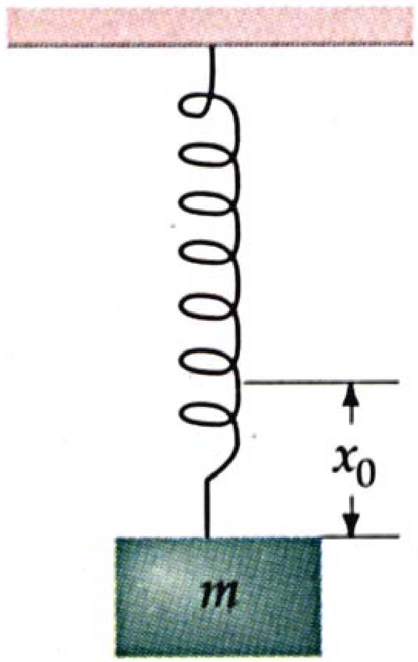
Schwingungen

Freie ungedämpfte Schwingung

Masse *m*, aufgehängt an einer Feder. Lenken wir die Masse *m* durch Ziehen um die Strecke x_0 aus und lassen die Masse m los, dann schwingt *m* um die ursprüngliche Ruhelage



Da *m* Pendelbewegungen ausführt, spricht man von einem Federpendel

Man nennt die Schwingungen eines Federpendels harmonisch (pendelartig), wenn man Reibung und andere, auf die Pendelbewegung hemmend wirkende Einflüsse (Dämpfung) vernachlässigt → harmonischer Oszillator

Die zur Auslenkung der Feder benötigte Kraft ist proportional zur Auslenkung:

$$F \approx x \quad \Rightarrow \quad F = -D \cdot x$$ D = Federkonstante

$$\overset{2. Newtonsches Axiom}{\Rightarrow} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + Dx = 0}$$

oder

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + Dx = 0}$$

Dies ist die Differentialgleichung (DGL) einer <u>harmonischen Schwingung</u>, sie ist die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

Da die Luftreibung (Dämpfung) vernachlässigt ist und keine äußere „einprägende“ Kraft wirkt, ist es außerdem eine freie und ungedämpfte Schwingung

Lösungsansatz:

$$x(t) = x_o \cdot \cos \omega_o t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_o x_o \sin \omega_o t$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_o^2 x_o \cos \omega_o t$$

x_o = Amplitude
ω_o = Kreisfrequenz

Einsetzen in die DGL:

$$-m\omega_o^2 x_0 \cos \omega_0 t + D x_0 \cos \omega_0 t = 0$$

$$-\omega_o^2 + \frac{D}{m} = 0$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_o = 2\pi\frac{1}{T} \qquad \frac{2\pi}{T_o} = 2\pi\nu_o = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Mit: $\nu_o =$ Eigenfrequenz des Federpendels,
$T_o =$ Schwingungsdauer des Federpendels

$$\boxed{\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}} \qquad \boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

ν_o und T_o sind unabhängig von der Amplitude.

Zweite mögliche Lösung:

$$x(t) = x_o \cdot \sin\omega_o t$$
$$\dot{x}(t) = \omega_o x_o \cos\omega_o t$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega_o^2 x_0 \sin\omega_o t$$

Dieser Ansatz führt zum gleichen Ergebnis.

Die beiden Lösungen unterscheiden sich durch die Anfangsbedingungen:

1. Das Federpendel ist mit der Anfangsamplitude x_o ausgelenkt und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen:

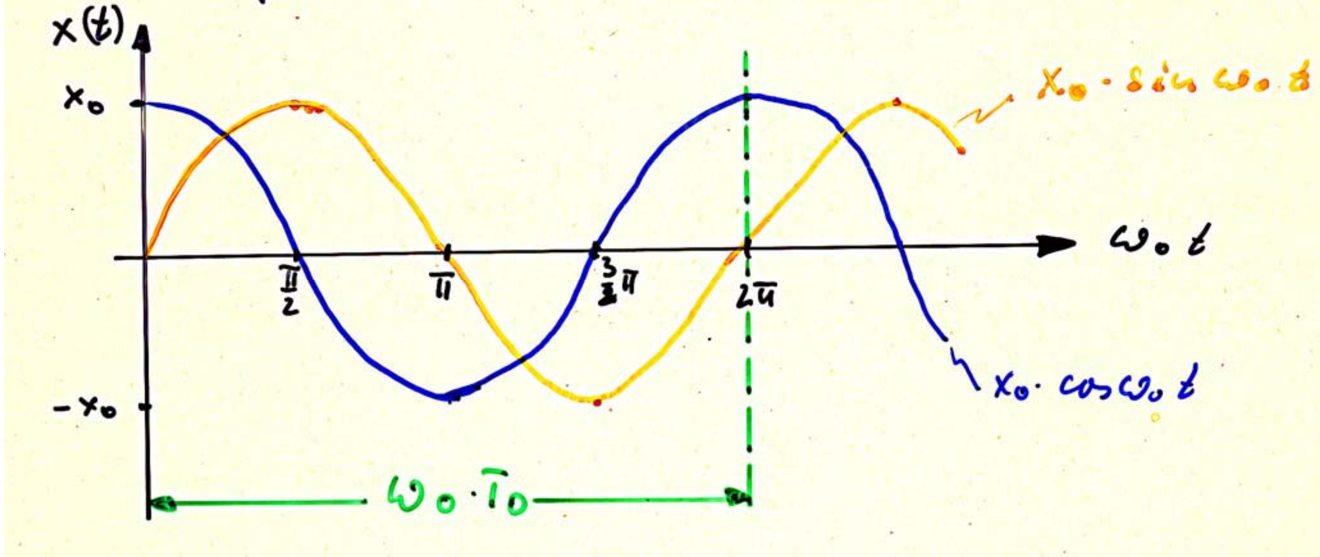
$$t = 0: \qquad x(0) = x_o \qquad v(0) = 0$$

Lösung ist: $\underline{x(t) = x_0 \cos \omega_o t}$

2. Das Federpendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Nulllage und wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = x_o \omega_0$ durch Anstoßen ausgelenkt.

$$t = 0 \qquad x(0) = 0 \qquad v_o = x_o \omega_0$$

Lösung ist: $\underline{x(t) = x_0 \sin \omega_o t}$



Beide Kurven sind um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

Wir können die eine Kurve in die andere überführen:

$$x(t) = x_o \cos \omega_0 t = x_o \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

Wir haben damit den (Zeit-)Nullpunkt der Schwingung um $\frac{\pi}{2}$ verschoben

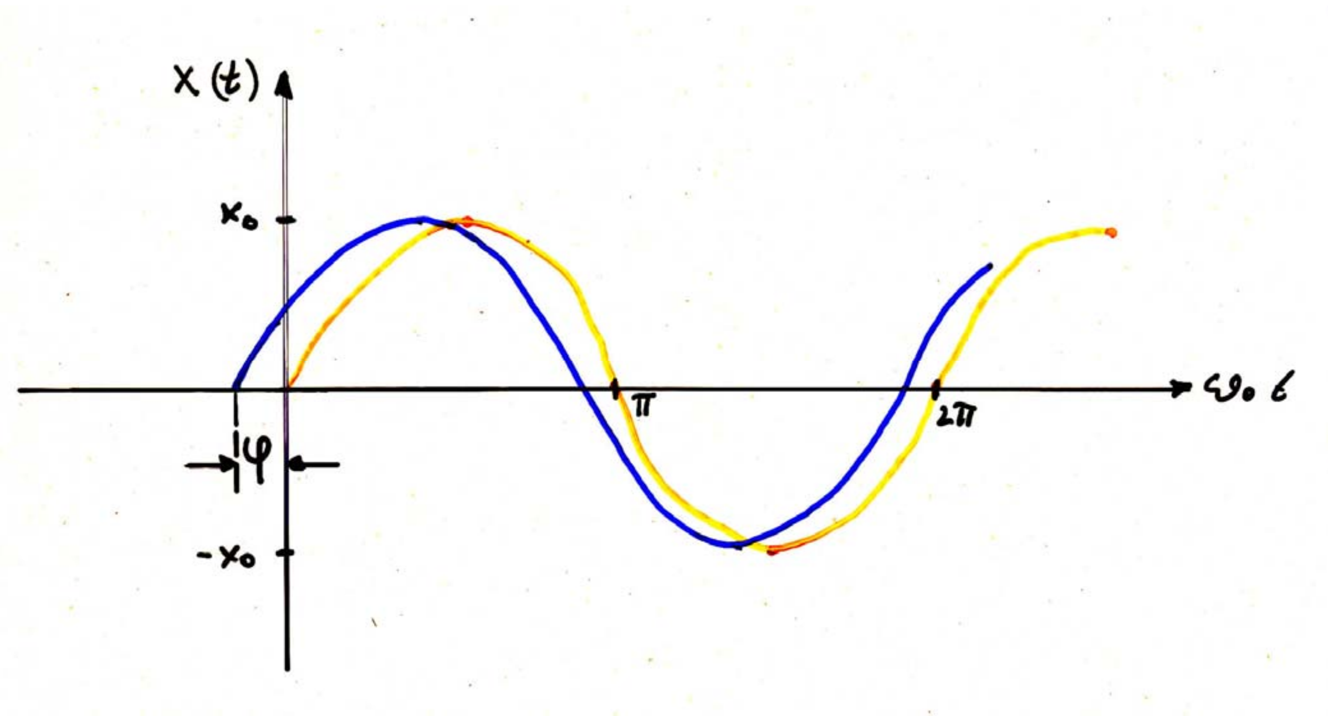
Allgemein: $$\boxed{x(t) = x_0 \sin(\omega_o t + \varphi)}$$

a

Die Kurve $\sin(\omega_o t + \varphi)$ ist um den Phasenwinkel φ

nach links verschoben ($\varphi \rangle 0$), d.h. die Schwingung $\sin(\omega_o t + \varphi)$

eilt der Schwingung $\sin \omega_o t$ um den Winkel φ voraus

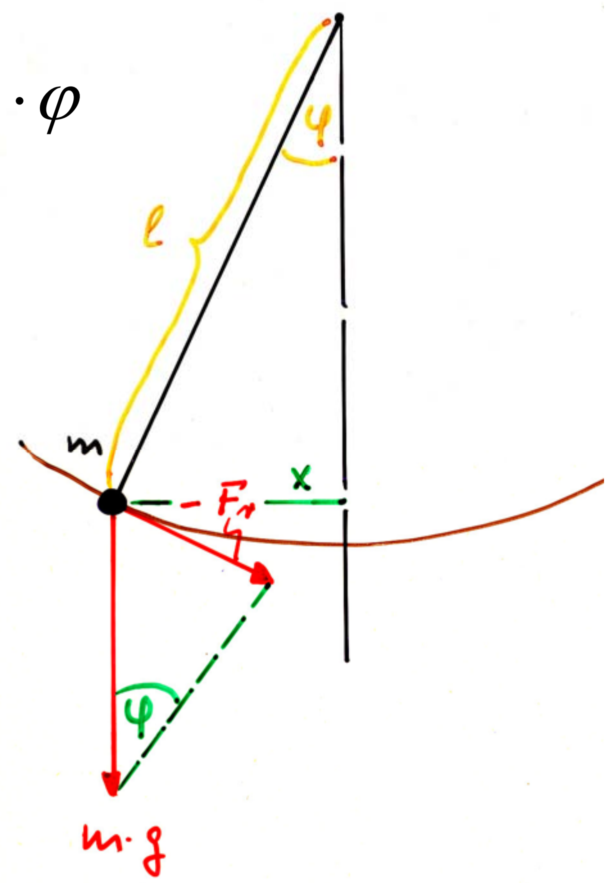


Beispiel: Das mathematische Pendel

Eine punktförmige Masse *m* hänge an einem schwerelosen Faden der Länge *l*. Bei Auslenkung aus der Ruhelage wird m durch die rücktreibende Kraft $-F_r$ (Komponente der Schwerkraft *mg*) zurückbewegt.

$$\sin\varphi = \frac{-F_r}{mg} \quad \Rightarrow \quad F_r = -mg \cdot \sin\varphi \approx -mg \cdot \varphi$$

für kleine φ



Für den Kreisbogen *b* (Null-Lage – Ort von *m*) erhält man:

$b \sim \; x = l \cdot \varphi$ $\qquad \varphi$ klein!

$$\dot{x} = l \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = l \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\overset{2.Newt.Axiom}{\Rightarrow} \quad m\ddot{x} = ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0}$$

DGL des mathematischen Pendels

Lösung: $\varphi(t) = \varphi_o \sin \omega_o t$ => $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$

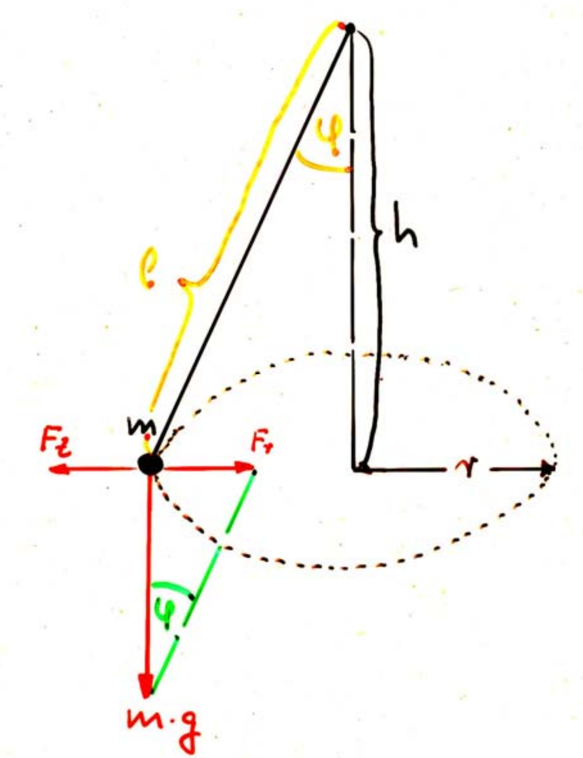
$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Schwingungsdauer des math. Pendels

Beispiel 2: Konisches Pendel (Kreispendel)

Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft stehen im Gleichgewicht:

$$F_r = mg \cdot \tan\varphi \quad \text{da} \quad \tan\varphi = \frac{F_r}{mg}$$



$$F_z = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \frac{4\pi^2}{T_o^2}$$

$$F_z = F_r \quad \text{=>} \quad mg\tan\varphi = mr\frac{4\pi^2}{T_o^2}$$

$$r = l\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

=>

$$g\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = l\sin\varphi \cdot \frac{4\pi^2}{T_o^2}$$

Daraus erhalten wir die Schwingungsdauer des konischen Pendels

$$T_o^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \cos\varphi \quad \rightarrow \qquad \boxed{T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\cos\varphi}}$$

Reihenentwicklung von $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \cdots$$

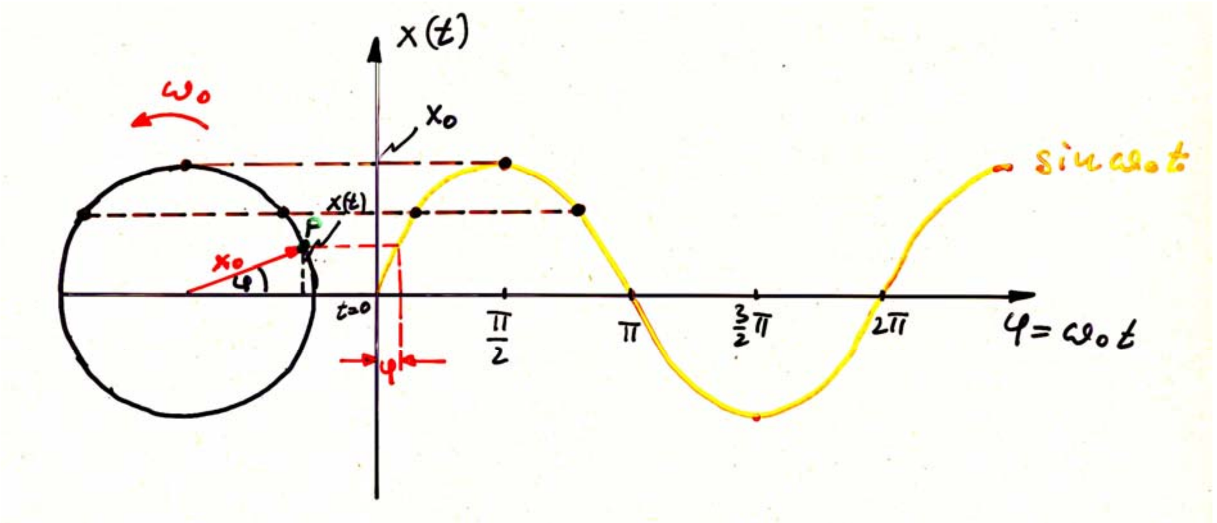
Bei kleinen Winkeln ist schon die 2. Potenz von φ vernachlässigbar klein =>

$$\boxed{T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Schwingungsdauer des konischen Pendels

Die Schwingungsdauer des konischen (Kreis-) Pendels ist gleich der des ebenen (mathematischen) Pendels.

Die harmonische Schwingung kann man also auch als Kreisbewegung eines Punktes (oder eines Vektors bzw „Zeigers“) mit konstanter Geschwindigkeit betrachten:



Aufgetragen wird die Projektion des sich drehenden Zeigers der Länge x_o auf die $x(t)$- Achse über dem Winkel $\varphi = \omega_o t$. Zur Zeit *t* ist der Zeiger gerade im Punkt *P* angelangt.

Es gilt dann:

$$\sin\varphi = \frac{x(t)}{x_o} \quad => \quad x(t) = x_o \sin\varphi$$

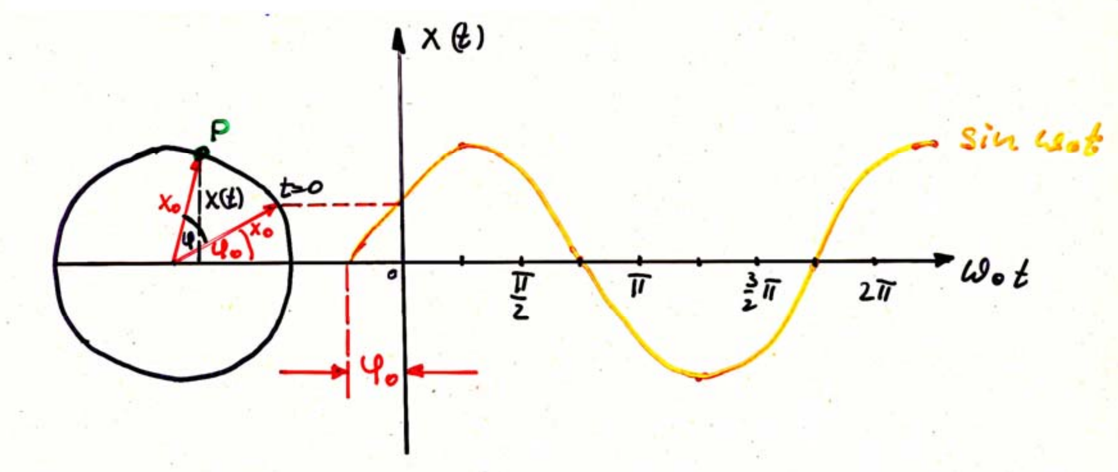
$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T_o} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{2\pi}{T_o} t = \omega_o t$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \sin \omega_o t}$$

Steht der Zeiger zur Zeit $t = 0$ beim Winkel φ_o (Phasenwinkel), dann erhält man folgendes Bild:

$$\sin(\varphi + \varphi_o) = \frac{x(t)}{x_0}$$

$$\boxed{x(t) = x_o \sin(\omega_o t + \varphi_o)}$$



Man sieht, dass der Zeiger mit dem Phasenwinkel φ_o vorauseilt".

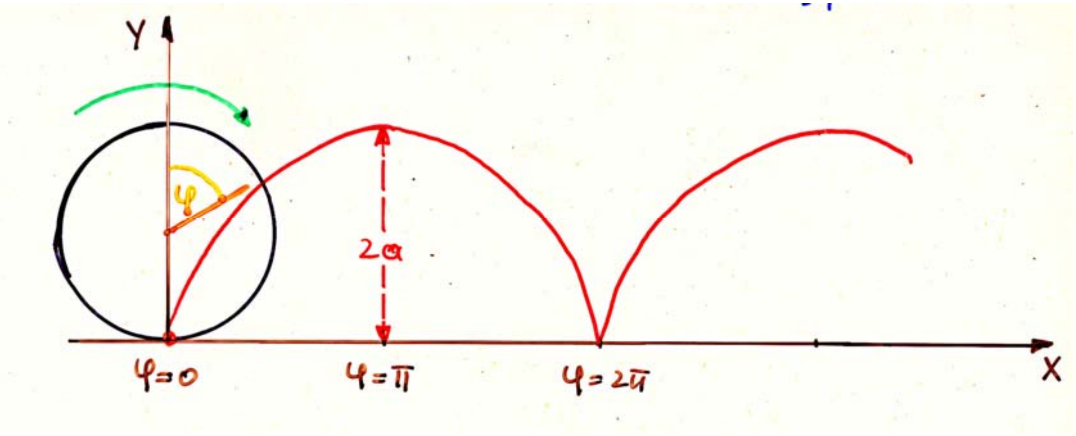
Das Zykloidenpendel

Für beliebige Winkel φ wird die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels:

$$T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi}{2} + \cdots\right)$$

Die Schwingungsdauer ist also abhängig vom Pendelausschlag!
Ein Pendel, das unabhängig von φ ist, ist das Zykloidenpendel.
Bei diesem Pendel wird der Massenpunkt nicht auf einem Kreis-, sondern auf einem Zykloidenbogen geführt.

Erzeugung einer Zykloide:
Verfolgung der Bahn eines Punktes auf dem Umfang eines abrollenden Rades.



Die allgemeine Parameterdarstellung der Zykloide lautet:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

Bei einem Zykloiden<u>pendel</u> sind die Spitzen nach oben gekehrt und wir erhalten die Parameterdarstellung:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = a(1 + \cos\varphi) \qquad (*)$$

Die Schwerkraftkomponente des Massenpunktes längs der Tangente der Zykloide ist:

$$F_s = -mg\cos(y, s) = -mg\frac{dy}{ds}$$

$$\overset{2.Newt.Axiom}{\Rightarrow} \qquad m \cdot \dot{v} = -mg\frac{dy}{ds} \qquad (**)$$

Differentiation von (*): $dx = a(1-\cos\varphi)d\varphi \qquad dy = -a\sin\varphi \cdot d\varphi$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2 - 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right)d\varphi^2$$

$$= a^2\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi^2$$

$$= a^2(2 - 2\cos\varphi)d\varphi^2$$

$$ds = 2a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

=> $$v = \frac{ds}{dt} = 2a\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -4a\frac{d}{dt}\cos\frac{\varphi}{2}$$

und $$\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi/2} = -\cos\frac{\varphi}{2}$$

Einsetzen in (**):

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{g}{4a}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Homogene DGL
des Zykloidenpendels

Diese DGL unterscheidet sich von der DGL des mathematischen Pendels nur durch die Variable. Die Lösung ist die gleiche:

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

mit $l = 4a$

Diese Gleichung ist unabhängig vom Ausschlag des Pendels.

Wir berechnen die Schwingungsenergie der harmonischen Schwingung (Federpendel):

a) potentielle Energie:

$$E_{pot} = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

(F wirkt gegen die Federkraft)

Wir setzen die potentielle Energie der Ruhelage gleich Null:

$$E_{pot} = -\int_{0}^{x} F(x)dx \qquad F(x) = -Dx$$

$$E_{pot} = \int_{0}^{x} D \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \rightarrow \quad E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}Dx_0^2 \cdot \sin^2 \omega_o t$$

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}Dx_0^2 \cdot \sin^2 \omega_o t}$$

Potentielle Energie des Feder - pendels im Punkt x

b) kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\omega_o x_o \cos\omega_o t\right)^2$$

Da $\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \omega_o^2 = \frac{D}{m} \rightarrow D = m \cdot \omega_o^2$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}Dx_0^2 \cdot \cos^2 \omega_o t}$$

Kinetische Energie des Federpendels im Punkt x

Für die <u>Gesamtenergie</u> der harmonischen Schwingung des Feder-pendels erhalten wir damit:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} D x_0^2 \underbrace{\left(\sin^2 \omega_o t + \cos^2 \omega_o t\right)}_{=1}$$

$$\boxed{E_{ges} = \frac{1}{2} D x_0^2 = const}$$

a) Da bei einer ungedämpften Schwingung die Amplitude konstant bleibt, bleibt auch die Energie (zeitlich) konstant.

b) Die Gesamtenergie ist proportional zum Quadrat der Amplitude

c) Bei einem Federpendel wandelt sich ständig potentielle in kinetische Energie um und umgekehrt.

<u>Superposition (Überlagerung) von Schwingungen</u>

Wir unterscheiden zwei Hauptfälle:

1. Gleiche Schwingungsrichtung (parallel oder antiparallel)
2. Zueinander senkrechte Schwingungsrichtungen.

Die Einzelschwingungen können sich weiter durch ihre Frequenz ν und ihre Amplitude *a* unterscheiden.

Wir behandeln zunächst <u>Fall 1</u>:

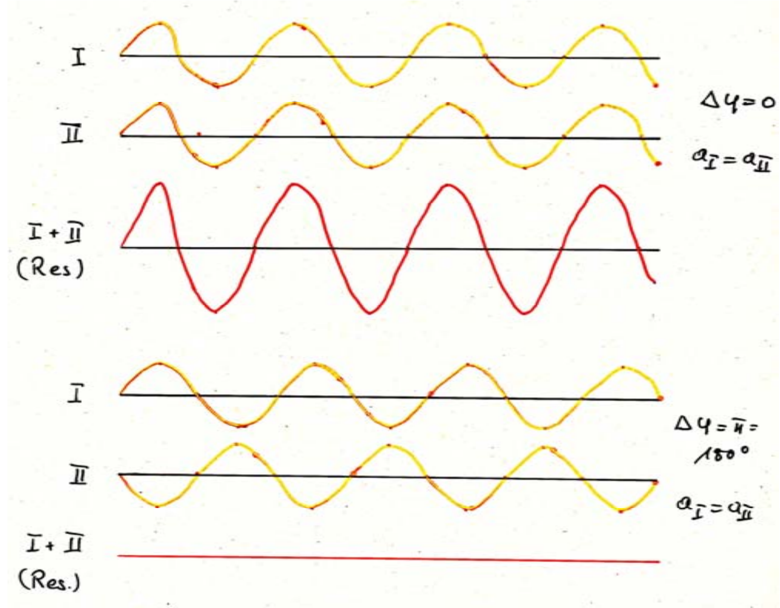
a) <u>gleiche</u> Frequenz, Überlagerung von zwei Schwingungen:

$$x_I(t) = a_I \sin\left(\omega t + \varphi_I\right)$$
$$x_{II}(t) = a_{II} \sin\left(\omega t + \varphi_{II}\right)$$

Der Phasenunterschied beider Schwingungen ist dann:

$$\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_{II}$$

Zwei besondere Fälle ergeben sich für $\Delta\varphi = 0$ und $\Delta\varphi = \pi = 180^o$:



Die beiden Schwingungen I und II stören sich bei der Überlagerung <u>nicht</u>, sie verhalten sich <u>additiv</u>:

$$x(t) = x_I(t) + x_{II}(t) = a_I \sin(\omega t + \varphi_I) + a_{II} \sin(\omega t + \varphi_{II})$$

Mit $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ erhalten wir:

$$x(t) = a_I(\sin\omega t \cos\varphi_I + \cos\omega t \sin\varphi_I) + a_{II}(\sin\omega t \cos\varphi_{II} + \cos\omega t \sin\varphi_{II})$$

Wir ordnen nach $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$:

$$x(t) = \sin \omega t \cdot \{a_I \cos \varphi_I + a_{II} \cos \varphi_{II}\} + \cos \omega t \cdot \{a_I \sin \varphi_I + a_{II} \sin \varphi_{II}\}$$

Wir kürzen ab:

$$\left.\begin{aligned} a_I \cos \varphi_I + a_{II} \cos \varphi_{II} &= a_r \cos \varphi_r \\ a_I \sin \varphi_I + a_{II} \sin \varphi_{II} &= a_r \sin \varphi_r \end{aligned}\right\} *$$

φ_r erhält man aus der Division der Gleichungen *:

$$\boxed{\tan \varphi_r = \frac{a_I \sin \varphi_I + a_{II} \sin \varphi_{II} = a_r \sin \varphi_r}{a_I \cos \varphi_I + a_{II} \cos \varphi_{II} = a_r \cos \varphi_r}}$$

Bestimmungsgleichung für φ_r

a_r erhält man aus * durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen:

$$a_r^2 \cos^2 \varphi_r = a_I^2 \cos^2 \varphi_I + a_{II}^2 \cos^2 \varphi_{II} + +2 a_I a_{II} \cos \varphi_I \cos \varphi_{II}$$

$$a_r^2 \sin^2 \varphi_r = a_I^2 \sin^2 \varphi_I + a_{II}^2 \sin^2 \varphi_{II} + +2 a_I a_{II} \sin \varphi_I \sin \varphi_{II}$$

Addition =>

$$a_r^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r}_{=1}) = a_I^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi_I + \sin^2 \varphi_I}_{=1}) + a_{II}^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi_{II} + \sin^2 \varphi_{II}}_{=1})$$

$$+ 2 a_I a_{II} (\underbrace{\cos \varphi_I \cos \varphi_{II} + \sin \varphi_I \sin \varphi_{II}}_{\cos(\varphi_I - \varphi_{II})})$$

mit $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ erhalten wir:

$$\boxed{a_r^2 = a_I^2 + a_{II}^2 + 2 a_I a_{II} \cos \Delta\varphi}$$

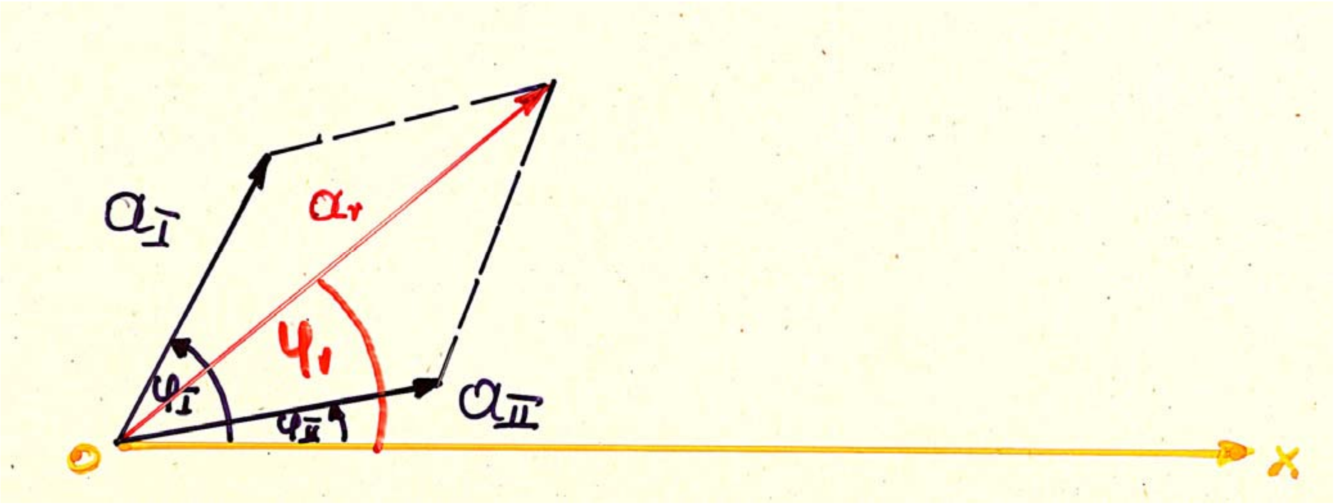
(**) <u>Bestimmungsgleichung für</u> a_r

Wir setzen * ein in die Gleichung der zusammengesetzten Schwingung:

$$x(t) = x_I(t) + x_{II}(t) = a_r(\sin\omega t \cos\varphi_r + \cos\omega t \sin\varphi_r) = a_r \sin(\omega t + \varphi_r)$$

Wir sehen: die Frequenz hat sich gegenüber der Ausgangsschwingung nicht geändert, wohl aber Phase und Amplitude.

Auffinden der Amplitude und der Phase durch eine geometrische Konstruktion:



Wir untersuchen die oben behandelten Fälle:

α) $\Delta\varphi = 0 \rightarrow \varphi_I = \varphi_{II} \rightarrow a_I = a_{II} = a$ keine Phasendifferenz, gleiche Amplituden.

Glchg ** => $a_r^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \underbrace{\cos\Delta\varphi}_{=1}$

$$a_r^2 = 4a^2 \rightarrow \boxed{a_r = 2a}$$

Glchg * => $2a \cdot \cos\varphi_I = a_r \cdot \cos\varphi_r \rightarrow \boxed{\varphi_I = \varphi_{II} = \varphi_r}$

Neue Schwingungsgleichung:

$$\boxed{x(t) = 2a\sin(\omega t + \varphi_I)}$$

Ergebnis: Doppelte Amplitude, keine Phasenverschiebung.

β) $\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_{II} = \pi$, $a_I = a_{II} = a$

Glchg **=> $(\cos\pi = -1)$! $a_r^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$

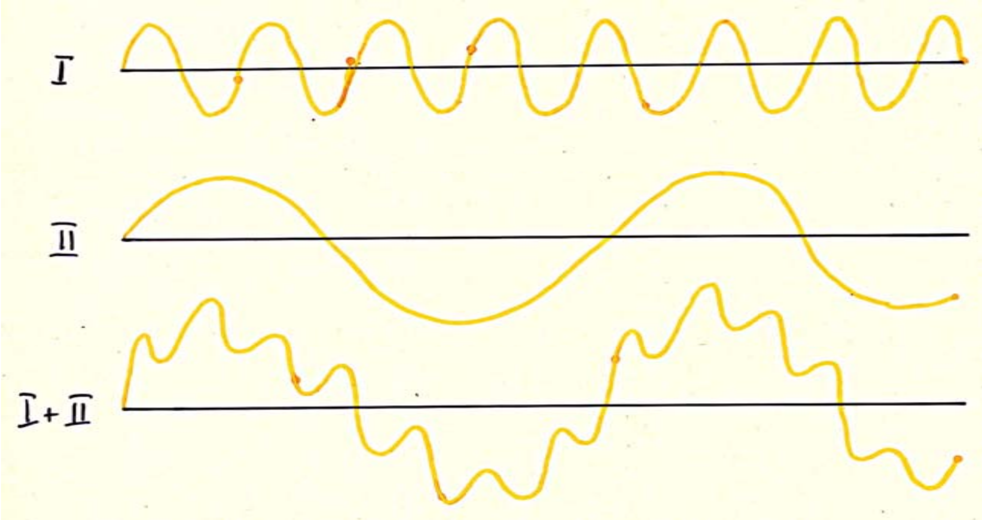
$\rightarrow$ $\boxed{x(t) = 0}$

Ergebnis: Die beiden Schwingungen löschen sich aus.

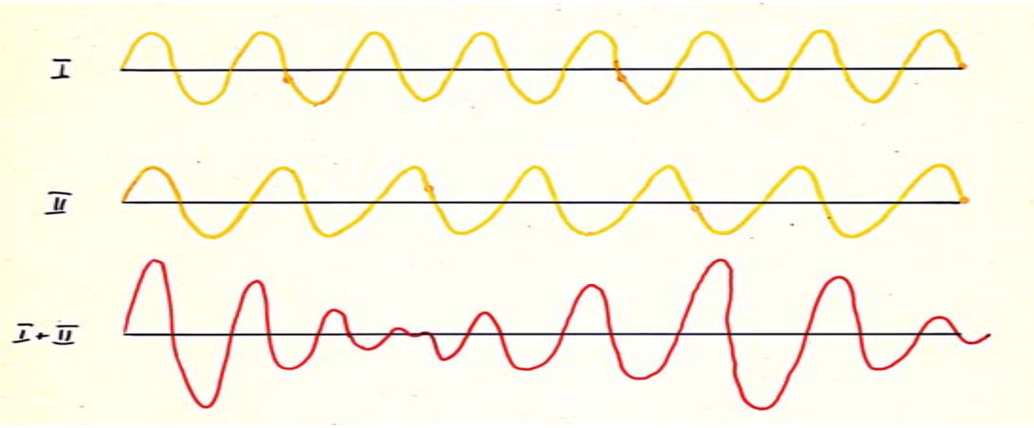
Das Ergebnis der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und gleicher Frequenz ist eine harmonische Schwingung gleicher Schwingungsrichtung und Frequenz, aber verschiedener Amplitude

b) verschiedene Frequenz

Ergebnis der Überlagerung:
die resultierende Schwingung ist nicht mehr sinusförmig.
Sie ist periodisch, wenn die Frequenzen der Schwingungen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen.



Wir betrachten die Überlagerung zweier Schwingungen mit wenig voneinander verschiedenen Frequenzen:



Das Ergebnis ist eine Schwebung

Es sei $a_I = a_{II} = a \quad \rightarrow \quad x_I(t) = a \cdot \sin \omega_I t$

$$x_{II}(t) = a \cdot \sin \omega_{II} t$$

Unter Verwendung von

$$\sin(x \pm y) = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$

folgt:

$$x(t) = x_I + x_{II} = 2a \sin \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2} t$$

Wir erhalten zwei neue Frequenzen:

$\dfrac{\omega_I + \omega_{II}}{2}$ und $\dfrac{\omega_I - \omega_{II}}{2}$ für die gilt:

$$\frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} > \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}$$

D.h. $\cos\frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}t$ ändert sich nur langsam gegenüber $\sin\frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}t$

Wir können die resultierende Schwingung daher als eine harmonische Schwingung auffassen, deren Amplitude $a^* = 2a \cdot \cos\frac{1}{2}(\omega_I - \omega_{II})t$ sich zeitlich ändert.

Die Schwebungsfrequenz erhält man aus der Überlegung, dass sich $\cos(\frac{1}{2}(\omega_I - \omega_{II}) \cdot t)$ von +1 nach -1 verändern muss (eine komplette Schwingung). Das Argument muss sich dann um π ändern:

$$\frac{\omega_I - \omega_{II}}{2} \cdot T_s = \pi \quad \rightarrow \quad T_s = \frac{2\pi}{\omega_I - \omega_{II}} = \frac{1}{\nu_I - \nu_{II}} = \frac{1}{\nu_s}$$

$$\boxed{\nu_s = \nu_I - \nu_{II}}$$

Die Schwebungsfrequenz ist die Differenz der Frequenzen der Ausgangsschwingungen.

Fall 2: Zueinander senkrechte Schwingungsrichtungen

Wir betrachten zwei Schwingungen (je eine in x- und in y-Richtung) mit gleicher Frequenz:

$$x = a \cdot \sin \omega t \qquad y = b \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$y = b \cdot \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \quad (**)$$

$$(*) \Rightarrow \quad \sin \omega t = \frac{x}{a}$$ und, da $\cos^2 \omega t = 1 - \sin^2 \omega t$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Einsetzen in (**)=>

$$y = \frac{b \cdot x}{a} \cos \varphi + b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin \varphi$$

Durch Umformung folgt daraus:

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin\varphi$$

/ quadrieren

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \sin^2\varphi$$

$$\frac{y^2}{b^2}\frac{x^2}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi - \frac{x^2}{a^2} \cdot \sin^2\varphi$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

Gleichung eines Kegelschnitts (Ellipse)

Wir betrachten spezielle Fälle:

$\underline{\varphi = 0}$: $$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}=0 \rightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0 \rightarrow \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x}$$

Gleichung einer Geraden mit der Steigung $\tan\psi=\dfrac{b}{a}$

$\underline{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ $$\rightarrow \sin\varphi=1 \rightarrow \cos\varphi=0$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ellipsengleichung in bekannter Form

$$\varphi = \pi \quad \rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = 1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$

Geradengleichung mit der Steigung $\tan\psi = -\frac{b}{a}$

Für Werte von φ zwischen Null und π nimmt die Ellipse jede Zwischengestalt an.

Die entstehenden Figuren nennt man Lissajous - Figuren

Erzwungene, ungedämpfte Schwingung

Wird die Schwingung durch eine antreibende, die Schwingung erzwingende Kraft erzeugt, dann gilt folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = c^{*} \sin \omega t}$$

Wegen des Hinzutretens der rechten Seite ist die eine inhomogene lineare DGL.

Die Lösung einer solchen DGL erhält man aus einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist:

$$x = C \cdot \sin \omega t$$

$$\dot{x} = C \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -C\omega^2 \cdot \sin \omega t$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$-C \cdot m \cdot \omega^2 + C \cdot D = c^* \quad \rightarrow \quad C\left(D - m\omega^2\right) = c^*$$

Wir benutzen die oben abgeleitete Beziehung für die Eigenfrequenz:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \rightarrow \quad D = \omega_o^2 \cdot m$$

Damit erhalten wir:

$$C\left(m\omega_o^2 - m\omega^2\right) = c^* \quad \rightarrow \quad C\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) = \frac{c^*}{m}$$

=> $$\boxed{C = \frac{c^*/m}{\omega_o^2 - \omega^2}}$$

Amplitude der erzwungenen ungedämpften Schwingung

Als allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL setzen wir an:

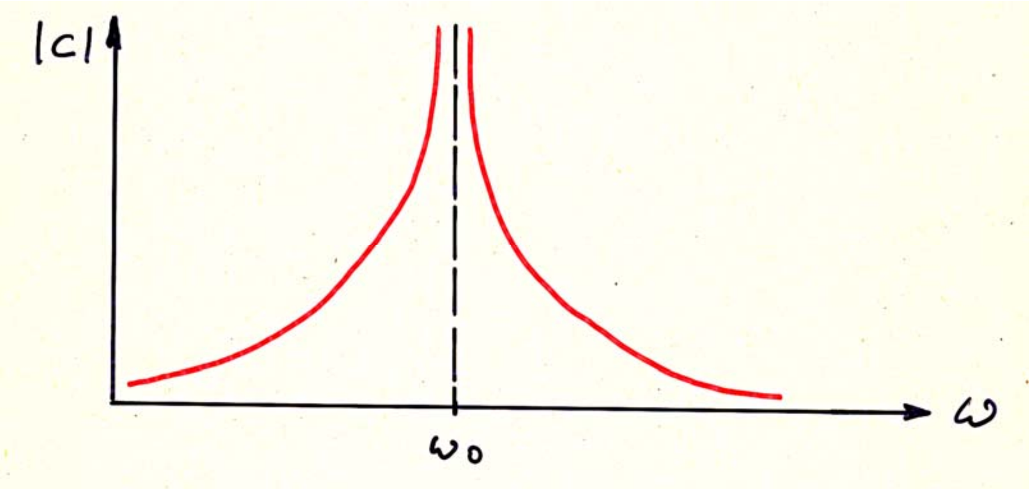
$$A \cdot \cos \omega_o t + B \cdot \sin \omega_o t$$

=> allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$x(t) = A\cos \omega_o t + B\sin \omega_o t + C\sin \omega t$$

Die Festlegung der Konstanten (Amplituden) *A*, *B* und *C* erfolgt durch Wahl der Anfangsbedingungen.

Die Amplitude *C* wird für wachsende ω größer, bis sie für $\omega = \omega_o$ unendlich groß wird. Wir betrachten $|C|$ als Funktion von ω :



Die Erscheinung des „Unendlich Werdens“ der Amplitude nennt man Resonanz. (Resonanz zwischen freier und erzwungener Schwingung)

Freie gedämpfte Schwingung

Die freie gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch die DGL:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = -w \cdot \dot{x}}$$

$-w\dot{x}$ ist ein geschwindigkeitsproportionales Reibungsglied.

Die DGL ist linear und homogen.

Wir setzen: $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

und: $2\rho = \frac{w}{m}$ $\qquad \rho \rangle 0$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Lösungsansatz:

$$x = Ce^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda Ce^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

Einsetzen in die DGL liefert: $\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung: $\lambda = \pm\sqrt{-\omega_o^2 + \rho^2} = \lambda_{1,\lambda_2}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der DGL: $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ (*)

Da der Dämpfungskoeffizient w die Dimension $l \cdot t^{-1}$ hat, besitzt ρ die Dimension einer Frequenz.

Zu unterscheiden sind die Fälle, in denen ρ größer oder kleiner als ω_o ist.

a) $\rho < \omega_o$

Wir wählen als Anfangsbedingungen: $x = 0$ für $t = 0$:

$$(*) \Rightarrow \quad 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = -C_1}$$

Da $\rho < \omega_o$ folgt für λ : $\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2}$

Einsetzen in (*) :

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\rho + i\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2})t} - C_1 e^{(-\rho - i\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2})t}$$

$$= C_1 e^{-\rho t}\left(e^{i\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2}\,t} - e^{-i\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2}\,t} \right)$$

$$\boxed{x(t) = 2C_1 e^{-\rho t} \cdot \sin \underbrace{\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2}}_{=\omega_d} t}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \rho^2} = \frac{2\pi}{T_d} \qquad \rightarrow \qquad T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \rho^2}}$$

Die Dämpfungsfrequenz ist also von der Eigenfrequenz ω_o verschieden (ω_d < ω_o).

$e^{-\rho \cdot t}$ nennt man den Dämpfungsfaktor

$\rho \cdot T_d = \Lambda$ nennt man das logarithmische Dekrement

Welche Bedeutung hat Λ ?

Wir bilden das Verhältnis der Amplituden zweier aufeinander folgenden Schwingungen:

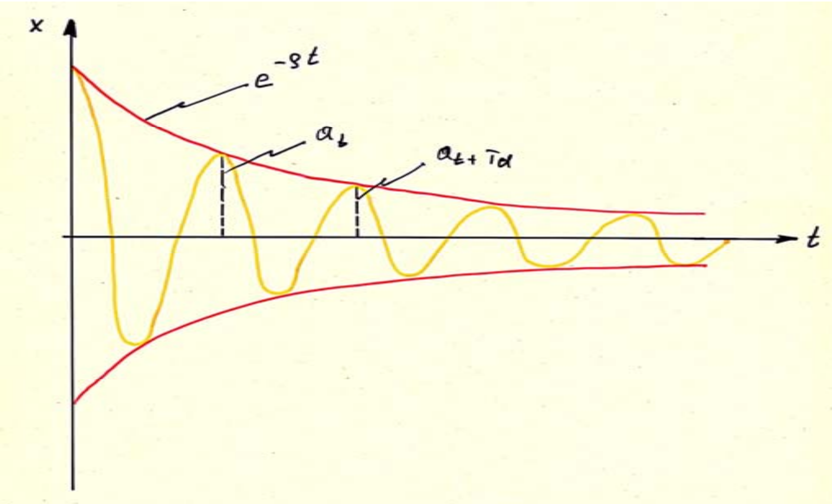
$$a_t = 2C_1 e^{-\rho \cdot t} \qquad a_{t+T_d} = 2C_1 e^{-\rho \cdot (t+T_d)}$$

$$\frac{a_t}{a_{t+T_d}} = \frac{2C_1 e^{-\rho \cdot t}}{2C_1 e^{-\rho \cdot (t+T_d)}} = e^{-\rho \cdot t + \rho \cdot t + \rho \cdot T_d} = e^{\rho \cdot T_d}$$

Das Amplitudenverhältnis ist also konstant und hängt nur von der Schwingungsdauer T_d ab. Das logarithmische Dekrement erhält man aus:

$$\ln\left(\frac{a_t}{a_{t+T_d}}\right) = \ln e^{\rho \cdot T_d} = \rho \cdot T_d = \Lambda$$

a_t und T_d sind messbar, daher ist die Bestimmung von Λ und ρ über obige Gleichung gut möglich.



b) $\rho > \omega_o$:

Dies ist der Fall der aperiodischen Dämpfung.
Wir erhalten mit den gleichen Anfangsbedingungen analog der obigen Rechnung:

$$x(t) = 2C_1 e^{-\rho \cdot t} \cdot \sinh\left(\sqrt{\rho^2 - \omega_o^2} \cdot t\right)$$

Die Schwingung ist in diesem Fall so stark gedämpft, dass höchstens <u>eine</u> volle Schwingung ausgeführt wird.
Beispiel: Federpendel in Öl oder Wasser

Zahlenwerte für die Dämpfung werden über das Neper und das Bel, bzw Dezibel (dB) angegeben:
Ein Neper (Np) ist der natürliche Logarithmus eines (dimensionslosen) Verhältnisses zweier Größen, die für die Dämpfung charakteristisch sind (z.B. Amplituden- oder Intensitätsverhältnisse)

Beispiel:

$$3NP \rightarrow \ln \frac{a_t}{a_{t+T_d}} = 3$$ (in diesem Fall = Λ)

Ein Bel ist der dekadische Logarithmus des Amplitudenverhältnisses a_t / a_{t+T_d} :

$$\boxed{1 Bel = {}_{10}\log\left(a_t / a_{t+T_d}\right)}$$

Im praktischen Gebrauch ist das Dezibel (dB):

1 *dB* = 0.1 *Bel*

Erzwungene gedämpfte Schwingung

Die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung ist gegeben durch:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + w \cdot \dot{x} + D \cdot x = c \cdot \sin \omega t}$$

Mit den bisher benutzten Abkürzungen

$\omega_o^2 = \frac{D}{m}$ und $2 \cdot \rho = \frac{w}{m}$ erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{m} \cdot \sin \omega t = \frac{c}{2mi}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

Diese inhomogene DGL hat neben der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL, die wir ansetzen:

$$x = |C| \cdot \sin(\omega t + \delta) = \frac{|C|}{2i}\left(e^{i(\omega t + \delta)} - e^{-i(\omega t + \delta)}\right)$$

$$\dot{x} = \frac{|C|}{2i} \cdot i\omega e^{i\delta} e^{i\omega t} - \frac{C}{2i}(-\omega) e^{-i\delta} e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{x} = \frac{|C|}{2i}(i)^2 \omega^2 e^{i\delta} e^{i\omega t} - \frac{|C|}{2i}(-i)^2 \omega^2 e^{-i\delta} e^{-i\omega t}$$

Einsetzen in die DGL und Vergleich der Faktoren von $e^{\pm i\omega t}$ liefert:

$$|C|\left(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2\right)e^{i\delta} = \frac{c}{m}$$

$$|C|\left(-\omega^2 - 2i\rho\omega + \omega_0^2\right)e^{-i\delta} = \frac{c}{m}$$

Durch Multiplikation bzw Division dieser Beziehungen erhalten wir:

$$|C|^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\rho^2\omega^2}$$

$$e^{2i\delta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}$$

Wir erhalten als Lösung:

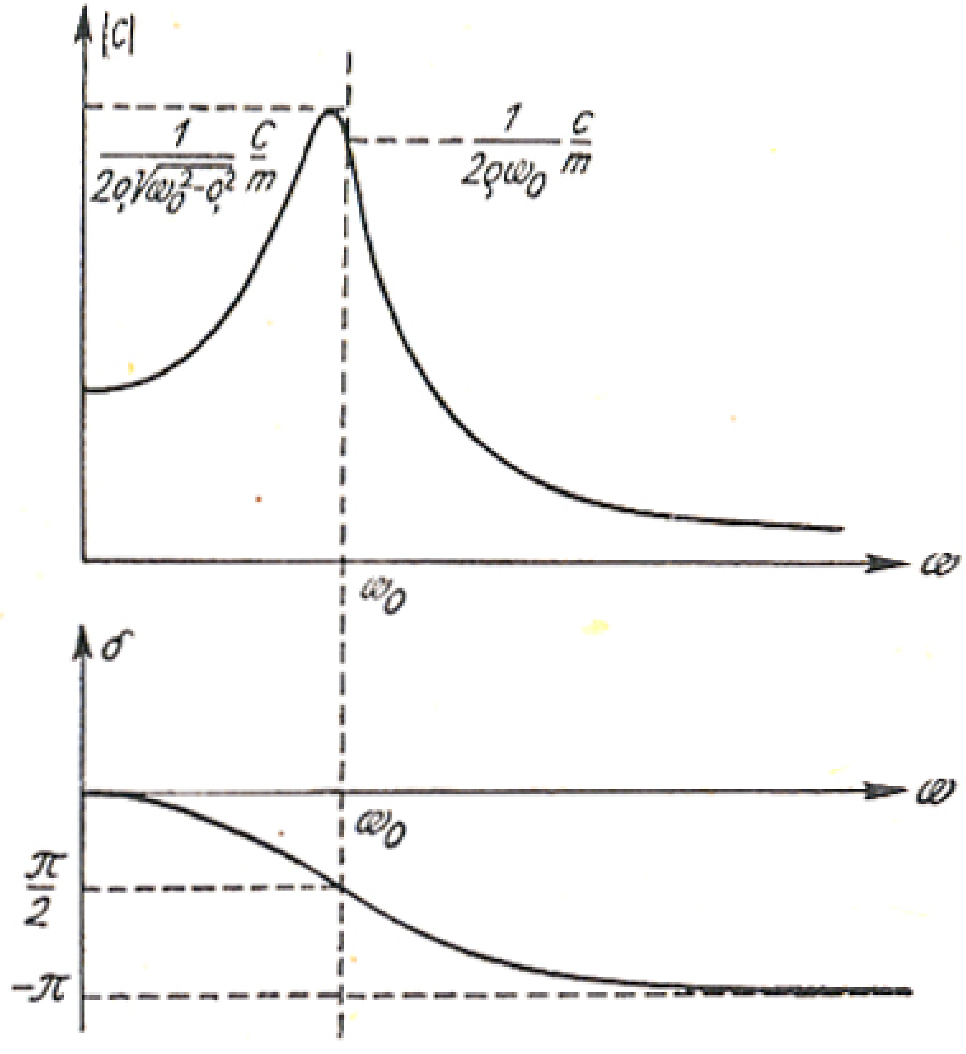
$$\boxed{\left|C\right| = \frac{c}{m}\frac{1}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\cdot\rho^2\omega^2}}$$

Amplitude der erzwungenen gedämpften Schwingung

und

$$\boxed{\tan\delta = \frac{2\rho\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}}$$

Phasenwinkel zwischen Resonator und Erreger bei der erzwungenen gedämpften Schwingung

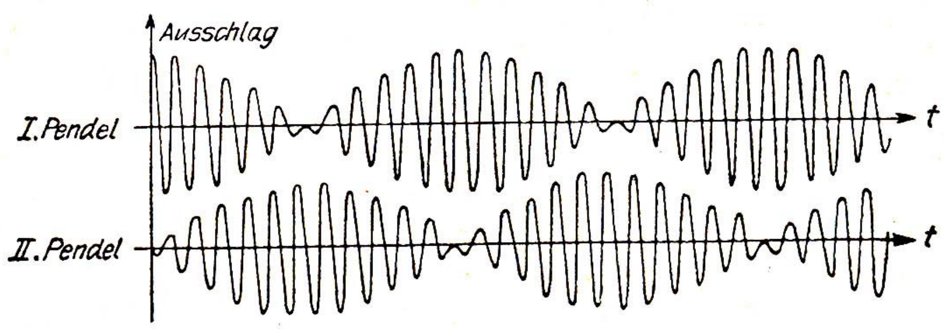


|c|
$\frac{1}{2\varrho\sqrt{\omega_0^2-\varrho^2}}\frac{c}{m}$
$\frac{1}{2\varrho\omega_0}\frac{c}{m}$
ω
ω_0
δ
ω
ω_0
$\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

Gekoppelte Pendel

Wir betrachten zwei gleich lange und gleich schwere Pendel, die in der selben Ebene schwingen. Sie seien durch eine *lose* Kopplung miteinander verbunden.

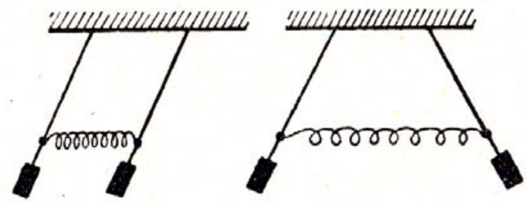
Wird das erste Pendel angeregt, während das zweite in Ruhe bleibt, ergibt sich folgendes Schwingungsbild:



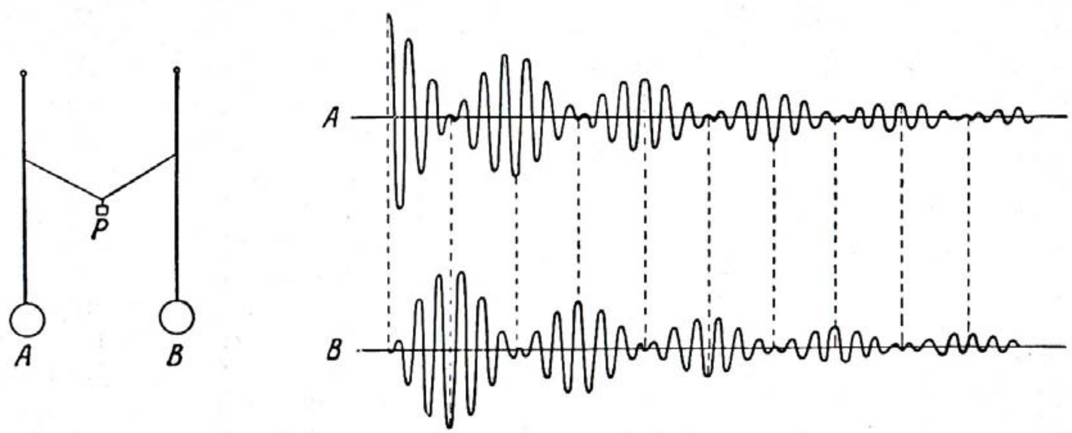
Jedes der beiden Pendel führt eine Schwebung aus.

Die Energie wechselt vom einen zum anderen Pendel.

Werden beide Pendel gleichsinnig angeregt, dann findet kein Austausch von Energie statt. Die beiden Pendel führen Eigenschwingungen (Haupt- bzw. Fundamentalschwingungen) aus.



Unter Berücksichtigung der Dämpfung erhalten wir für den Resonanzfall folgendes Bild:



Wir berechnen die Schwingungen des gekoppelten Pendels.

Ann.: keine Dämpfung, kleine Ausschläge,

Pendel 1: $x_1(t)$, Pendel 2: $x_2(t)$. k ist der „Kopplungskoeffizient" (durch die Masse dividierte Federspannung bei der Verlängerung 1).

Die simultanen DGL lauten:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -k\left(x_1 - x_2\right)\\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -k\left(x_2 - x_1\right)\end{aligned} \qquad (*)$$

Wir setzen:

$$z_1 = x_1 - x_2 \qquad\qquad z_2 = x_1 + x_2$$

und erhalten durch Subtraktion bzw. Addition von (*)

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \quad \rightarrow \quad \ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \qquad (**)$$

mit den Frequenzen:

bei z_1: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \approx \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}$

bei z_2: $\omega' = \omega_0$

Die Gleichungen (**) werden allgemein integriert durch:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ z_2 &= a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t \end{aligned} \qquad (***)$$

Für die Anfangsbedingungen (Anregungszeitpunkt) gelte:

$$x_2 = \dot{x}_2 = 0 \qquad \dot{x}_1 = 0 \qquad x_1 = C$$

Daraus folgt für die z:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0 \qquad z_1 = z_2 = C$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0 \qquad a_1 = a_2 = C$$

$$z_1 = C \cos \omega t \qquad z_2 = C \cos \omega' t$$

Für die Schwingungen erhalten wir daraus:

$$x_1 = \frac{z_2 + z_2}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t$$

$$x_2 = \frac{z_2 - z_2}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t$$

Wir sehen aus (***), dass bei loser Kopplung gilt: $\dfrac{\omega' - \omega}{2} = \dfrac{k}{2\omega_0} \ll 1$

Die ersten Faktoren auf der rechten Seite sind langsam veränderlich

$\rightarrow$ Schwebung