho \cdot dV$$

Beispiel 2: Trägheitsmoment einer Kugel.

Schritt1: Berechnung des polaren Trägheitsmomentes einer Kreisscheibe.

Radius *R*, Dicke *h*, Masse *m*. J = ?



Massenelement:
dm = Volumenelement *dV* x Dichte ρ

$$dm = 2\pi r \cdot dr \cdot h \cdot \rho$$

$$dJ = dm \cdot r^2 = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot r^3 \cdot dr$$

=> (Integrationsgrenzen $r = 0$ und $r = R$):

$$J = 2\pi h \cdot \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi h \cdot \rho}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{2\pi h \cdot \rho \cdot R^4}{4}$$

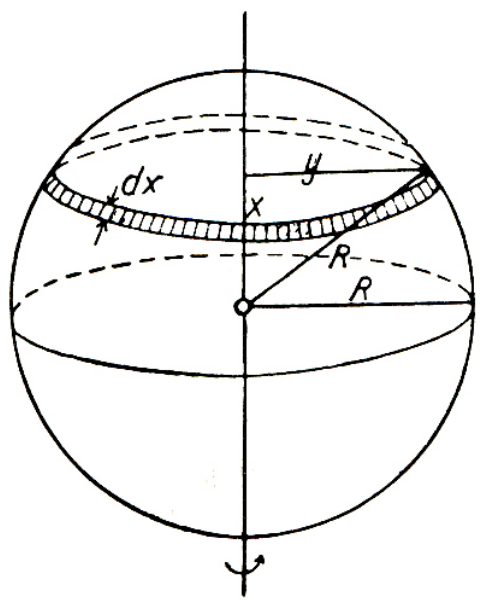
Masse der Scheibe: $m = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$

$\Rightarrow$ Trägheitsmoment der Kreisscheibe: $J_S = \frac{1}{2} m \cdot R^2$

Schritt 2: Berechnung des Trägheitsmomentes der Kugel:

Zerlegung der Kugel in Kreisscheiben (Radius *y*)

$$dJ = \frac{1}{2} dm \cdot y^2$$ (Kreisscheibe)



Masseelement: $dm = \pi y^2 dx \cdot \rho$

=> $$dJ = \frac{1}{2} \pi \rho y^4 dx$$

$R^2 = x^2 + y^2$ => $y^2 = R^2 - x^2$

=> $$dJ = \frac{1}{2}\pi\rho\left(R^2 - x^2\right)^2 dx$$

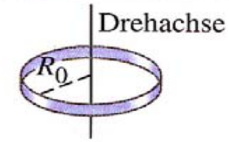
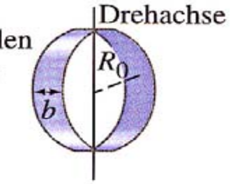
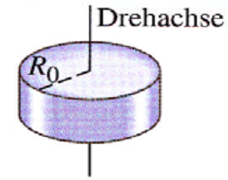
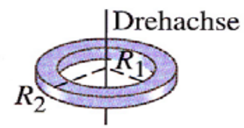
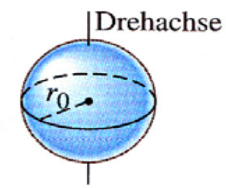
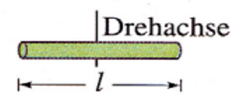
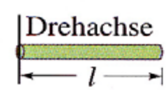
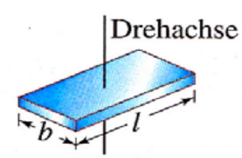
$$-R \leq dx \leq R$$ => $$J = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R}\left(R^4 - 2R^2x^2 + x^4\right)dx = \frac{1}{2}\pi\rho\left[R^4x - \frac{2}{3}R^2x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-R}^{+R}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \cdot 2\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \pi\rho\frac{8}{15}R^5$$

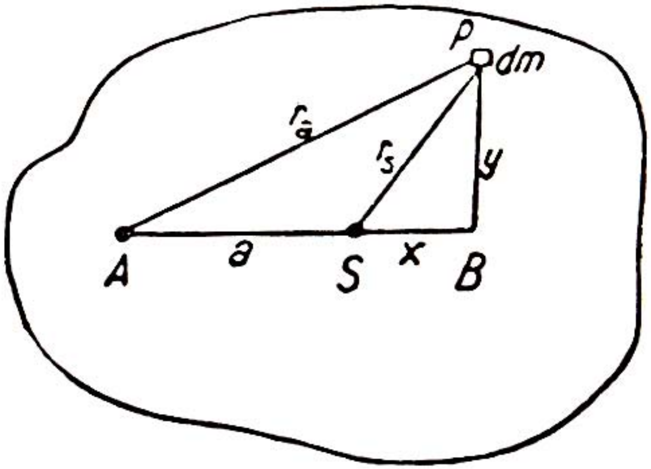
Masse der Kugel: $M = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \rho$

=> Trägheitsmoment der Kugel: $$\boxed{J_{Kugel} = \frac{2}{5}M \cdot R^2}$$

Körper	Ort der Drehachse		Trägheitsmoment
Dünner Reifen mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt		MR_0^2
Dünner Reifen mit Radius R_0 und Breite b	Durch zentralen Durchmesser		$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}M$
Massiver Zylinder mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt		$\frac{1}{2}MR_0^2$
Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außen radius R_2	Durch den Mittelpunkt		$\frac{1}{2}M\,(R_1^2 + R_2^2)$
Homogene Kugel mit Radius r_0	Durch den Mittelpunkt		$\frac{2}{5}Mr_0^2$
Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch den Mittelpunkt		$\frac{1}{12}Ml^2$
Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch ein Ende		$\frac{1}{3}Ml^2$
Rechteckige dünne Platte mit Länge l und Breite b	Durch den Mittelpunkt		$\frac{1}{12}M(l^2 + b^2)$

Trägheitsmoment in Bezug auf eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse (Steinerscher Satz):

Die Drehachse sei in A, der Koordinatenursprung in S.
Die Achse durch A sei parallel zur Achse durch S.
Wir betrachten ein Massenelement *dm*. Die Trägheitsmomente um A und S sind:



$$J_A = \int r_a^2 dm \qquad J_S = \int r_s^2 dm$$

$$r_a^2 = (a+x)^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2 + \left(r_s^2 - x^2\right) = a^2 + r_s^2 + 2ax$$

$$J_A = \int r_s^2 dm + a^2 \int dm + 2a \int x \cdot dm$$

$$\int r_s^2 dm = J_s \quad \Rightarrow \quad a^2 \int dm = M \cdot a^2$$

Da sich der Koordinatenursprung in S befindet, gilt:

$$\int x \cdot dm = 0 \qquad \text{(Definition des Schwerpunktes)}$$

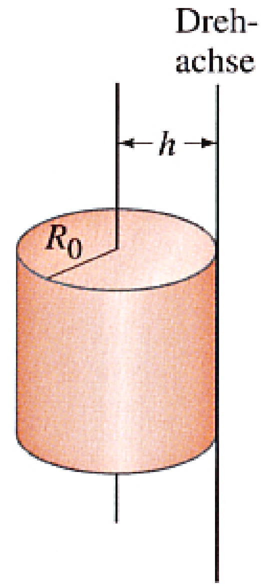
Wir erhalten also allgemein für das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse A den Steinerschen Satz:

$$\boxed{J_A = J_S + M \cdot a^2}$$

a = Abstand der Achse durch A zur Achse durch S.

M = Gesamtmasse des Körpers

Beispiel: Bestimmung des Trägheitsmomentes eines massiven Zylinders mit dem Radius R_o und der Masse M um eine Drehachse, die an seiner Mantelfläche und parallel zu seiner Symmetrieachse verläuft.



Anwendung des Steinerschen Satzes mit

$$J_S = \frac{1}{2} M \cdot R_o$$

(Trägheitsmoment des Zylinders um seine Schwerpunktsachse)

$$h = R_o \quad \Longrightarrow \quad J = J_s + M \cdot h^2 = \frac{1}{2} M R_o^2 + M R_o^2 = \frac{3}{2} M \cdot R_o^2$$

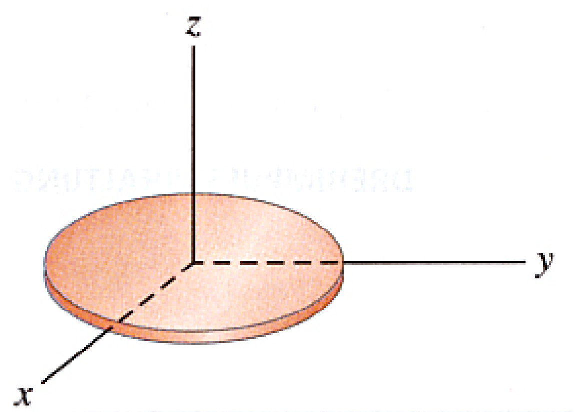
Das Trägheitsmoment um diese Achse ist drei mal größer als um die Schwerpunktsachse.

Der Satz über senkrechte Achsen

Für „zweidimensionale Körper“, d.h. flache Körper mit gleichmäßiger Dicke, die im Vergleich zu den anderen Abmessungen vernachlässigt werden kann, gilt:

Die Summe der Trägheitsmomente eines flachen starren Körpers um zwei beliebige senkrechte Drehachsen in der Ebene des Körpers ist gleich dem Trägheitsmoment um eine Drehachse, die durch ihren Schnittpunkt und senkrecht zu der Ebene des Körpers verläuft.

$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$



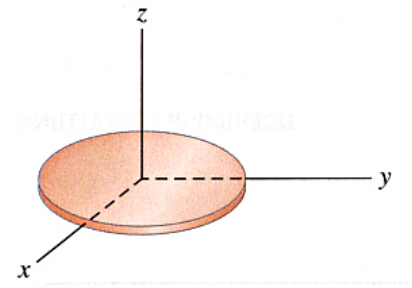
Beweis: Aus $J_x = \sum_i m_i y_i^2$ $\quad J_y = \sum_i m_i x_i^2$

und $J_z = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$ folgt der

Satz über senkrechte Drehachsen

Beispiel: Bestimmung des Trägheitsmomentes einer dünnen Münze um eine Drehachse durch ihren Mittelpunkt in der Ebene der Münze (z. B. x-Achse).

Anwendung des Satzes über senkrechte Achsen:



Gegeben ist

$$J_z = \frac{1}{2} M \cdot R_o^2$$ (Zylinder mit sehr kleiner Dicke)

und die Symmetrie $J_x = J_y$

=> $$J_x + J_y = 2J_x = J_z$$

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{4} M \cdot R_o^2$$