

Tacoma Bridge: Momentaufnahmen vorm Einsturz am 7. November 1940

VERSUCHSANLEITUNG FÜR DAS ANFÄNGERPRAKTIKUM

A05 Pohlsches Drehpendel

20. Oktober 2025

Raum MD165

Inhaltsverzeichnis

1	Informationen	3
1.1	Literatur	3
1.2	Stichworte	3
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Freie ungedämpfte Schwingung	4
2.2	Freie gedämpfte Schwingung	5
2.3	Lösung der DGL zur gedämpften Drehschwingung	7
3	Versuchsdurchführung	9
3.1	Geräte- und Materialliste	9
3.2	Versuchsaufbau	10
3.3	Aufgabenstellung & Versuchsauswertung	11

Abbildungsverzeichnis

1	Pendeltypen	4
2	Gedämpfte Schwingung	6
3	Erzwungene Schwingung	9
4	Aufbau nach Pohl	10
5	Stromversorgung	10

1 Informationen

1.1 Literatur

1. Gerthsen, Kneser, Vogel
2. Anleitungen Leybold Didactic
3. Demtröder Band 1
4. Wikimedia (Tacoma Narrows Bridge)

1.2 Stichworte

- Harmonische Schwingungen
- Dämpfung
- Freie, gedämpfte und erzwungene Schwingungen
- Eigenfrequenz
- Schwingfall
- Aperiodischer Grenzfall
- Kriechfall

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Wirkt auf einen beweglichen Körper, der aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde, lediglich eine der Auslenkung entgegen gerichtete und zu ihr proportionalen Kraft, wird er eine *harmonische Schwingung* um seine Ruhelage ausüben, d.h. seine Auslenkung wird allgemein durch eine Linearkombination der Zeitfunktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ beschrieben; es handelt sich um eine *freie ungedämpfte harmonische Schwingung*. Die Maximalauslenkung und Energie dieser Schwingung ist zeitlich konstant.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist das mathematische Schwerependel (Abb. 1 a). Dieses Fadenpendel ist idealisiert, da seine Masse m punktförmig, der Faden mit Länge l dehnungsfrei und masselos und darüber hinaus die Aufhängung und Bewegung des Pendels als reibungsfrei angenommen wird. Ist die Bogenlänge $s = l\varphi$ die Auslenkung der Masse m , wirkt aufgrund der Schwerkraft F_G die Kraft $F_S = -mg \cdot \sin \varphi$ in Richtung der Auslenkung. Für kleine Winkel φ ist $\sin \varphi \approx \varphi$ und $F_S \approx mg\varphi = \frac{mgs}{l}$, sodass dann die Bewegungsgleichung des Pendels lautet:

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0. \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen homogenen Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung für die zeitabhängige Auslenkung $s(t)$ lautet:

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (2)$$

s_0 ist die Amplitude der Schwingung, $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Kreisfrequenz, f_0 die Frequenz, T_0 die Schwingungsdauer und α ein Phasenwinkel. s_0 und α sind durch die Anfangsbedingungen der Schwingung $s(0)$ und $\dot{s}(0)$ festgelegt.

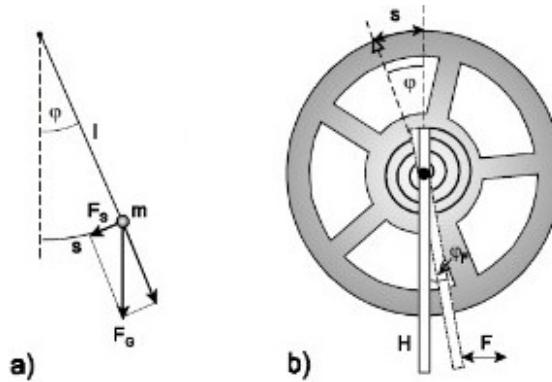


Abbildung 1: Pendeltypen: a) Mathematisches Pendel, b) Drehpendel.

2.2 Freie gedämpfte Schwingung

Im makroskopischen, mechanischen Systemen kommen ungedämpfte Schwingungen selten vor. Ein reales Pendel erfährt während seiner Bewegung Reibungskräfte, z.B. bedingt durch die Reibung der Lager. Ein Beispiel für ein solches reales Pendel ist das in diesem Versuch eingesetzte Drehpendel nach Pohl (Abb. 1 b). Eine runde Metallscheibe ist im Zentrum mit einer horizontal liegenden Drehachse gelagert. Mit der Drehachse verbunden ist das innere Ende einer um die Achse gewundenen Spiral-Blattfeder. Deren äußeres Ende ist an einem ebenfalls um die Achse drehbaren Hebel H befestigt. Wird bei festgehaltenem Hebel die Scheibe um einen (kleinen) Winkel φ aus der Ruhelage gedreht, bewirkt die dadurch erzeugte Spannung der Feder ein rücktreibendes Drehmoment $M_D = -D\varphi$. D ist die Winkelrichtgröße der Feder. Ist die Reibung des Pendels viskos, z.B. infolge der inneren Reibung des Ölfilms im Drehlager oder der Wirkung einer am Pendel montierten Wirbelstrombremse (s.u.), wirkt ein weiteres, die Bewegung hemmendes Drehmoment $M_R = -R\dot{\varphi}$.

Die Bewegungsgleichung für φ bzw. die Auslenkung $s = r\varphi$ des Pendels (r ist der Scheibenradius) lautet damit:

$$I\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (3)$$

I ist das Trägheitsmoment der Scheibe (s. Versuch A08, Trägheitsmomente), $2\beta = \frac{R}{I}$ ein Reibungskoeffizient, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ die Kreisfrequenz der ungedämpften Pendelschwingung. Die Lösung der DGL (3) hat die Form

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Einsetzen in Gleichung (3) führt zu der Form

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (5)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (6)$$

Die allgemeine Lösung für die Pendelbewegung ist mit den Gleichungen (4) und (6) die Linearkombination

$$s(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}. \quad (7)$$

Werden die speziellen Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ und $\ddot{s}(0) = 0$ gewählt, lautet die Lösung

$$s(t) = \frac{s_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}). \quad (8)$$

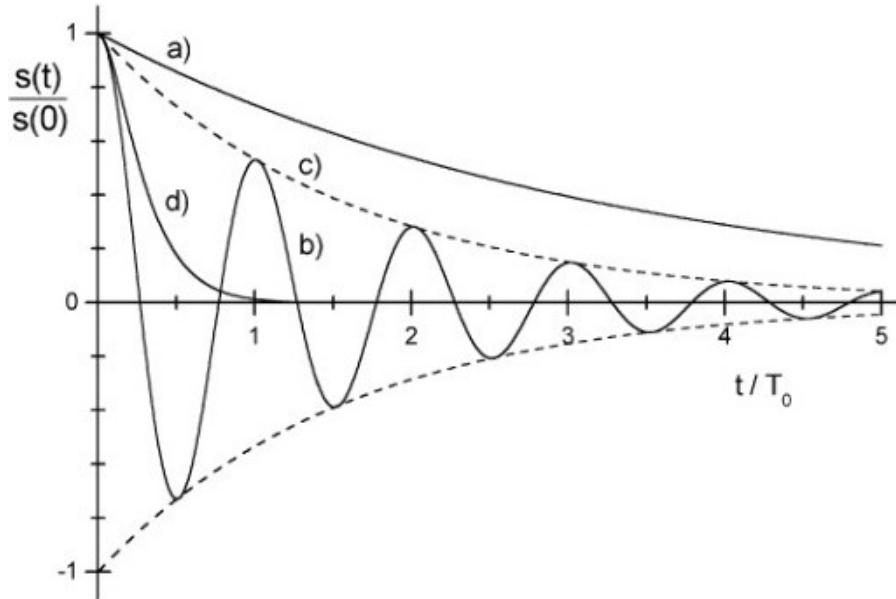


Abbildung 2: Gedämpfte Schwingung: a) Kriechfall mit $\beta \approx 10\omega_0$, b) Schwingfall mit $\beta \approx \omega_0/10$, c) Amplitudenfunktion $e^{-\beta t}$ für Schwingfall, d) aperiodischer Grenzfall mit $\beta = \omega_0$.

Zur Diskussion der Pendelbewegung werden drei Fälle mit unterschiedlichem β als Maß für die Stärke der Dämpfung betrachtet:

1. Im Fall $\beta > \omega_0$ sind λ_1 und λ_2 beide reell und negativ. Die Bewegung ist stark gedämpft. Das Pendel schwingt nicht, sondern bewegt sich monoton (und relativ langsam) aus der Anfangsposition in die Ruhelage. Man nennt dies den *Kriechfall* (s. Abb. 2 a).
2. Im Fall $\beta < \omega_0$ sind λ_1 und λ_2 komplex. Es liegt nur eine schwache Dämpfung, der *Schwingfall* vor (s. Abb. 2 b). Mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$ folgt:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 e^{-\beta t} \cdot \left[\frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{\beta}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] \\ &= s_0 e^{-\beta t} \cdot \left[\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Gleichung (9) stellt eine Schwingung dar, deren Amplitude zeitlich exponentiell abnimmt. Aus den Nullstellen der zeitlichen Ableitung von $s(t)$ erhält man die

- Maxima bei $t = 2\pi n/\omega = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Minima bei $t = 2\pi (n + \frac{1}{2})/\omega = (n + \frac{1}{2})T$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Der Faktor $e^{-\beta t}$ in Gleichung (9) ist die *Amplitudenfunktion* (s. Abb. 2 c). Das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Maxima der Schwingung wird *Dämpfungsverhältnis* k genannt,

$$k = \frac{s(t)}{s(t+T)} = e^{\beta T}, \quad (10)$$

bzw. $\beta T = \Lambda = \ln k$, das *logarithmische Dämpfungsdekret*. Das Verhältnis der Schwingungszeiten von gedämpfpter und ungedämpfpter Schwingung ist

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}. \quad (11)$$

In den meisten Fällen unterscheiden sich T und T_0 nur wenig ($< 1\%$).

3. Der Fall $\beta = \omega_0$ heißt *aperiodischer Grenzfall*. Die Lösung für die Bewegung des Pendels ergibt sich durch Grenzwertbildung $\omega \rightarrow 0$ aus Gleichung (9):

$$s(t) = s_0 \cdot e^{-\beta t} (1 + \beta t). \quad (12)$$

Im aperiodischen Grenzfall bewegt sich das Pendel bei gegebener Kreisfrequenz ω_0 ohne vor und zurück zu schwingen in der kürzesten Zeit ($\Delta t \approx T_0$ von der Anfangsposition in die Ruhelage (s. Abb. 2 d).

2.3 Lösung der DGL zur gedämpften Drehschwingung

Die Differentialgleichung für eine *freie Drehschwingung mit Dämpfung* lautet

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = 0. \quad (13)$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment, β die Dämpfungskonstante und k' die Winkelrichtgröße der rücktreibenden Spiralfeder. Eine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varphi = Ae^{i\omega t}. \quad (14)$$

Nach Euler gilt $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ mit $i = \sqrt{-1}$. A ist eine Konstante und gibt die Amplitude der freien Schwingung an, ω die Kreisfrequenz. Die Beziehung zwischen Kreisfrequenz ω , Frequenz f und Schwingungsdauer T lautet $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Die Differentialgleichung für die *erzwungene Drehschwingung* lautet

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = A_0 e^{i\omega t}, \quad (15)$$

mit A_0 als Amplitude des auf den Drehschwinger einwirkenden Drehmoments, wobei

$A_0 = k'\dot{\varphi} = J\omega_0^2\varphi_0$. Der Lösungsansatz für diese Differentialgleichung ist

$$\varphi = Ae^{i(\omega t - \alpha)}, \quad (16)$$

wobei α die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen des Pendels und des einwirken- den äußeren Drehmomentes ausdrückt. Differenzieren und Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung liefert die Bestimmungsgleichungen für die Amplitude A und die Phasenverschiebung α :

$$\dot{\varphi} = i\omega Ae^{i(\omega t - \alpha)}, \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t - \alpha)}, \quad (17)$$

$$-\omega^2 AJe^{i(\omega t - \alpha)} + i\beta\omega Ae^{i(\omega t - \alpha)} + k'Ae^{i(\omega t - \alpha)} = A_0e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Teilt man diese Gleichung durch $Je^{i(\omega t - \alpha)}$, so erhält man:

$$-\omega^2 A + i\frac{\beta}{J}\omega A + \frac{k'}{J}A = \frac{A_0}{J}e^{i\alpha}. \quad (19)$$

Mit $\frac{\beta}{J} = 2\delta$ und $\frac{k'}{J} = \omega_0^2$ folgt:

$$-\omega^2 A + 2i\delta\omega A + A\omega_0^2 = \frac{A_0}{J}e^{i\alpha}. \quad (20)$$

Diese Gleichung wird in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Für den Realteil muss gelten:

$$-\omega^2 A + A\omega_0^2 = \frac{A_0}{J} \cos \alpha \quad \text{bzw.} \quad A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \frac{A_0^2}{J^2} \cos^2 \alpha. \quad (21)$$

Für den Imaginärteil muss gelten:

$$2\delta\omega A = \frac{A_0}{J} \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad 4\delta^2\omega^2 A^2 = \frac{A_0^2}{J^2} \sin^2 \alpha. \quad (22)$$

Addition der rechten Gleichungen (21) und (22) liefert:

$$A^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 \right] = \frac{A_0^2}{J^2}. \quad (23)$$

Damit ergibt sich für die Amplitude der erzwungenen Schwingung:

$$A = \frac{A_0}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \quad (24)$$

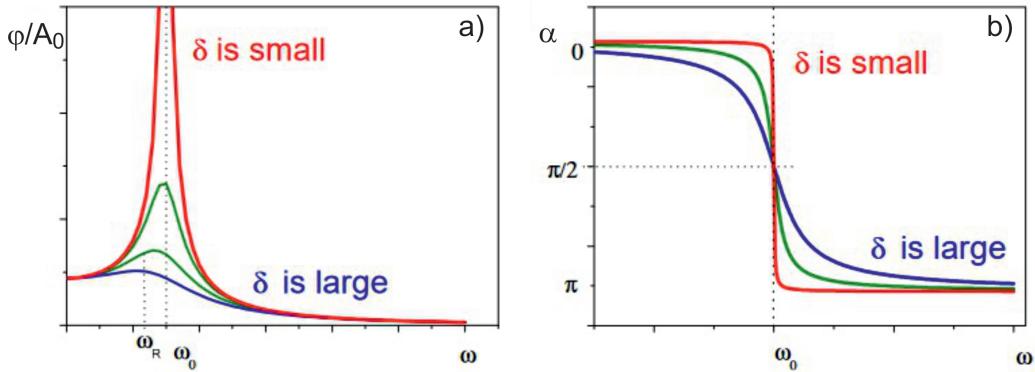


Abbildung 3: a) Amplitude und b) Phase der erzwungenen Schwingung (Quelle: Leybold Versuchsanleitung).

Division der linken Gleichungen (22) und (21) liefert für die Phasenverschiebung α zwischen Erreger und Schwinger

$$\tan \alpha = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (25)$$

Die Funktion für die Auslenkung des Schwingers in Abhängigkeit der Zeit ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (24) und (25) in den Realteil des obigen Lösungsansatzes Gleichung (16):

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{J\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot \cos \left[\omega t - \arctan \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right]. \quad (26)$$

Trägt man das Amplitudenverhältnis φ/A_0 über dem Frequenzverhältnis ω/ω_0 auf, so ergeben sich die in Abb. 3 dargestellten Kurven. Dabei ist A_0 die Amplitude des Erregersystems und $f_0 = \omega_0/2\pi$ die Eigenfrequenz des Drehpendels. Es ist zu erkennen, dass sich die Resonanzfrequenz mit zunehmender Dämpfung δ nach links verschiebt.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Geräte- und Materialliste

- Pohlsches Rad
- 2 Netzteile
- Kabel
- 2 Multimeter

3.2 Versuchsaufbau

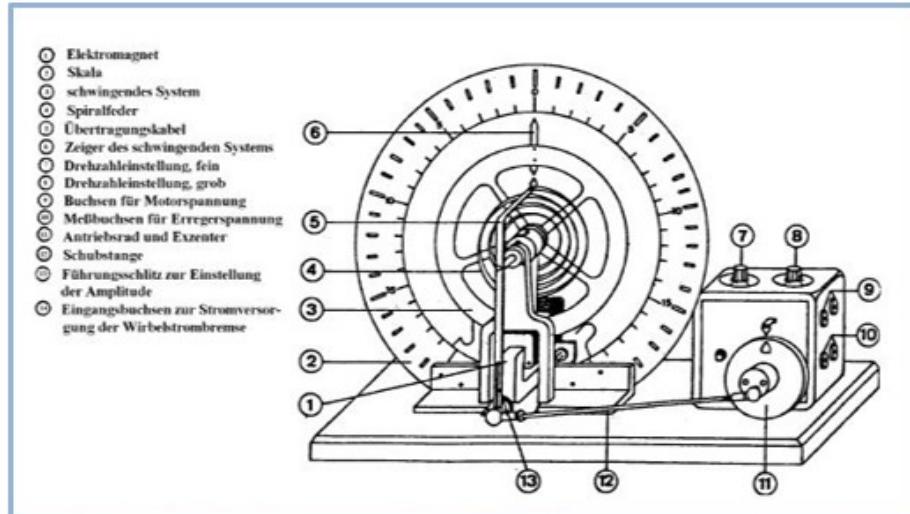


Abbildung 4: Aufbau nach Pohl (Quelle: Leybold Versuchsanleitung).

Das eigentliche Pendel besteht aus einer drehbar gelagerten ringförmigen Scheibe aus Kupfer (3), die mit einer Spiralfeder (4) verbunden ist. Verdreht man die Scheibe aus ihrer Ruhelage, so erzeugt die Spiralfeder ein rücktreibendes Moment, so dass die Scheibe nach dem Loslassen Schwingungen ausführt, deren Amplitude in Folge von Reibung abklingt. Die Dämpfung lässt sich durch eine Wirbelstrombremse einstellen. Man notiert sich den jeweils eingestellten Strom durch den Elektromagneten (1) als Dämpfungsmaß. Über eine Exzenter scheibe (11), die von einem Motor mit regelbarer Drehzahl angetrieben wird, kann das Drehpendel mittels einer Schubstange (12) zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Durch Veränderung der Spannung, mit der der Motor gespeist wird, kann die Drehzahl des Motors geändert werden.

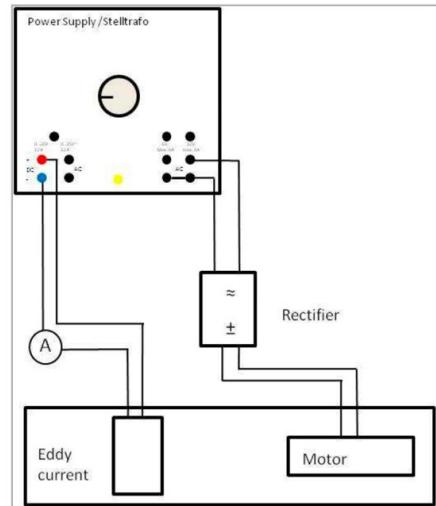


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Stromversorgung: Erreger/Motor (rechts), Wirbelstrombremse (Eddy current, links) (Quelle: Leybold Versuchsanleitung).

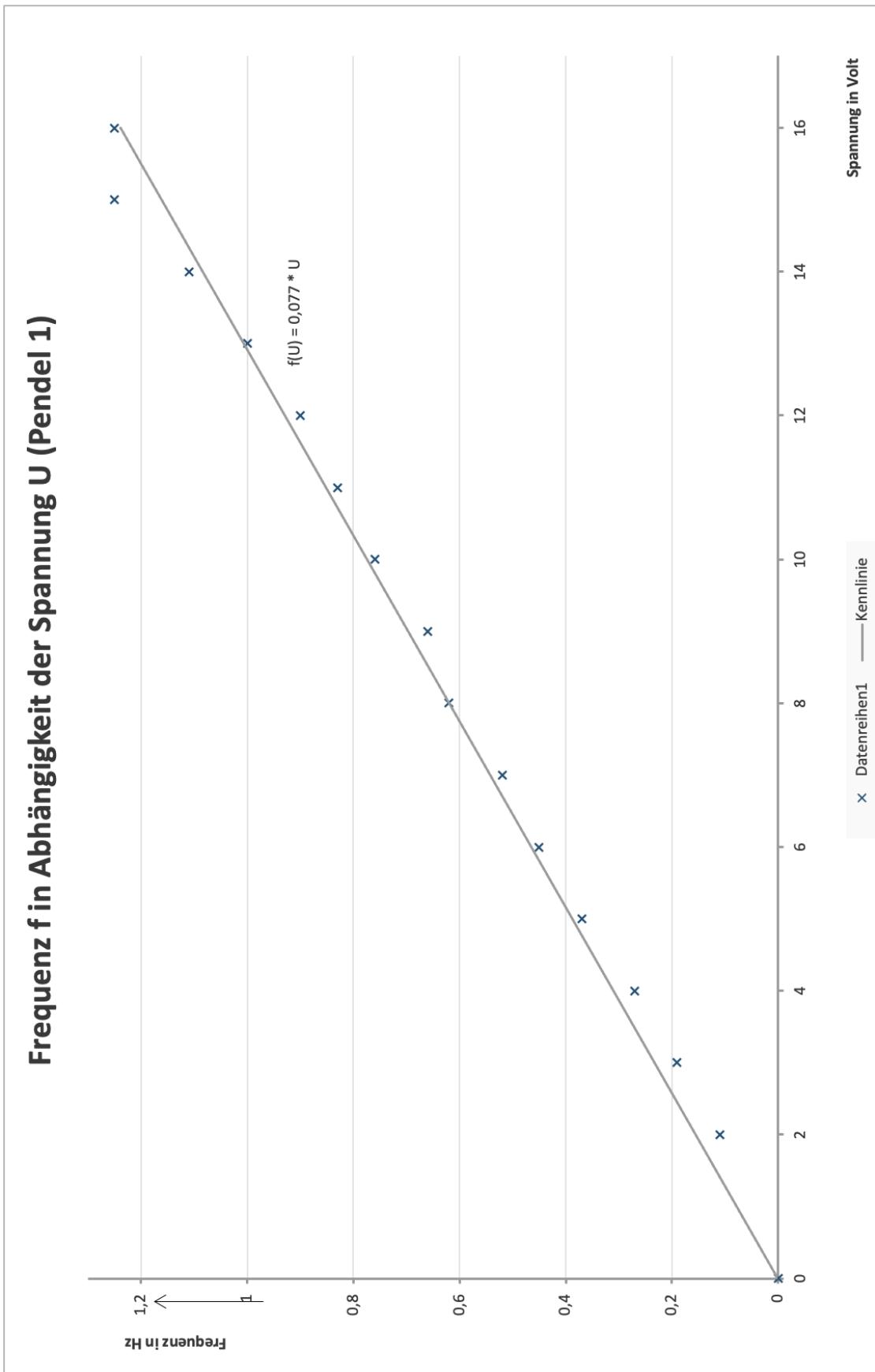
3.3 Aufgabenstellung & Versuchsauswertung

1. **Eigenfrequenz bestimmen:** Zuerst soll die Eigenfrequenz (Frequenz der freien Schwingung ohne Dämpfung) bestimmt werden, indem man das System erregt und mit Hilfe einer Stoppuhr die Zeit t von $n = 10$ Schwingungen misst. Wiederholen Sie dies dreimal und bestimmen Sie für jeden Durchgang den Mittelwert T . Daraus folgt:

$$f_0 = \frac{1}{\bar{T}} \quad (\text{Berechnen Sie } f_0 \text{ für jeden Durchgang, mit Fehlerrechnung})$$

2. **Aufnahme der Resonanzkurve:** Zur Aufnahme der Resonanzkurve wird eine konstante Dämpfung (Stromstärke $I_D = \text{konst.} = 0, 300, 600 \text{ mA}$) eingestellt.
 - a) Starten Sie mit der Bestimmung der Eigenfrequenz des Drehpendels.
 - b) Messen Sie für drei verschiedene Dämpfungen (eingestellte Stromstärken: 0 mA, 300 mA und 600 mA) die Amplitude der erzwungenen Schwingung $\varphi = \varphi(f_{\text{err}})$ in Abhängigkeit der Erregerfrequenz.
 - c) Die Spannung U für den Erreger sollte im Bereich der Resonanz in möglichst kleinen Schritten ($\Delta U \leq 0,5 \text{ V}$) verändert werden. Beginnen Sie mit einer Spannung von 2 V. Aufgrund der nicht symmetrischen Schwingung des Drehpendels sind für jede Frequenz die linke und die rechte Amplitude $\varphi_{l,r}(f_{\text{err}})$ aufzunehmen.
 - d) Ermitteln Sie mit Hilfe der Erregerspannung U und der Eichkurve $f_{\text{err}} = f(U)$ die Erregerfrequenz f_{err} (siehe Anhang).
 - e) Bilden Sie den Mittelwert aus der linken und rechten Amplitude und tragen Sie die Mittelwerte in Abhängigkeit der erregenden Frequenz f_{err} für die drei Dämpfungen in einen Graphen ein, sodass Sie drei Resonanzkurven erhalten.
 - f) Begründen Sie eingehend, wieso im Resonanzfall der Erreger dem Schwinger zu jedem Zeitpunkt Energie zuführt und es bei geringer Dämpfung zur „Resonanzkatastrophe“ kommen muss.
3. **Anwendungen:** Beschreiben Sie mindestens je drei Beispiele, wo Resonanzerscheinungen beobachtbar und erwünscht bzw. wo sie schädlich sind.

Frequenz f in Abhängigkeit der Spannung U (Pendel 1)



Frequenz in Abhängigkeit der Spannung (Pendel 2)

