

Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg

Physikalisches Grundlagenpraktikum
für den Bachelor-Studiengang
Physik

Versuchsanleitungen
Teil 1b (2.Fachsemester)

Inhaltsverzeichnis

Versuche

Teil Nr. Bezeichnung

1b Wärmelehre, Elektro- und Magnetostatik

B 1	Bestimmung der spez. Verdampfungswärme von Wasser..	B1.1-6
B 2	Bestimmung der spez. Wärmekapazität fester Körper.....	B2.1-8
B 3	Heißluftmotor.....	B3.1-16
B 8	Bestimmung der spez. Ladung e/m.....	B8.1-6
B14	Millikan-Versuch(Bestimmung der elektr.Elementarladung)	B14.1-8
C 1	Elektrischer Widerstand von Metallen und Halbleitern.....	C1.1-10
C 6	Magnetische Hysterese.....	C6.1-10
C 7	Messungen mit der magnetischen Drehwaage.....	C7.1-8
C8/9	Wechselstromwiderstände und Reihenresonanz.....	C8/9.1-16
C 16	Thermoelektrizität.....	C16.1-20
C 17	Kraftwirkungen elektrischer Ladungen (Coulomb-Gesetz)	C17.1-14

Versuch B 1: Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme des Wassers

- 1. Literatur:** Walcher, Praktikum der Physik
 Dobrinski/Krakau/Vogel, Physik für Ingenieure
 Gerthsen/Kneser, Physik
 Bergmann-Schaefer, Experimentalphysik, Bd.I

Stichworte: p(T)-Phasendiagramm des Wassers, Tripelpunkt, kritischer Punkt, Schmelzpunkt, Siedepunkt, Wärmekapazität, latente Wärme, 1. Hauptsatz der Thermodynamik, Kalorimeter, Wasserwert.

2. Grundlagen

Grundlage des vorliegenden Versuchs bildet das Druck(p)-Temperatur(T)-Phasendiagramm des Wassers (s. Abb.1). In diesem Diagramm trennt die sog. *Dampfdruckkurve* die dampfförmige von der festen bzw. flüssigen Phase. Die Dampfdruckkurve endet am *kritischen Punkt* ($p_{kr} = 221 \text{ bar}$; $T_{kr} = 374^\circ\text{C}$). Oberhalb des kritischen Punktes kann man zwischen Dampf und Flüssigkeit nicht mehr unterscheiden. Die *Verfestigungskurve* trennt die flüssige von der festen Phase. Man beachte die sog. *Dichteanomalie* des Wassers; d.h. das *rückläufige* Verhalten der Verfestigungskurve: Bei konstanter Temperatur schmilzt Eis, wenn man den Druck steigert (Schlittschuhlauf!?). Entlang der Dampfdruck- bzw. Verfestigungskurve stehen die entsprechenden Phasen miteinander im Gleichgewicht. Am *Tripelpunkt* ($p_{tr} = 6,105 \text{ mbar}$; $T_{tr} = 0,01^\circ\text{C}$) sind alle drei Phasen (dampförmig, flüssig, fest) miteinander im Gleichgewicht. Ähnliche Phasendiagramme wie in Abb.1 kann man für alle Elemente (außer Helium) und viele Verbindungen und Substanzen aufstellen.

Ändert sich der Aggregatzustand einer Substanz, so werden die Grenzlinien (Dampfdruck- oder Verfestigungskurve in Abb.1) überschritten (Phasenübergang). Erfolgt dies bei konstanter Temperatur, so spricht man von einem *isothermen Phasenübergang* bzw. bei konstantem Druck von *isobarem Phasenübergang*. In jedem Fall wird dabei eine bestimmte Energie benötigt oder frei, je nachdem in welche Richtung (Druck- oder Temperatur- Zu- bzw. Abnahme) der Phasenübergang erfolgt. Beim isothermen Übergang vom flüssigen in den gasförmigen (dampförmigen) Zustand muss die *Verdampfungswärme* aufgebracht werden. Bei der Umkehrung, der Kondensation, wird der gleiche Energiebetrag als *Kondensationswärme* freigesetzt. Ähnliches gilt beim isothermen Phasenübergang fest-flüssig (Schmelzwärme, Erstarrungswärme). Die bei isothermen Phasenüber-

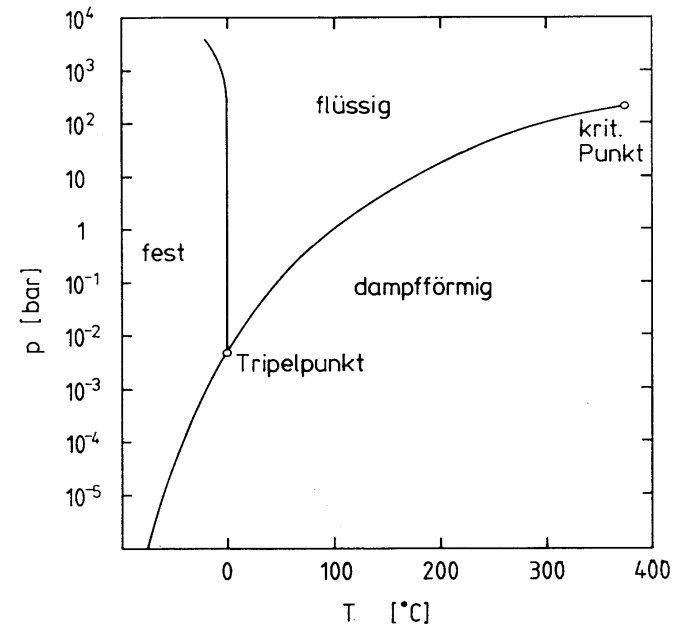


Abb.1: p(T) Phasendiagramm des Wassers

gängen benötigten Energien (Umwandlungswärmen) bezeichnet man auch als *latente Wärmen* (latent: verborgen, gebunden), da sie keine Temperaturänderungen verursachen. Ihre Größen hängen mit den Bindungskräften der betreffenden Substanz im jeweiligen Aggregatzustand zusammen.

Die Umwandlungswärmen Q bezieht man i.a. auf eine Masseneinheit, und spricht dann z.B. von der spezifischen Verdampfungswärme (Kondensationswärme) r :

$$r = \frac{Q}{m} \tag{1}$$

Für Wasser ist am Siedepunkt $T_s = 100^\circ\text{C}$ und bei Normaldruck ($p = 1,013 \text{ bar} = 1013 \text{ hPa}$): $r = 2,26 \times 10^6 \text{ J/kg}$. Die Verdampfungs- bzw. Kondensationswärme r ist stark druck- und temperaturabhängig. Am kritischen Punkt verschwindet die spezifische Verdampfungswärme.

Zur Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme des Wassers wird im vorliegenden Versuch wie im Versuch B2 ein Mischungskalorimeter verwendet (vgl. Vers. B2: Bestimmung der spez. Wärmekapazität fester Körper, adiabatischer Vorgang, Wasserwert W eines Kalorimeters, Richmann'sche Mischungsregel). Man leitet Wasserdampf (Masse m_D) mit der Siedetemperatur T_S in ein mit Wasser (Masse m_W) der Temperatur T_1 gefülltes Kalorimeter (Wasserwert W_K) ein. Dabei werden folgende Wärmemengen vom Wasserdampf an das Wasser *abgegeben*:

- a) Die Kondensationswärme $Q = m_D r$, entsprechend dem Phasentübergang dampfförmig \rightarrow flüssig.
- b) Der kondensierte Dampf kühlt sich gleichzeitig noch von T_S auf die Mischungstemperatur T_M ab. Die dabei abgegebene Wärmemenge ist:

$$\Delta Q = m_D c_W (T_S - T_M) \quad (2)$$

wobei c_W die spez. Wärmekapazität des Wassers ist.

Das mit Wasser gefüllte Kalorimeter (einschließlich Rührer und Thermometer) nimmt folgende Wärmemenge *auf*:

$$\Delta Q = (m_W + W_K) c_W (T_M - T_1) \quad (3)$$

Nach der Richmann'schen Mischungsregel (Energieerhaltung) ist die vom Wasserdampf abgegebene Wärmemenge gleich der vom gefüllten Kalorimeter aufgenommenen Wärmemenge:

$$m_D r + m_D c_W (T_S - T_M) = (m_W + W_K) c_W (T_M - T_1) \quad (4)$$

Daraus lässt sich r bestimmen:

$$r = \frac{(m_W + W_K) c_W (T_M - T_1) - m_D c_W (T_S - T_M)}{m_D} \quad (5)$$

Um das nichtadiabatische Verhalten des Kalorimeters zu berücksichtigen, wird die Wassertemperatur eine Zeit lang vor und nach dem Einlassen des Wasserdampfes registriert und als Funktion der Zeit in einem Diagramm aufgetragen. Durch Extrapolation auf den idealen Zeitpunkt t_0 gemäß der Regel gleicher Flächen werden T_1 und T_M ermittelt (vgl. Versuch B 2).

Die Siedetemperatur T_S wird im Versuch nicht unmittelbar gemessen, sondern unter Berücksichtigung des herrschenden Luftdrucks p (Barometerstand) einer Tabelle entnommen.

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die spezifische Verdampfungswärme des Wassers.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie den Wasserwert des verwendeten Kalorimeters (entspr. Versuch B 2).

4. Versuchsdurchführung

Wasser wird im Erhitzungsgefäß zum Sieden gebracht, wobei schon vor Beginn des Versuches so lange Dampf erzeugt werden sollte, bis die Dampfleitung ebenfalls auf die Siedetemperatur des Wassers erwärmt ist. In das Kalorimeter wird eine gewogene Wassermenge m_W eingebracht, die 2/3 bis 3/4 des Kalorimetervolumens einnehmen sollte. Man lese 5 Min. vor dem Einleiten des Dampfes alle 30 Sek. die Kalorimetertemperatur ab (Vorversuch).

Der Wasserdampf wird darauf in das Kalorimeter eingeleitet, indem das Gefäß von unten über das Rohr geschoben und auf einem Tischchen hoch gestellt wird, so dass das Rohr mindestens 5 cm in das Wasser eintaucht. Man leite so lange Dampf ein, bis die Temperatur auf ca 40°C angestiegen ist und messe dabei die Temperatur alle 10 Sek (Hauptversuch). Auch nach beendeter Einleitung des Dampfes messe man die Temperatur noch weitere 5 Min. (Nachversuch).

Danach wird das Kalorimeter erneut gewogen und aus der Differenz der Werte m_W die Masse der eingeleiteten Dampfmenge m_D bestimmt.

Man zeichne ein Temperatur-Zeit-Diagramm und extrapoliere auf die ideale Anfangstemperatur T_1 und Endtemperatur T_M (s. Versuch B2).

Zur Bestimmung des Wasserwertes W_K wird in das Kalorimeter eine neue Wassermenge m_1 (ungef. 2/3 von $m_W + m_D$) mit einer Temperatur $T_1' \approx T_1$ eingewogen. Nach Aufnahme des Temperaturverlaufs wird eine zweite Wassermenge m_2 (ungef. 1/3 von $m_W + m_D$), die auf Siedetemperatur T_S erhitzt wurde, hinzugefügt und die Mischungstemperatur T_M' gemessen. (Die Summe $m_1 + m_2$ sollte annähernd gleich der Summe $m_W + m_D$ sein, so dass die Mischungstemperatur T_M' annähernd gleich T_M wird). Man bestimme durch eine

weitere Wägung m_2 .

Zur Bestimmung der Siedetemperatur wird der Barometerstand abgelesen, reduziert und aus einer Tabelle die Siedetemperatur T_s entnommen.

5. Auswertung

Aus den gemessenen Werten werden nach den o.a. Gleichungen zuerst W_K und dann r berechnet ($c_w = 4,1868 \times 10^3 \text{ J / kg K}$).

Geben Sie eine Fehlerabschätzung gem. dem Fortpflanzungsgesetz an. Als geschätzte Unsicherheit der einzelnen Messgrößen gelte:

Für alle Masseangaben: $\Delta m = \pm 0,1 \text{ g}$, für alle Temperaturen: $\Delta T = \pm 0,2^\circ\text{C}$.

Die Siedetemperatur und die spezifische Wärmekapazität des Wassers können als fehlerfrei angenommen werden. Berechnen Sie den relativen und den absoluten Größtfehler zuerst von W_K und dann vom gesuchten Wert r . Vergleichen Sie Ihren experimentell gewonnenen Wert für r mit dem Literaturwert. Diskutieren Sie ggfls. mögliche Ursachen für die Abweichung.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie sieht ein p-T-Phasendiagramm aus?
- 2) Was bedeutet *spezifische Verdampfungswärme*?
- 3) Was versteht man unter *latenter Wärme*?
- 4) Ist die spezifische Verdampfungswärme temperaturabhängig?
- 5) Was bezeichnet man als *Dichteanomalie des Wassers*?
- 6) Wovon ist der Siedepunkt des Wassers abhängig? Wieso?
- 7) Wie ist ein Kalorimeter aufgebaut?
- 8) Was versteht man unter einem *adiabatischen* Vorgang?
- 9) Was bedeutet der Begriff *Wasserwert*? Wie groß ist der Wasserwert des Wassers?
- 10) Warum soll die Temperatur des Wassers im Kalorimeter eine gewisse Zeit lang vor und nach der Dampfeinleitung gemessen werden?
- 11) Welche experimentelle Methode gibt es noch zur Bestimmung der spezifischen Verdampfungswärme?

Versuch B 2: Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Körper

1. Literatur: Walcher, Praktikum der Physik
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Physik, Bd.I

Stichworte: Spezifische Wärmekapazität, Wasserwert, Richmann'sche Mischungsregel, Dulong-Petit'sches Gesetz

2. Grundlagen

2.1 Spezifische Wärme

Jeder Festkörper besitzt im Sinne der Thermodynamik eine sog. *innere Energie* U , die durch die kinetische und potentielle Energie der im Gitter um ihre Ruhelage schwingenden Atome hervorgerufen wird. Die innere Energie U ist Null bei $T = 0\text{K}$ (klassisch betrachtet). Erhöht man die Temperatur, so wächst U an, wobei die Funktion $U = f(T)$ i. a. einen komplizierten (nach der Theorie von Debye jedoch berechenbaren) Verlauf hat. Für die meisten Festkörper ist U im Bereich um Zimmertemperatur annähernd linear im T . Führt man in diesem Temperaturbereich einem Festkörper von außen eine bestimmte Wärmemenge ΔQ zu, so ist die entsprechende Erhöhung der inneren Energie deshalb proportional zur Temperaturerhöhung:

$$\Delta U = \Delta Q = C \Delta T \quad (1)$$

Die Größe C wird *Wärmekapazität* des Festkörpers genannt. Sie ist proportional zur Masse m des Körpers:

$$C = c m \quad (2)$$

wobei c die *spezifische Wärmekapazität* des Materials mit der Einheit $1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ist, oder bei Bezug auf ein Mol, die moleare Wärmekapazität c_{mol} (*Molwärme*) mit der Einheit $1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Die molare Wärmekapazität der meisten Festkörper (vor allem der Metalle) ist bei T_{Zi} nahezu konstant und materialunabhängig. Dies kann man folgendermaßen verstehen: Man weiß aus der statistischen Thermodynamik, dass die mittlere kinetische Energie eines Teilchens (Atoms) pro Freiheitsgrad $E = k_B T/2$ ist ($k_B =$

Boltzmann-Konstante). Im Bereich von T_{Zi} erfolgen in einem Festkörper die Schwingungen der Atome in die 3 möglichen Raumrichtungen (3 Freiheitsgrade), also ist $E = 3 k_B T/2$. Da im zeitlichen Mittel in einer Gitterschwingung die gleiche potentielle wie kinetische Energie vorhanden ist, ergibt sich pro Atom eine mittlere innere Energie von $u = 3 k_B T$. Ein Mol eines Stoffes enthält $N_L = 6 \times 10^{23}$ Atome. Folglich ist die innere Energie für ein Mol eines Festkörpers gegeben durch:

$$U = 3 k_B N_L T = 3 R T \quad (3)$$

wobei $R = k_B N_L = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ die allgemeine Gaskonstante ist. Die molare Wärmekapazität eines Stoffes im Bereich um T_{Zi} ist also

$$c_{\text{mol}} = 3 R \quad (4)$$

Dieses Gesetz wurde schon 1819 von Dulong und Petit experimentell gefunden. In der Nähe des Schmelzpunktes gilt dieses Gesetz nicht mehr.

Insgesamt ergibt sich für den Temperaturverlauf der molaren spezifischen Wärmekapazität eines Festkörpers von $T = 0$ bis nahe zum Schmelzpunkt ein Verhalten, das in Abb. 1 qualitativ wiedergegeben ist.

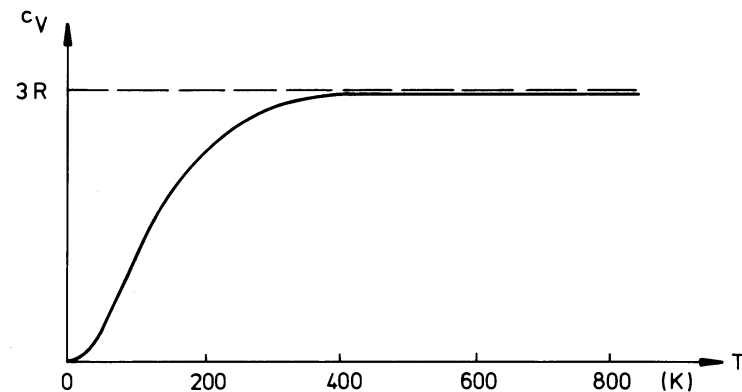


Abb.1: Temperaturabhängigkeit der molaren spezifischen Wärmekapazität c_v eines Festkörpers bei konstantem Volumen

Man beachte, dass die spezifische Wärmekapazität meist an Proben unter konstantem Druck gemessen wird (c_p). Vernachlässigt man die Wärmedehnung von Festkörpern, ist $c_p \approx c_v$.

2.2 Messmethode

Eine einfache Methode, um c im Bereich von Zimmertemperatur zu bestimmen, ist das Mischungsverfahren. Dabei wird die Wärmekapazität der Probe mit der bekannten Wärmekapazität einer Flüssigkeit verglichen. Es gilt, die sog. *Richmannsche Mischungsregel*, die eine Form des Energieerhaltungssatzes darstellt. Sie besagt, dass die Endtemperatur T_e bei dem Zusammenbringen zweier Körper mit den Massen m_1 und m_2 und den Ausgangstemperaturen T_1 und T_2 die folgende Gleichung erfüllt:

$$m_1 c_1 (T_1 - T_e) = m_2 c_2 (T_e - T_2) \quad (5)$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Regel ist, dass das Gesamtsystem nach außen keine Wärme abgibt (adiabatische Messung). Deshalb benutzt man im Versuch ein gut isoliertes Thermogefäß, das man mit Wasser bekannter Wärmekapazität gefüllt ist.

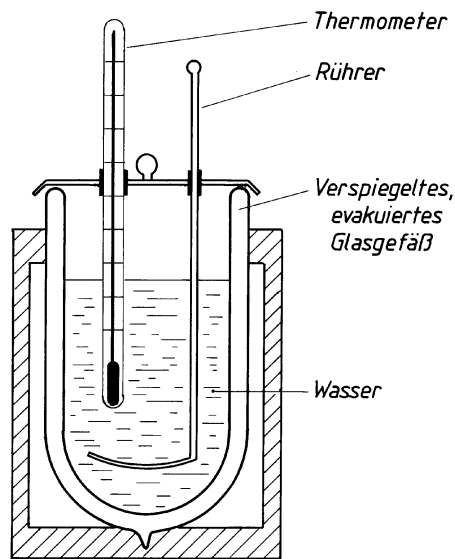


Abb.2:
Kalorimeter
mit Dewar-Gefäß

Ein solches *Kalorimeter* mit evakuierten Glasgefäß (Dewar), wie es zur Bestimmung der spez. Verdampfungswärme des Wassers (Versuch B1) verwendet wird, ist in Abb.2 dargestellt. Ein ähnliches Kalorimeter jedoch mit Styropor-Isolierung wird im vorliegenden Versuch benutzt. Zur Temperaturbestimmung dient ein elektr. Thermometer. Mit dem Rührer stellt man eine homogene Temperaturverteilung sicher. Dewargefäß, Rührer und Thermometer haben ebenfalls eine bestimmte Wärmekapazität, die mit dem sog. *Wasserwert* des Kalorimeters (einer entsprechenden Wassermenge mit gleicher Wärmekapazität) berücksichtigt wird (siehe Aufgabe 2).

Die Ausgangstemperatur T_2 des Kalorimeters wird am Thermometer abgelesen. Die Ausgangstemperatur T_1 des Probekörpers muss genau eingestellt werden. Dafür wird ein doppelwandiges Gefäß nach Abb. 3 verwendet, in dem innen die Probe liegt und außen Wasser bis zum Siedepunkt erhitzt wird.

Wesentlich ist nun, dass sich das Kalorimeter während des gesamten Versuchsablaufs nicht (streng) adiabatisch verhält (warum?). Deshalb muss der zeitliche Verlauf der Temperatur während des ganzen Verfahrens gemessen werden, um die auftretenden Wärmeverluste zu ermitteln und die später nötigen Korrekturen anbringen zu können.

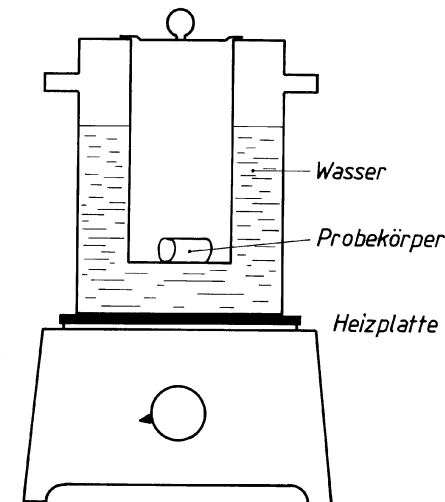


Abb.3:
Erhitzungsgefäß

2.3 Einheiten

Die Einheit für c ist $1 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$. In früheren Zeiten wurde die *Kalorie* (cal) bzw. *Kilokalorie* (kcal) als Einheit für *Wärmemengen* benutzt. Sie entspricht der Energie, die notwendig ist, um 1 g bzw. 1 kg Wasser von $14,5^\circ\text{C}$ auf $15,5^\circ\text{C}$ zu erwärmen. Ihr Wert wurde mit $4,1868 \text{ J}$ bzw. kJ angenommen. Seit 1977 wird die Kalorie nicht mehr als gesetzliche Einheit definiert.

Da die spezifische Wärmekapazität c_w von Wasser sich zwischen 5°C und 95°C um weniger als $0,5\%$ ändert, nehmen wir den Wert $c_w = 4,1886 \text{ J/g}$ als temperaturunabhängig an.

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Die spezifische Wärmekapazität verschiedener Metallkörper ist nach dem Mischungsverfahren in einem Kalorimeter zu bestimmen.
- 2. Aufgabe:** Der Wasserwert des benutzten Kalorimeters, der bei der Berechnung der spezifischen Wärme benötigt wird, ist experimentell zu bestimmen.

4. Versuchsdurchführung

- 1. Aufgabe:** Die Körper, deren Wärmekapazität bestimmt werden soll, werden zuerst gewogen und abgemessen und ihr Volumen wird berechnet. Sie sind im doppelwandigen Gefäß bis zum Siedepunkt des Wassers zu erwärmen. Um die erreichte Temperatur genau zu ermitteln, muss entsprechend dem äußeren Luftdruck die Siedepunktveränderung über die Dampfdruckkurve des Wassers berücksichtigt werden.
- Das Kalorimeter soll leer und halbvoll mit Wasser gewogen werden. Seine Temperatur soll dann in regelmäßigen Abständen von 30 Sek. etwa 5 Minuten lang abgelesen werden (*Vorversuch*). Anschließend wird die erste Probe ins Kalorimeter eingetaucht und die Temperatur danach alle 10 Sek. zwei Minuten lang unter ständigem Rühren gemessen (*Hauptversuch*). Danach sind die Temperaturwerte nur noch alle 30 Sek. fünf Minuten lang zu registrieren (*Nachversuch*).

Bei allen Proben ist gleich zu verfahren. Dabei berücksichtige man, dass die

Wassermenge sich nach Entnahme der vorhergehend untersuchten Probe geändert hat.

2. Aufgabe:

Das Kalorimeter wird zu einem Drittel mit Wasser bei Zimmertemperatur gefüllt und gewogen. Eine etwa gleiche Wassermenge wird bis ca. 60°C bei guter Durchmischung erwärmt. Nach Entfernung des Heizers wird noch eine Minute gewartet, um eine homogene Temperaturverteilung zu sichern, danach die Temperatur T_0 des Wassers bestimmt. Das warme Wasser wird dann in das Kalorimeter gegossen und die Temperatur während des ganzen Vorgangs (inkl. Vor- und Nachversuch) wie bei der ersten Aufgabe registriert. Am Ende des Versuchs wird das Kalorimeter erneut gewogen.

5. Auswertung

a) Graphische Auswertung

Für jeden Teilversuch soll der Zeitverlauf der Temperatur gezeichnet werden. Aus diesen Kurven wird die ideale (d.h. adiabatische) Temperaturerhöhung folgendermaßen ermittelt (siehe Abb. 4):

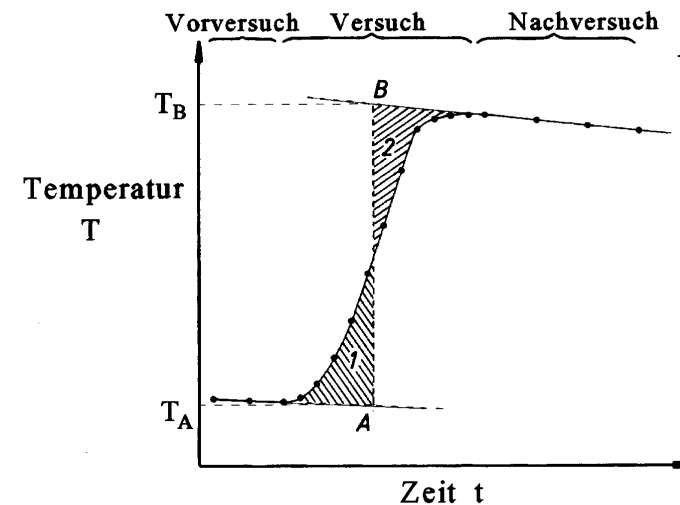


Abb.4: Graphische Auswertung

Der Zeitverlauf vor dem Eintauchen des Körpers wird vorwärts extrapoliert, der Zeitverlauf des Nachversuchs rückwärts bis zum Zeitpunkt vor dem Eintauchen. Man suche dann den genauen Zeitpunkt, bei dem die Flächen 1 und 2 zwischen tatsächlichem Verlauf und den extrapolierten Kurven gleich sind. Der Abstand A-B zwischen diesen Kurven ergibt die ideale Temperaturerhöhung. Die Temperaturen T_A und T_B sind als Ausgangs- bzw. Endtemperatur gemäß der Richmannschen Formel zu betrachten.

Da die Wärmeverluste pro Zeiteinheit proportional zur Temperaturerhöhung sind, ist die Wärmemenge, die verloren geht, proportional zur Fläche unter der $T(t)$ -Kurve. Das Auswertungsverfahren gleicht diese Verluste aus. Man wende es auch für die Bestimmung des Wasserwertes an.

b) Spezifische Wärmekapazität der Probe

Die Wärmekapazität C der Probe ergibt sich aus Gl. (5), wobei T_1 der Probenausgangstemperatur, T_2 und T_e den Temperaturen T_A bzw. T_B der graphischen Auswertung entsprechen. T_1 ist die Siedetemperatur T_S des Wassers; diese muss für den Luftdruck am Tag des Versuchs anhand der im Praktikum vorhandenen Tabelle korrigiert werden. Die Gesamtwärmekapazität des Kalorimeters besteht aus dem Wasseranteil und dem Beitrag vom Gefäß, Thermometer und Rührer, der durch eine fiktive Wassermasse, dem sog. *Wasserwert* W_K ersetzt wird. Es gilt:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{(m_W + W_K) c_W (T_B - T_A)}{m(T_S - T_B)} \quad (6)$$

c) Wasserwert des Kalorimeters

Der Wasserwert W_K wird ebenfalls mit Hilfe der Richmannschen Mischungsregel (Gl. (5)) bestimmt, wobei T_1 durch T_0 (bzw. T_S , s. Versuch B1) und die Größen $m_1 c_1$ und $m_2 c_2$ durch $m_z c_w$ bzw. $(m_a + W_K) c_w$ ersetzt werden. m_a ist die am Anfang im Kalorimeter vorhandene Wassermasse, m_z ist die Masse der zugegebenen Wassermenge, T_0 seine Temperatur. Es ergibt sich:

$$W_K = m_z \frac{(T_0 - T_B)}{(T_B - T_A)} - m_a \quad (7)$$

Fehlerdiskussion

Der Fehler bei den Massenbestimmungen beträgt etwa $\pm 0,1$ g, der der Temperaturbestimmungen ungefähr $\pm 0,1$ K. Mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes soll der Fehler für c abgeschätzt werden. Die experimentell bestimmten Werte sind mit den in der Literatur gefundenen Werten zu vergleichen und die evtl. vorhandenen Abweichungen zu diskutieren. Die berechneten Dichten helfen bei der Identifizierung der Körpermaterialien.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was versteht man unter *spezifischer Wärmekapazität* eines Stoffes? Welche Einheiten benutzt man?
- 2) Warum haben Festkörper bei Zimmertemperatur alle in etwa die gleiche molare Wärmekapazität von $3 R$?
- 3) Warum verschwindet die spezifische Wärme eines festen Körpers für $T \rightarrow 0$?
- 4) Wie ist ein Kalorimeter aufgebaut?
- 5) Was bedeutet der Begriff *adiabatisch*?
- 6) Was bedeutet der Begriff *Wasserwert*?
- 7) Wodurch entstehen die Wärmeverluste im Kalorimeter?
- 8) Wie verhält sich die spez. Wärmekapazität eines Körpers am Schmelzpunkt?
- 9) Wie sieht der Zeitverlauf der Temperatur nach dem Versuch für längere Zeiten aus?
- 10) Wie würde der Temperaturverlauf während des Versuchs aussehen, wenn das Wasser nicht gerührt wird?
- 11) Wie groß kann der Fehler für die Probenkörperausgangstemperatur sein, wenn man die Luftdruckkorrektur des Wassersiedepunkts vernachlässigt?

Versuch B 3: Heißluftmotor

1. Literatur: Gerthsen- Kneser-Vogel, Physik
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Physik, Bd.I

Stichworte: Hauptsätze der Thermodynamik, Gasgesetze, Energieumwandlungen, Kreisprozesse, Wirkungsgrad, Wärmekraftmaschine, Wärmepumpe, Kältemaschine

2. Grundlagen

2.1 Wärmekraftmaschine, Stirling-Kreisprozess

Zur Erläuterung der energetischen Prozesse in Wärmekraftmaschinen wird ein Gas betrachtet, das sich unter dem Druck p in einer Kammer mit Volumen V befindet, welches durch Verschieben eines Kolbens variiert werden kann. Führt man dem Gas von außen die Wärme ΔQ zu, so erhöht sich nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik (Energiesatz)

$$\Delta Q = dU + p dV \quad (1)$$

seine innere Energie U und damit seine Temperatur. Zusätzlich kann das Gas durch die Vergrößerung seines Volumens die mechanische Arbeit $dW = p dV$ am Kolben verrichten.^{*)} Ist das Gas bei der Expansion an ein Wärmereservoir konstanter Temperatur gekoppelt, bleibt die innere Energie ungeändert und die zugeführte Wärme wird vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt (isotherme Expansion).

Auf der Umwandlung von thermischer Energie in mechanische Arbeit durch Expansion eines Gases beruht das Wirkungsprinzip von Wärmekraftmaschinen. Für den Betrieb einer Wärmekraftmaschine ist es zweckmäßig, einen Kreisprozess zu durchlaufen, d.h. das Gas nach der Expansion durch Kompression in seinen Ausgangszustand zurückzubringen. Dies geschieht bei geringerer Temperatur und somit geringeren Drucken als bei der Expansion. Auf diese Weise muss lediglich nur ein Teil der bei der Expansion erzeugten mechanischen Energie zur Kompression an das Gas zurückgeführt werden.

Die nach der Dampfmaschine älteste Wärmekraftmaschine stellt der von R. Stirling 1816 entwickelte Heißgas- oder *Stirling*-Motor dar. Obwohl die Verbrennungsmaschinen Otto- und Dieselmotor einen höheren thermischen Wirkungs-

^{*)} Die am Gas verrichtete mechanische Arbeit ist entsprechend $dW = - p dV$.

grad (s.u.) besitzen, werden Stirling-Maschinen heute bevorzugt bei der umweltfreundlichen Bereitstellung von Arbeit und elektrischer Energie aber auch bei der Erzeugung tiefer Temperaturen zur Verflüssigung von Gasen eingesetzt.

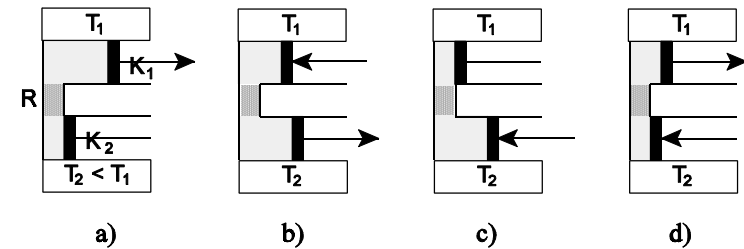


Abb. 1: Arbeitsschritte der Stirling-Maschine schematisch: T_1, T_2 Wärmereservoirs, K_1, K_2 bewegliche Kolben, R Regenerator (Wärmespeicher); a) isotherme Expansion, b) isochore Abkühlung, c) isotherme Kompression, d) isochore Erwärmung

Den prinzipiellen Aufbau des Stirlingmotors und seine Arbeitsschritte zeigt Abb.1 schematisch. Das Gas (Luft oder Inertgas) befindet sich abwechselnd in einem der beiden Teilvolumina, die mit Wärmereservoirs der Temperaturen T_1 und T_2 verbunden sind und mittels beweglicher über eine Kurbelwelle gesteuerter Kolben K_1, K_2 variiert werden. Die Gasvolumina sind über den Regenerator R verbunden, der eine große Grenzfläche zum Gas besitzt und bei Durchströmung Wärme aufnimmt oder abgibt, also als Wärmespeicher dient.

Im ersten Arbeitsschritt a) befindet sich das Gas im oberen Teilvolumen, hat die Temperatur T_1 und dehnt sich unter Energieaufnahme aus dem Reservoir aus, wobei es am Kolben K_1 mechanische Arbeit leistet (isotherme Expansion). Im zweiten Schritt b) wird es vom oberen Volumen durch den Regenerator in das untere gedrückt, wobei es an diesen Wärme abgibt und sich auf die Temperatur T_2 abkühlt. Das Gasvolumen ändert sich hierbei nicht (isochore Abkühlung). Im dritten Schritt c) wird das Gas bei der Temperatur T_2 unter äußerer Arbeitsleistung des Kolbens K_2 komprimiert, wobei es Wärme an das Reservoir abgibt (isotherme Kompression). Im vierten Schritt d) schließlich wird das Gas wieder durch den Regenerator in das obere Teilvolumen gedrückt, wobei es die gespeicherte Wärme aufnimmt und sich auf die Temperatur T_1 erwärmt. Auch hierbei ändert sich das Gasvolumen nicht (isochore Erwärmung).

Abb. 2 zeigt das $p(V)$ -Diagramm des Stirling-Kreisprozesses. Das linke Teilbild gibt die ideale, reversible Zustandsänderung des Gases wieder, die entlang der

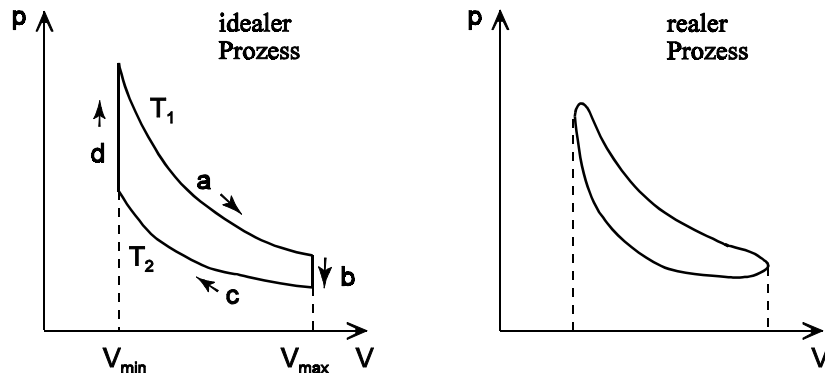


Abb. 2: p(V)-Diagramm des Stirling-Kreisprozesses: links für idealen, rechts für realen Prozess. Die schraffierte Fläche gibt die pro Umlauf von der Maschine geleistete mechanische Arbeit an.

Isothermen T_1 und T_2 sowie der Isochoren V_{\max} und V_{\min} verläuft. Der im Versuch benutzte Heißluftmotor durchläuft einen Kreisprozess, dessen reale Zustandsänderung durch ein pV-Diagramm wie im rechten Teilbild gezeigt beschrieben wird. Eine solche Zustandsänderung folgt hauptsächlich aus der kontinuierlichen Bewegung der Kolben (s.u.) jedoch auch aus dem unvollkommenen Temperaturausgleich zwischen Gas und Wärmebädern beim schnellen Durchlaufen des Prozesses und der mangelhaften Speicherung thermischer Energie im Regenerator.

Zur Bestimmung der im Kreisprozess übertragenen bzw. umgewandelten Energiemengen betrachten wir zunächst den idealen Stirling-Prozess: Die im Schritt a) dem Wärmereservoir der Temperatur T_1 entnommene Wärmemenge Q_1 ist mit Gl. (1) gleich der von der Maschine geleisteten Expansionsarbeit W_1' .

$$Q_1 = W_1' = \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} p(T_1, V) dV \quad (2)$$

Sie ist durch die in Abb. 2 zwischen der Isothermen T_1 und der Abszisse V liegenden Fläche gegeben. Entsprechend ist die im Schritt c) an das Wärmereservoir der Temperatur T_2 abgegebene Wärmemenge $|Q_2|$ ($Q_2 < 0$) gleich der Kompressionsarbeit $|W_2'|$ ($W_2' < 0$)

$$Q_2 = W_2' = \int_{V_{\max}}^{V_{\min}} p(T_2, V) dV \quad (3)$$

Sie entspricht der unter der Isothermen T_2 liegenden Fläche. Während der beiden isochoren Prozesse b) und d) wird keine mechanische Arbeit verrichtet, lediglich die Wärmemenge

$$Q_3 = m c_v (T_1 - T_2) \quad (4)$$

zwischen dem Gas (Wärmekapazität $m c_v$) und dem Regenerator zur Abkühlung bzw. Erwärmung ausgetauscht. Die bei einem Umlauf von der Maschine verrichtete mechanische Arbeit ist mit Gln. (2) u. (3)

$$W' = W_1' + W_2' = \oint p dV = \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} (p(T_1, V) - p(T_2, V)) dV \quad (5)$$

Sie entspricht der in Abb. 2 schraffierten Fläche und kann aus dem p(V)-Diagramm ermittelt werden, unabhängig davon ob es sich um einen idealen, reversiblen oder realen, irreversiblen Kreisprozess handelt.

Der *thermodynamische Wirkungsgrad* η_{st} des Stirling-Kreisprozesses gibt das Zahlenverhältnis von verrichteter mechanischer Arbeit W' des Gases zu aufgenommener Wärmemenge Q_1 an:

$$\eta_{st} = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\int p(T_2) dV}{\int p(T_1) dV} \quad (6)$$

η_{st} ist stets kleiner als 1. Für das ideale Gas (wechselwirkungsfreie, punktförmige Molekel) mit der Zustandsgleichung $pV = \nu RT$ (ν = Molzahl, R = Gaskonstante, T = Temperatur in Kelvin) ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (6) der *maximale* thermodynamische Wirkungsgrad η_{\max} des Stirlingprozesses zu

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (7)$$

Der max. Wirkungsgrad η_{\max} hängt nur vom Verhältnis der Temperaturen der Wärmebäder ab. Dies gilt bei reversiblen Kreisprozessen nach dem zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für beliebige Arbeitssubstanzen. (Vergl.auch: Wirkungsgrad des *Carnot-Kreisprozesses*).

Von technischer Bedeutung für die Leistung einer Wärmekraftmaschine ist der *Gesamtwirkungsgrad* η_g , der das Verhältnis von nutzbarer, z.B. an der Antriebswelle verfügbarer mechanischer Energie zu insgesamt verbrauchter Primärenergie angibt. Infolge von Verlusten ist der Gesamtwirkungsgrad stets kleiner als der thermodynamische Wirkungsgrad (s. Kap.4).

2.2 Kältemaschine, Wärmepumpe

Beim Heißluftmotor als Wärmekraftmaschine wird wie oben beschrieben Wärme einem Reservoir mit der Temperatur T_1 entnommen, ein Teil davon in mechanische Energie umgewandelt, der Rest an ein weiteres Reservoir mit der Temperatur $T_2 < T_1$ abgegeben. Sind die Temperaturen T_1 und T_2 gleich, d.h. wird die Heizung des einen Reservoirs und die Kühlung des anderen dauerhaft unterbunden, bleibt die Maschine stehen, da für die Erzeugung mechanischer Energie aus Wärme ein Temperaturgefälle nötig ist.

Wird die Maschine jedoch extern, z.B. mit einem Elektromotor über die Kurbelwelle im gleichen Drehsinn angetrieben, so wird bei jeder Expansion des Gases Wärme dem Reservoir mit der Temperatur T_1 entzogen, T_1 sinkt unterhalb T_2 . Die Maschine arbeitet als *Kältemaschine* oder *Wärmepumpe*, je nachdem ob die Abkühlung des einen oder Erwärmung des anderen Reservoirs betrachtet bzw. ausgenutzt wird. Da nun $T_1 < T_2$ ist, gilt für den Kreisprozess qualitativ das gleiche $p(V)$ -Diagramm wie das in Abb. 2 gezeigte, lediglich der Umlaufsinn ist umgekehrt. Die Fläche im $p(V)$ -Diagramm entspricht der vom Elektromotor pro Umlauf am Gas verrichteten Arbeit $W = -W'$.

Wird der Heißluftmotor extern im umgekehrten Drehsinn angetrieben, so wird Wärme dem Reservoir mit der Temperatur T_1 zugeführt, T_1 steigt. Wiederum gilt das gleiche $p(V)$ -Diagramm wie bei der Wärmekraftmaschine, lediglich der Umlaufsinn und damit der Wärmetransport ist umgekehrt. Das Verhältnis von abgegebener Wärme $|Q_1|$ ($Q_1 < 0$) zu verrichteter Arbeit W gibt die *Leistungszahl* ε_w der Wärmepumpe an:

$$\varepsilon_w = \frac{|Q_1|}{W} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - Q_2} = \frac{1}{\eta_{st}} \approx \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1 \quad (8)$$

Bei einer Wärmepumpe wird mehr Wärme abgegeben als mechanische Arbeit geleistet, da zusätzlich einem Wärmereservoir Wärme entzogen wird. Man beachte den Unterschied zur gewöhnlichen Heizung, bei der chemische oder elektrische Energie lediglich in Wärme umgewandelt wird.

Wird wie im vorliegenden Versuch der Heißluftmotor so betrieben, dass das Reservoir mit der höheren Temperatur T_1 gekühlt wird, so gilt für die *Leistungszahl* ε_K dieser Kältemaschine $\varepsilon_K = \varepsilon_w$ gem. Gl. (8). Werden wie üblich mit einer Kältemaschine tiefe Temperaturen erzeugt, ist jedoch mit der Festlegung, dass mit T_1 jeweils die hohe, mit T_2 die tiefe Temperatur gemeint ist:

$$\varepsilon_K = \frac{Q_2}{W} = \frac{|Q_1| - W}{W} = \frac{1}{\eta_{st}} - 1 \approx \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (9)$$

In beiden Fällen sind die Leistungszahlen um so größer, d.h. wird Wärme um so effizienter transportiert, je geringer das Temperaturgefälle $T_1 - T_2$ ist.

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Betriebsdaten des Heißluftmotors als Wärmekraftmaschine bei verschiedener elektrischer Heizleistung im Leerlauf.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Betriebsdaten des Heißluftmotors als Wärmekraftmaschine bei verschiedener mechanischer Last und konstanter elektrischer Heizleistung.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Reibungsverluste des Heißluftmotors ohne Kompression bei Antrieb durch einen Elektromotor.
- 4. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Kühlleistung des Heißluftmotors im Betrieb als Kältemaschine bei Raumtemperatur.

4. Versuchsaufbau

Abb. 3 zeigt den im Versuch benutzten Heißluftmotor im Längsschnitt: Der Motor besteht aus einem Glaszylinder, in dessen oberes geschlossenes Ende, den Zylinderkopf eine elektrisch beheizte Glühwendel hineinragt und der im unteren Bereich von einem wasserdurchflossenen Kühlmantel umgeben ist.

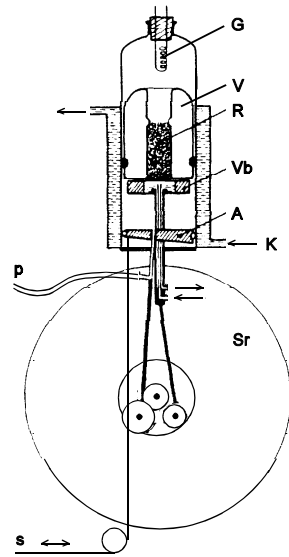


Abb.3:

Heißluftmotor
im Längsschnitt:

- G Glühwendel
- V Verdränger
- R Regenerator
- Vb Verdrängerboden
- A Arbeitskolben
- K Kühlwasser
- Sr Schwungrad
- p Druckmessung
- s Wegmessung

Das untere Ende des Zylinders wird vom Arbeitskolben abgeschlossen, dessen Pleuel exzentrisch an der Welle des Schwungrades montiert ist. Die vertikale Position s des Kolbens wird über einen Seilzug von einem Wegaufnehmer bestimmt. An einer Bohrung im Kolben wird über einen Schlauch der Druck p im Zylinder mit einem Druckaufnehmer gemessen. Zwischen Zylinderkopf und Arbeitskolben befindet sich der Verdrängerkolben mit wassergekühltem Boden, dessen Pleuel durch den Arbeitskolben hindurch ebenfalls exzentrisch mit der Welle des Schwungrades verbunden ist. Im axial mittig gelegenen Längskanal des Verdrängers befindet sich der aus Kupferwolle bestehende Regenerator. Bei der Auf- bzw. Abwärtsbewegung des Verdrängers wird das Gas durch den Regenerator hindurch von der warmen zur kalten bzw. von der kalten zur warmen Seite des Zylinders transportiert.

Im Versuch werden zwei Heißluftmotoren eingesetzt. Aufbau I dient zur Aufnahme mechanischer Betriebsdaten eines Motors als Wärmekraftmaschine im Leerlauf (1. Aufgabe) sowie unter Last (2. Aufgabe). Im Aufbau II wird der andere Motor über einen Riemen am Schwungrad von einem regelbaren Elektromotor angetrieben. Je nach Drehrichtung arbeitet der Motor entweder als Wärmepumpe oder Kältemaschine (4. Aufgabe), d.h. der Zylinderkopf (Temperatur T_1) wird über das Gas geheizt oder gekühlt. Hier werden kalorische Betriebsdaten ermittelt. Aufgabe des Versuchs ist die Bestimmung der vom Motor in der jeweiligen Betriebsart umgesetzten Energiemengen bzw. Leistungen sowie entsprechender Wirkungsgrade.

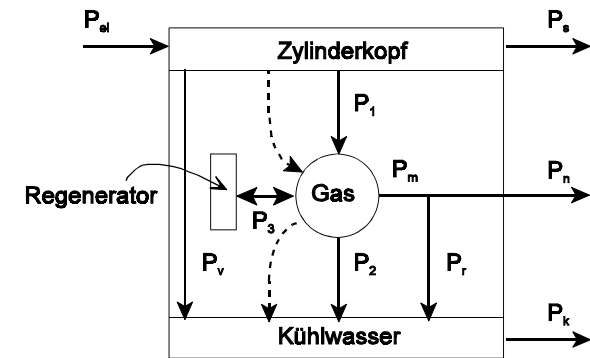


Abb. 4: Energieflussschema des Heißluftmotors

Abb. 4 zeigt das Energiefluss- bzw Leistungsschema des Heißluftmotors als Wärmekraftmaschine. In dieser Betriebsart stellt die elektrische Leistung P_{el} der Glühwendel im Zylinderkopf den Energieinput dar. Er wird durch die Messung von Spannung und Strom bestimmt. Ein großer Teil von P_{el} geht unmittelbar als Strahlungsleistung P_s an die Umgebung verloren (Glühbirne!), ein weiterer durch Wärmeleitung bzw. Wärmestrahlung P_v im Motor an das Kühlwasser. Diese Verluste werden durch den Wirkungsgrad η_{el} beschrieben:

$$\eta_{el} = \frac{P_1}{P_{el}} = \frac{n Q_1}{UI} \quad (10)$$

Die dem Gas im Kreisprozess bei der Expansion zugeführte (zeitlich gemittelte) Leistung $P_1 = nQ_1$ wird mit Gl. (2) aus dem $p(V)$ - bzw. $p(s)$ -Diagramm berechnet,

ebenso die vom Gas bei der Kompression an das Kühlwasser abgegebene Leistung $P_2 = nQ_2$ mit Gl. (3). Hieraus kann mit Gl.(6) der thermodynamische Wirkungsgrad $\eta_{st} = P_m / P_1$ bestimmt werden. Die Aufnahme und Auswertung des p(s)-Diagramms geschieht im Aufbau I mit den oben erwähnten Messaufnehmern und einem angeschlossenen PC (s.u.). Die Drehzahl n des Motors wird mit einem am Schwungrad montierten Drehzahlmesser gemessen.

Die mit dem Regenerator ausgetauschte Leistung P_3 bleibt unbestimmt, sie ist im zeitlichen Mittel Null. In der Praxis ist die ausgetauschte Wärme vom Betrag geringer als in Gl. (4) angegeben. Dies hat einen zusätzlichen Wärmestrom vom Zylinderkopf zum Kühlwasser für das Aufwärmen bzw. Abkühlen des Gases zur Folge, der hier ebenfalls unbestimmt bleibt (gestrichelte Pfeillinien in Abb. 4).

Die vom Gas an den Arbeitskolben abgegebene mechanische Leistung $P_m = P_1 - P_2$ geht zum Teil im Reibungsverlust P_r der Kolben und im geringeren Maße des Wellenlagers verloren, d.h. als Wärme ebenfalls ins Kühlwasser. Der andere Teil steht als mechanische Nutzleistung P_n an der Welle zur Verfügung. Die Reibungsverluste werden durch den Wirkungsgrad η_{mech} beschrieben:

$$\eta_{mech} = \frac{P_n}{P_m} = \frac{P_m - P_r}{P_m} \quad (11)$$

Im Leerlaufbetrieb ($P_n = 0$, $P_r = P_m = P_1 - P_2$) wird die drehzahlabhängige Verlustleistung P_r aus dem p(V)-Diagramm ermittelt. Bei Betrieb unter Last ($P_m = P_n + P_r$) wird die Nutzleistung P_n durch Abbremsen der Welle mittels eines verstellbaren Holzsaums bestimmt (s. Abb. 5).

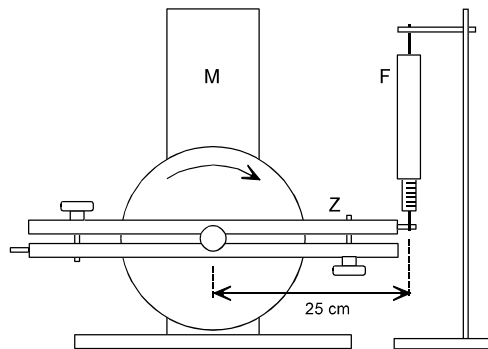


Abb. 5:
Anordnung zur Bestimmung der Bremsleistung P_n

M Motor
Z Zaum
F Federwaage

Die eingestellte Bremsarbeit W_n pro Umlauf ergibt sich aus der Kraft F und der Länge $l = 25\text{cm}$ des Zaums von der Welle bis zur Federwaage, die Bremsleistung P_n aus W_n und der Drehzahl n.

$$P_n = W_n n = 2 \pi n F l \quad (12)$$

Mit Gl. (3), (10) u. (11) ist der Gesamtwirkungsgrad η_g der Wärmekraftmaschine:

$$\eta_g = \frac{P_n}{P_{el}} = \eta_{el} \eta_{st} \eta_{mech} \quad (13)$$

Im Aufbau II wird die mit dem Kühlwasser abgeführte Wärmeleistung P_k bei Betrieb des Motors ohne Kompression (3. Aufgabe) und als Kältemaschine (4. Aufgabe) aus dem Anstieg ΔT_2 der Kühlwassertemperatur beim Betrieb des Motors im Vergleich zum Stillstand ermittelt:

$$P_k = c_w \rho_w \frac{\Delta V}{\Delta t} \Delta T_2 \quad (14)$$

Hierbei ist $c_w = 4,1868 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ die spez. Wärmekapazität und $\rho_w \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$ die Dichte des Wassers. Der Kühlwasserfluss $\Delta V/\Delta t$ wird durch die Messung der Füllzeit eines Behälters im Wasserauslauf bestimmt, die Temperatur T_2 mit einem Thermometer unmittelbar am Motor im Ablauf des Kühlwassers. Wird der ungeheizte Motor bei geöffnetem Zylinderkopf und Druckschlauchanschluss, d.h. ohne Kompression mit dem Elektromotor angetrieben, sollte gelten: $P_k \approx P_r$.

Die Kühlleistung P_1 des Motors als Kältemaschine wird bestimmt, indem durch Strom- und Spannungsmessung die Heizleistung P_{el} ermittelt wird, welche nötig ist, um die Temperatur T_1 des Zylinderkopfes bei Raumtemperatur (20°C) zu halten. Gleichzeitig wird die Kühlwassertemperatur T_2 gemessen und mit Gl. (14) die Kühlwasserleistung P_k bestimmt (4. Aufgabe). Mit dem Ergebnis für P_r der 3. Aufgabe wird die Leistungszahl der Kältemaschine berechnet:

$$\epsilon_k = \frac{P_1}{|P_m|} = \frac{P_{el}}{P_2 - P_{el}} = \frac{P_{el}}{P_k - P_r - P_{el}} \quad (15)$$

5. Versuchsdurchführung

Zu Beginn der Versuche werden zuerst die Kühlwasserhähne für beide Motoren geöffnet (1/4 Umdrehung) sowie alle Messgeräte und der PC mit Drucker eingeschaltet, ebenso die für die Zylinderkopfheizungen vorgesehenen Netzgeräte. Deren Spannungsausgänge bleiben vorerst auf Null gestellt. Aufbau I (Wärmekeftmaschine) kann mit max. 300 W (ca. 17V~, 17A) über einen Transformator mit vorgeschaltetem Regeltransformator beheizt werden. Aufbau II (Wärmepumpe bzw. Kältemaschine) wird über ein Netzgerät lediglich zur Bestimmung der Kühlleistung am Zylinderkopf beheizt (ca. 8V~, 2A).

5.1 Wärmekeftmaschine im Leerlauf

Zunächst wird das zur Aufnahme der p(s)-Diagramme benutzte Programm *Messen und Auswerten* mit dem Befehl C:\cassy\lh.exe geladen, im darauf angezeigten Menü das Unterprogramm *XY-Schreiber*.

Das Programm *XY-Schreiber* ist menügeführt und wird im wesentlichen gesteuert durch die Cursor-Tasten (Auswahl von Menüpunkten), die Return-Taste (Aktivierung eines Menüpunktes bzw. Bestätigung der Eingabe von Parametern etc.), die Esc-Taste (Verlassen einer Menüebene bzw. Bildschirmgrafik, Abbrechen einer Eingabe oder Messung, Rücksetzung einer Fehlermeldung) sowie die Funktionstasten F1 - F10 (vor allem für Befehle im Grafikmodus des Bildschirms).

Ist der Menübildschirm von *XY-Schreiber* gewählt, stehen im **Kopfbereich** alle wichtigen Parameter des laufenden Messprogramms bzw. der aktuell erstellten oder geladenen Messdatei. Im **Hauptmenü** ist zu Beginn auszuführen nach:

Messgrößen auswählen:

Kanal A neu wählen: Wegaufnehmer

Kanal D neu wählen: Drucksensor

Messbereiche auswählen:

Bereich A neu wählen: 0 - 15cm

Bereich D neu wählen: Bereich teilen 0 - 2000 hPa (0 - $2 \times 10^5 \text{Nm}^{-2}$)

Dann wird mit dem Regeltrafo die Spannung der Zylinderkopfheizung auf ca. 16V eingestellt. Wenn die Glühwendel zu leuchten beginnt, wird der Motor am Schwungrad kurz und kräftig mit der Hand im Uhrzeigersinn angeworfen. Zur Sicherheit ist von der studentischen Hilfskraft Hilfestellung zu leisten. Sollte der Motor nicht von allein weiterlaufen, ist das Anwerfen unmittelbar zu wiederholen, anderenfalls die Heizung sofort abzustellen (Regeltrafo auf Null). **Auf keinen**

Fall darf der Zylinderkopf länger als einige Sekunden bei Rotglut im Stand beheizt werden, da sonst innerhalb kürzester Zeit der Motor überhitzt und zerstört wird! Läuft der Motor von allein, sollte er ca. 5 min. einlaufen, wobei er eine Drehzahl von mindestens $n = 7 \text{ s}^{-1}$ erreichen sollte ($n(\text{s}^{-1}) = \text{Anzeige} \times 0.1$). Darauf ist Heizspannung auf ca. 10V zu reduzieren.

Die Messungen sind bei Heizspannungen von ca. 10V, 12,5V u. 15V durchzuführen. Nach jeder Spannungseinstellung ist ca. 5 min. zu warten, bis sich das Temperaturgleichgewicht neu eingestellt hat. Gegebenenfalls kann diese Zeit zur Auswertung bereits aufgenommener p(s)-Diagramme (s.u.) genutzt werden.

Für jede eingestellte Spannung werden jeweils notiert bzw. gespeichert: lfd. Nr., Heizspannung und -strom, Drehzahl, das p(s)-Diagramm sowie der Filename der gespeicherten Daten.

Nach Aktivierung von *Messung aufnehmen* erscheint der Grafik-Bildschirm mit p(s)-Diagramm. Mit *F1* werden 2270 Messwerte gespeichert. Falls die Aufnahme nicht in Ordnung ist, wiederholen! Danach unter

Darstellung auswählen:

<i>Option wählen:</i>	Skalierung merken	abschalten
	Achsen optimieren	einschalten.

Falls nach *Grafisch auswerten* das gezeigte p(s)-Diagramm in Ordnung ist, die Messdaten speichern mit:

Diskettenoperation:

Messdaten speichern: Filename: [Gruppennr.] [Aufgabennr.] [lfd. Nr.]
(z.B.: 10513)

Die unmittelbare Auswertung der p(s)-Messdaten kann entweder nach jeder Einzelmessung oder im Anschluss an alle Messungen der 1. u. 2. Aufgabe geschehen. Hierfür, falls die auszuwertende Grafik nicht schon auf dem Bildschirm ist, mit der Menüauswahl

Diskettenoperation:

Messdaten laden: Filename auswählen

Grafisch auswerten:

die Daten auf dem Bildschirm darstellen. Darauf ist für jedes Diagramm mit

<i>F9</i>	der Cursor zu holen (oder zu löschen),
<i>shift TAB</i>	der Cursor an den oberen linken Punkt des Diagramms zu bringen,
<i>ctrl ←</i>	der Bereichsanfang zu setzen,

TAB der Cursor an den unteren rechten Punkt des Diagramms zu bringen,
ctrl → das Bereichsende zu setzen,
F5 der Bereich zu integrieren,
alt F5 der Wert $\int_1 pds$ anzuzeigen und zu notieren, z.B. 3300 hPacm,
F5, F9 der Cursor rechts unten zu positionieren,
ctrl ← der Bereichsanfang zu setzen,
TAB der Cursor an den oberen linken Punkt des Diagramms zu bringen,
ctrl → das Bereichsende zu setzen,
F5 der Bereich zu integrieren,
alt F5 der Wert $\int_2 pds$ anzuzeigen und zu notieren, z.B. -2200 hPacm.

Am Schluss ist mit *Druck* ein neu geladenes typisches p(s)-Diagramm für das Protokoll auszudrucken.

5.2 Wärmekraftmaschine unter Last

Die Heizung des laufenden Motors bleibt auf ca. 15V eingestellt. Danach wird wie in Abb. 5 angedeutet der Holzsaum auf die Welle des Motors aufgeschoben und durch vorsichtiges Verdrehen der Knebelschrauben so angezogen, dass nur eine minimale Reibung entsteht und die an einer Seite angehängte Federwaage (max. 5N) eine Kraft zwischen 0,1 und 0,2 N anzeigt. Nach 2 min. Wartezeit, der Drehzahlmessung und Aufnahme eines p(s)-Diagramms wird eine Bremskraft von ca. 0,6N, danach von 1,2N eingestellt und die Messung jeweils wiederholt. Bei großer Bremskraft, d.h. geringer Drehzahl n ist die Drehung recht ungleichmäßig, so dass der Zaum evtl. zu schwingen beginnt. In diesem Fall ist der Zaum zunächst an der Waage festzuhalten und nach dem Loslassen die Kraft an der Federwaage möglichst schnell abzulesen oder der zeitliche Mittelwert zu schätzen. Am Schluss der Messungen ist die Heizung abzustellen und der Zaum vom Motor abzunehmen.

5.3 Reibungsverluste des Motors

Die Reibungsverluste P_r des Motors im Aufbau II werden aus dem Anstieg der Kühlwassertemperatur T_2 , d.h. aus der Kühlwasserleistung P_k bei Betrieb ohne Kompression mit Elektromotorantrieb ermittelt. Da T_2 sich nur wenig ($<1^\circ\text{C}$) ändert, wird zur Steigerung der Empfindlichkeit der Messung der Kühlwasserfluss durch Zudrehen des Wasserhahns auf 1/8 Umdrehung reduziert. Beobachten Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur T_2 vor Beginn des Versuchs! Gegebenenfalls ist im Vorlauf der Wasserhahn zum Becken zu öffnen, um in der Leitung stehendes erwärmtes Wasser zu entfernen. T_2 sollte sich vor dem Versuch nicht mehr ändern.

Lösen Sie die Flügelmuttern des Dichtflansches am Zylinderkopf des Motors und entfernen Sie vorsichtig den Flansch samt Heizung und Thermometer T_1 . Legen sie den Flansch so ab, dass er nicht auf der Heizwendel liegt. Ziehen Sie den Gummistopfen am Druckschlauchanschluss ab, so dass der Motor nun praktisch kompressionslos ist. Im folgenden Vor-, Haupt- und Nachversuch wird die Temperatur T_2 des Kühlwassers jede Minute notiert.

Im Vorversuch wird T_2 über ca. 5 min. bei Stillstand des Motors registriert. Im anschließenden Hauptversuch wird der zeitliche Verlauf von T_2 über 10 min. bei eingeschaltetem Elektromotor ermittelt. Der Motorregler ist auf die Drehzahl $n = 3.5 \text{ s}^{-1}$ im Rechtslauf einzustellen. Gegen Ende dieses Versuchsteils sollte sich T_2 zeitlich nicht mehr bzw. kaum noch ändern, T_2 also einen neuen Gleichgewichtswert nahezu erreicht haben. Im darauf folgenden Nachversuch wird wieder bei Stillstand des Motors der zeitliche Verlauf von T_2 über 10 min. registriert. Am Schluss sollte T_2 in etwa wieder den im Vorversuch registrierten Wert angenommen haben.

Der mit Gl. (14) für die Berechnung der Kühlwasserleistung $P_k = P_r$ benötigte Wert für den Kühlwasserfluss wird gegen Ende des Nachversuchs oder unmittelbar danach durch die Messung der Füllzeit eines 11-Erlemeyerkolbens am Auslauf im Waschbecken ermittelt.

5.4 Kühlleistung des Motors

Zunächst wird der Kühlwasserfluss wieder erhöht (1/4 Umdrehung) dann der Zylinderkopf-Flansch aufgesetzt und in der ursprünglichen Position mit den Flügelmuttern gleichmäßig handfest angeschraubt, danach der Gummistopfen am Druckschlauchanschluss aufgesteckt. Es werden die Heizleitungen mit Netzgerät und Geräten zur Strom- und Spannungsmessung angeschlossen.

Der Versuch wird in den Zeitintervallen 5 min. Vor-, 20 min. Haupt- und 10 min. Nachversuch durchgeführt. Es werden die Zylinderkopftemperatur T_1 und die Kühlwassertemperatur T_2 jede Minute registriert, zusätzlich im Hauptversuch Heizspannung und -strom des Zylinderkopfes. Beachten Sie auch hier, dass T_1 u. T_2 im Vorversuch zeitlich nahezu konstant sein sollen!

Nach dem Vorversuch wird im Hauptversuch **zuerst** der Elektromotor im Rechtslauf eingeschaltet und die Drehzahl auf $n = 3.5 \text{ s}^{-1}$ eingestellt. Unmittelbar **danach** ist die Heizspannung für die ersten 10 min. auf ca. 8.5V einzustellen, für die folgenden auf ca. 8.0V. Notieren Sie neben T_1 und T_2 die eingestellten Heizdaten im Minutenabstand und regeln Sie falls nötig die Drehzahl auf den Sollwert nach. Schalten Sie am Ende des Hauptversuchs **zuerst** die Heizspannung

ab, unmittelbar **danach** den Elektromotor! Nach Beenden des Nachversuchs ist wie zuvor der Kühlwasserfluss zu messen.

6. Auswertung und Diskussion

1. u. 2. Aufgabe

Zunächst sind zu den aus den p(s)-Diagrammen ermittelten Integralen $\int_{1,2} p ds$ die Integrale $\pm \int p_0 ds = \pm p_0 \Delta s$ zu addieren, da lediglich der Druck p über dem Normaldruck p_0 gemessen wird. Die Energien W_1' bzw. W_2' erhält man durch Multiplikation mit dem Kolbenquerschnitt des Motors, die entsprechenden Leistungen durch anschließende Multiplikation mit der Drehzahl n:

$$P_{1,2} = n W'_{1,2} = n A_M \left[\int_{1,2} p ds \pm p_0 \Delta s \right] \quad (16)$$

Hier ist $p_0 = 1013 \text{ hPa}$ der Normaldruck, $\Delta s = 4.9 \text{ cm}$ der Hub und $A_M = 2.83 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ die Querschnittsfläche des Arbeitskolbens.

Tragen Sie die Werte $W' = W_1' + W_2'$ sowie W_n für die vom Gas pro Umlauf geleistete mech. Arbeit bzw. Nutzarbeit über n^2 auf und diskutieren Sie den Verlauf. Ermitteln Sie mit einer Ausgleichsgeraden $W_r(n) = W_0 + an^2$ die Abhängigkeit der Reibungsarbeit W_r von der Drehzahl n. Wieso ist W_r drehzahlabhängig? Vergleichen Sie für die Messungen unter Last die mit Gl. (12) ermittelten Werte für W_n mit solchen aus $W' - W_r(n)$ berechneten.

Bestimmen Sie für alle Messungen die Leistungen P_{el} , P_1 , P_m , P_n sowie die entsprechenden Wirkungsgrade η_{el} , η_{St} , η_{mech} und η_g . Tragen Sie in zwei Diagrammen die Leistungen P_m und P_n sowie die Wirkungsgrade η_{St} , $\eta_{el} \times \eta_{St}$ und η_g über der Drehzahl n auf und diskutieren Sie den Verlauf. Gibt es bei vorgegebener Heizleistung des Motors eine mech. Last, bei welcher der Gesamtwirkungsgrad η_g jeweils maximal wird? Welche Maßnahmen sind geeignet, die einzelnen Wirkungsgrade des Motors zu erhöhen?

3. u. 4. Aufgabe

Tragen sie zur Auswertung der 3. Aufgabe die Temperatur T_2 (Teilung 0.1 C) für Vor-, Haupt- und Nachversuch über der Zeit t auf. Ermitteln Sie grafisch aus dem Diagramm ΔT_2 als größte Differenz der Gleichgewichtstemperatur zur Basistemperatur im Hauptversuch. Die Basistemperatur wird durch Interpolation von T_2 im Vor- und Nachversuch bestimmt. Berechnen Sie mit Gl. (14) die

Kühlwasserleistung und damit die Leistung P_r infolge der Motorreibung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis der 1. Aufgabe $P_r(n)$.

Tragen Sie die aus den Messwerten der 4. Aufgabe berechnete elektrische Heizleistung P_{el} sowie die Temperaturen T_1 und T_2 übereinander jeweils als Funktion der gesamten Messzeit t auf. Bestimmen Sie für den Hauptversuch grafisch zwei zeitl. gemittelte Temperaturen T_1 u. entsprechende Kühlleistungen $P_1 = P_{el}$. Die mittlere Kühlleistung P_1 für $T_1 = 20\text{C}$ ist durch lineare Interpolation aus diesen Werten zu berechnen. Diskutieren sie den zeitlichen Verlauf der Messkurven und mögliche systematische Fehler bei der Auswertung.

Bestimmen Sie den Temperaturanstieg ΔT_2 und berechnen Sie wie zuvor die Kühlwasserleistung P_k . Mit Gl. (15) sind aus den Ergebnissen der 3. u. 4. Aufgabe Leistungszahlen ϵ_k der Kältemaschine für die gemittelten Temperaturen T_1 zu berechnen. Vergleichen Sie diese Zahlen mit Werten für ϵ_k bzw. ϵ_w , welche man mit den Gln. (8) u. (9) für den idealen Stirling-Kreisprozess erhält. Diskutieren Sie mögliche Ursachen für Unterschiede.

7. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Zustandsänderungen durchläuft ein Gas beim idealen Stirling-Kreisprozess? Welche Energiemengen werden dabei jeweils übertragen?
- 2) Wie ist der thermodynamische Wirkungsgrad η_{St} des Stirling-Prozesses definiert?
- 3) Von welchen Größen hängt η_{St} beim idealen, reversiblen Stirling-Prozess ab?
- 4) Wie unterscheidet sich der thermodynamische Wirkungsgrad des irreversiblen Kreisprozesses von dem des reversiblen?
- 5) Was versteht man unter dem Gesamtwirkungsgrad η_g einer Wärmekraftmaschine? Vergleichen Sie η_g mit η_{St} !
- 6) Wie funktioniert eine Wärmepumpe?
- 7) Beschreiben Sie den Kreisprozess eines Stirling-Motors, der als Wärmepumpe bzw. Kältemaschine arbeitet!
- 8) Wie ist die Leistungszahl einer Wärmepumpe bzw. Kältemaschine definiert und wovon hängt sie beim idealen Stirlingprozess ab?
- 9) Wie funktioniert ein Kühlschranks?

Versuch B 8: Bestimmung der spezifischen Ladung e/m

1. Literatur: Bergmann-Schaefer, Experimentalphysik, Bd. II
 Pohl, Einführung in die Physik, Bd. 2
 Dobrinski/Krakau/Vogel, Physik für Ingenieure

Stichworte: Elektronenröhre, Kraftwirkung elektromagnetischer Felder auf bewegte Ladungen, magnetische Feldstärke und Induktion, Ionisation, Rekombination, Lichtemission, Millikan-Versuch

2. Grundlagen

In diesem Versuch soll die spezifische Ladung e/m des Elektrons durch Ablenkung eines Elektronenstrahls im Magnetfeld bestimmt werden. Ähnliche Versuche wurden erstmals von H. Busch (1922) durchgeführt.

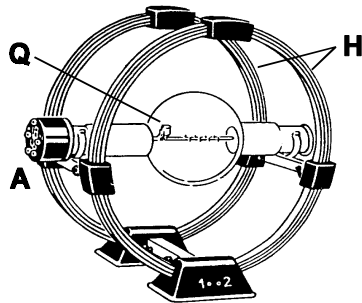


Abb.1: Fadenstrahlrohr mit Helmholtz-Spulen H, Elektronenstrahlquelle Q, Sockel mit Anschlussbuchsen A

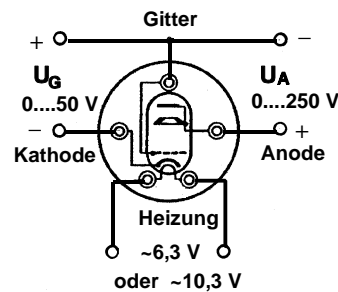


Abb.2: Anschlussbuchsen mit Schalt-schema für Strahlerzeugungseinheit

Abb. 1 zeigt das benutzte Fadenstrahlrohr mit dem Helmholtz-Spulenpaar. Abb. 2 gibt die Stirnfläche der Röhre mit dem Schalt-schema und den Anschlussbuchsen für die Glühkathode, das Gitter und die mit einem Loch versehene Anode wieder. Durch thermisch induzierte Elektronenemission (Heizen der Kathode) und anschließende Beschleunigung und Fokussierung der Elektronen wird ein

Elektronenstrahl erzeugt. Liegt zwischen der Kathode und der Anode eine Beschleunigungsspannung U , so verlassen die Elektronen (Ladung e , Masse m) das Beschleunigungssystem durch das Anodenloch mit einer bestimmten Geschwindigkeit v . Es gilt nach dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad (1)$$

Im feldfreien Raum würden die Elektronen nach Verlassen der Anode gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit v weiterfliegen. Bewegen sich die Elektronen jedoch in einem Magnetfeld der Flussdichte B , so wirkt auf sie die Lorentzkraft F_L :

$$\underline{F}_L = -e(\underline{v} \times \underline{B}) \quad (2)$$

Da die Kraft F_L immer senkrecht auf der von v und B aufgespannten Ebene steht, wird durch die Lorentzkraft nur die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit der Elektronen geändert.

Betrachtet man die Bahn eines Elektrons, dessen Geschwindigkeitsvektor v senkrecht zum B -Vektor eines homogenen Magnetfeldes orientiert ist und geht zu Beträgen über, so vereinfacht sich Gl. (2) zu:

$$F_L = e v B \quad (3)$$

Die Lorentzkraft wirkt dann ständig mit konstanter Größe F_L senkrecht zu v . Das Elektron wird auf eine Kreisbahn gezwungen, wobei die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, und es gilt:

$$e v B = m \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

wobei r der Bahnradius ist. Mit Gl. (1) und (4) erhält man:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad (5)$$

Die Beschleunigungsspannung U und der Bahnradius r werden im durchzuführenden Versuch direkt gemessen. Die Größe des B-Feldes muss hingegen aus der Geometrie des felderzeugenden Spulensystems und dem Spulenstrom I bestimmt werden. Im Vakuum gilt zwischen der magnetischen Induktion B und der magnetischen Feldstärke H die Beziehung:

$$B = \mu_0 H \quad (6)$$

$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ist die *Induktionskonstante*. Prinzipiell lässt sich die magnetische Feldstärke jeder beliebigen Spule mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes berechnen. Für die Feldstärke bzw. magnetische Induktion im Mittelpunkt einer Ringspule von n Windungen und dem Radius R ergibt sich, wenn die Länge der Spule $l \ll R$ ist:

$$H = \frac{nI}{2R} \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0 \frac{nI}{2R} \quad (7)$$

Zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes (nach Helmholtz) bedient man sich zweier Kreisspulen mit gleichem Radius, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Achse im Abstand ihrer Radien liegen (s. Abb. 1). Ist der Strom in beiden Spulen gleich, so lässt sich die magnetische Flussdichte B im inneren Bereich eines solchen Helmholtz-Spulensystems aus dem mittleren Spulenradius R , der Windungszahl n einer jeden Spule und dem Spulenstrom I errechnen:

$$B = 0,715 \mu_0 \frac{nI}{R} \quad (8)$$

Der Faktor 0,715 ergibt sich aus der Geometrie der Spulenordnung. Aus Gl. (5) und (8) erhält man schließlich:

$$\frac{e}{m} = C \frac{U}{(rI)^2} \quad (9)$$

mit der Konstanten:

$$C = 2 \left(\frac{R}{0,715 \mu_0 n} \right)^2 \quad (10)$$

Der Radius des im Praktikum beutzten Spulensystems beträgt $R = 20 \text{ cm}$; die Windungszahl je Spule ist $n = 154$. Bestimmt man U , I und r experimentell, so kann die spezifische Ladung e/m nach Gl. (9) berechnet werden.

Die Bahn des Elektronenstrahls im Fadenstrahlrohr wird sichtbar, da die Elektronen mit den Gasmolekülen des Füllgases (Inertgas unter vermindertem Druck) zusammenstoßen und diese ionisieren (Stoßionisation). Nach der anschließenden Rekombination befinden sich die Gasmoleküle in angeregten Zuständen. Beim Übergang in energetisch tieferliegende Niveaus bzw. in den Grundzustand emittieren die Moleküle elektromagnetische Strahlung im sichtbaren Spektralbereich (Licht).

Da die Größe der Elektronenladung $e = -1,6021 \times 10^{-19} \text{ C}$ unabhängig von der Masse bestimmt werden kann, (z.B. im Versuch von R.A. Millikan, 1910; geladene Öl-Tröpfchen in einem Kondensator), lässt sich aus dem Verhältnis von e/m die Elektronenmasse $m_e = 9,1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$ berechnen.

Technisch wird die Ablenkung von Elektronenstrahlen durch Magnetfelder bei Fernsehbildröhren und bei den magnetischen Linsen in Elektronenmikroskopen genutzt. Das Prinzip lässt sich jedoch auch auf andere geladene Teilchen (Protonen, Ionen uws.) anwenden. Dies geschieht z.B. in den Massenspektrometern und den Beschleunigungsanlagen der Elementarteilchen- und Kernforschung (Zyklotron, Synchrotron).

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Am Fadenstrahlrohr ist aus mehreren Messungen der Beschleunigungsspannung und des Spulenstromes für verschiedene vorgegebene Radien des kreisförmigen Elektronenstrahls die spezifische Ladung e/m zu bestimmen.
- 2. Aufgabe:** Eine kritische Fehlerbetrachtung und -berechnung ist durchzuführen.

4. Versuchsdurchführung

Zur Erzeugung des Magnetfeldes werden die beiden Spulen (siehe Abb. 1) in Reihe geschaltet und an eine stabilisierte, regelbare Gleichstromquelle angeschlossen. Der Spulenstrom I wird mit einem Amperemeter gemessen.

Das Fadenstrahlrohr ist gem. Abb. 2 an die Gleichspannungsquellen für die

Anoden- und Gitterspannung U_A bzw. U_G (*Polung beachten!*) und die Wechselspannungsquelle für die Kathodenheizung anzuschließen. Die zu bestimmende Beschleunigungsspannung U ist die Summe von U_A und U_G . Sie wird mit einem Voltmeter (300 V \Rightarrow) gemessen, welches zwischen Kathode und Anode geschaltet wird. Die für die Heizung der Kathode notwendige Wechselspannung (6,3V \sim oder 10,3V \sim) ist auf den Anschlussbuchsen des jeweils benutzten Fadenstrahlrohrs angegeben.

Wichtig: Vor dem Einschalten der Geräte muss die Schaltung vom Betreuer des Versuchs überprüft werden! Außerdem ist vor Inbetriebnahme des Fadenstrahlrohrs darauf zu achten, dass die beiden Potentiometer der Spannungsquellen U_A und U_G auf Null stehen. Erst nach einer Anheizzeit von ca. 3 Minuten darf die Anodenspannung U_A im Bereich von 0 bis 250 V und die Gitterspannung U_G im Bereich von 0 bis 50 V eingestellt werden.

Durch eine geeignete Gitterspannung wird Schärfe und Helligkeit des Fadenstrahlrohrs bestimmt. Bei längeren Messpausen sind Anoden- und Gitterspannung wieder auf Null zu stellen, die Kathodenheizung bleibt jedoch an. Ist nach der Anheizzeit der Fadenstrahl im abgedunkelten Raum sichtbar, wird eine bestimmte Beschleunigungsspannung U ($= U_A + U_G$) eingestellt, der Stromkreis zu den Helmholtzspulen geschlossen und durch vorsichtiges Drehen des Fadenstrahlrohrs der Strahl so eingestellt, dass er das Strahlerzeugungssystem senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes verlässt und bei geeigneter Größe des Magnetfeldes einen Vollkreis beschreibt. Der Spulenstrom ist so einzustellen, dass der Elektronenstrahl einen Kreis mit dem gewünschten Radius r beschreibt. Zur Bestimmung der Radien sind im Fadenstrahlrohr Messmarken angebracht, die $r = 2, 3, 4$ und 5 cm entsprechen.

Folgende Messreihen sind aufzunehmen:

Bei vorgegebener fester Beschleunigungsspannung (z.B. 150 V) wird zu jedem der vier o.a. Radien der zugehörige Spulenstrom I viermal gemessen und dann der Mittelwert gebildet.

Der Versuch ist für mindestens 4 Beschleunigungsspannungen (z.B. 150 V, 200 V, 250 V und 300 V) durchzuführen.

5. Auswertung

Zunächst ist die Konstante C zu berechnen (Gl. 10), dann (gem. Gl. 9) aus den zugehörigen Werten von U , r und dem gemittelten Wert von I das Verhältnis e/m .

Es ist so für jede der 4 Beschleunigungsspannungen zu verfahren und dann der

Mittelwert von e/m zu berechnen.

Führen Sie eine Fehlerrechnung durch und verwenden Sie hierfür: $\Delta r = \pm 0,5$ mm, $\Delta R = \pm 2$ mm, μ_0 und n fehlerfrei. ΔU und ΔI sind der Güteklasse der Messgeräte zu entnehmen. ΔI wird außerdem als Messunsicherheit (Standardabweichung des Mittelwertes) aus den 4 Messwerten bestimmt. Für die Weiterrechnung wird der größere der beiden Fehler benutzt. Zu berechnen sind nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für jeden Radius r und jede Spannung U der relative Größtfehler von e/m . (Da e/m ein Potenzprodukt von R , U , r und i ist, ist die Berechnung des relativen Fehlers besonders einfach).

Diskutieren Sie die Ergebnisse, gehen Sie dabei auch auf mögliche systematische Fehler (z.B. elektrostatische Aufladung des Glases, Potenziale der Metallteile usw.) ein.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie lassen sich - außer durch Glühemission - noch *freie* Elektronen erzeugen?
- 2) Wie hängen Radius und Kreisfrequenz der Elektronenbahn von der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigungsspannung ab?
- 3) Wie können Sie feststellen, dass es sich tatsächlich um die Kreisbahn negativ geladener Teilchen handelt?
- 4) Welche Bahn beschreiben geladene Teilchen, die schräg zur Feldrichtung in ein Magnetfeld eintreten?
- 5) Warum werden für sehr große Beschleunigungsspannungen die Werte für e/m kleiner?
- 6) Was versteht man unter den Begriffen *Stoßionisation* und *Rekombination*?
- 7) Beschreiben Sie den mikroskopischen Mechanismus der atomaren Lichtemission.

Versuch B14: Millikan-Versuch Bestimmung der elektr. Elementarladung

1. Literatur: Schpolski, Atomphysik, Bd. I
Hellwege, Einführung in die Physik der Atome
Pohl, Elektrizitätslehre
Finkelnburg, Einführung in die Atomphysik
Haken/Wolf, Atom- u. Quantenphysik

Stichworte: Millikan-Experiment, elektr. Ladung des Elektrons, elektr. Feld, Plattenkondensator, Kraftwirkung auf elektr. Ladungen, Stokessche Reibungsformel, Zähigkeit der Luft

2. Grundlagen

Der direkte Nachweis für die Existenz der elektr. Elementarladung und deren Bestimmung gelang zuerst R.A. Millikan im Jahre 1911. Millikan untersuchte in seinem Experiment, das im vorliegenden Versuch nachvollzogen werden soll, die Bewegung kleinster geladener Öltröpfchen unter dem Einfluss der Schwerkraft und der Kraftwirkung eines vertikal gerichteten homogenen elektr. Feldes.

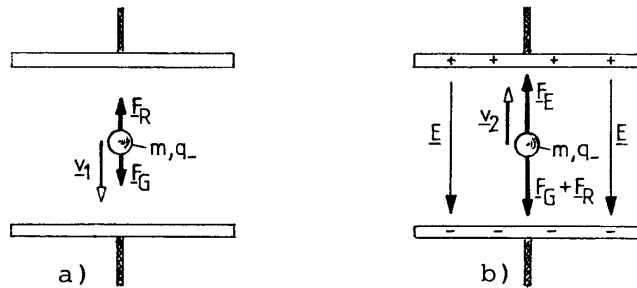


Abb.1: Öltröpfchen im Millikan-Kondensator:
a) ohne elektr. Feld, b) mit elektr. Feld

Das Prinzip des Millikan-Experiments zeigt Abb. 1 schematisch. Mit einem Zerstäuber werden Öltröpfchen (Masse m) in den Luftraum zwischen die horizontal liegenden Platten eines Kondensators gebracht. Mit einem Mikroskop kann die Bewegung der Tröpfchen von der Seite her beobachtet werden. Ein großer Teil der Tröpfchen besitzt infolge der Reibung beim Zerstäubungsvorgang bereits eine

positive oder negative elektr. Ladung q . Mit ionisierender Strahlung (z.B. Röntgenstrahlen) lassen sich die Tröpfchen im Kondensator zusätzlich auf- oder umladen.

Liegt am Kondensator keine elektr. Spannung (Abb. 1a), wirken auf ein Öltröpfchen lediglich die Schwerkraft \underline{F}_G und die Reibungskraft \underline{F}_R infolge seiner Bewegung durch die Luft.

$$\underline{F}_G = m\underline{g} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})\underline{g} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho\underline{g} \quad (1)$$

$$\underline{F}_R = -6\pi r\eta\underline{v} \quad (2)$$

Hierbei ist r der Radius des (kugelförmigen) Öltröpfchens mit Masse m , ρ die um die Dichte der Luft (Auftrieb) verminderte Dichte des Öls, η die Zähigkeit der Luft und \underline{v} die Geschwindigkeit des Öltröpfchens. Sind beide Kräfte im Gleichgewicht ($\underline{F}_G + \underline{F}_R = 0$), sinkt das Tröpfchen mit konstanter Geschwindigkeit v_1 :

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - 6\pi r\eta v_1 = 0 \quad (3)$$

Liegt am Kondensator eine Spannung U (Abb. 1b), so wirkt infolge des elektr. Feldes \underline{E} zwischen den Kondensatorplatten zusätzlich die Kraft

$$\underline{F}_E = q\underline{E} \quad (4)$$

auf das Öltröpfchen mit Ladung q . Hierbei ist $E = U/d$ und d der Abstand der Kondensatorplatten. Im Gleichgewicht der Kräfte \underline{F}_G , \underline{F}_R und \underline{F}_E wird das Öltröpfchen in Abhängigkeit von seiner Ladung und Größe, sowie der Größe und Richtung des elektr. Feldes mit einer von v_1 abweichenden Geschwindigkeit v_2 sinken oder steigen.

Beschränkt man sich auf negativ geladene Öltröpfchen ($q < 0$), so wird, wenn die obere Kondensatorplatte positiv geladen ist, bei genügend großer Spannung U das Öltröpfchen steigen und es gilt im Gleichgewicht der Kräfte:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g + 6 \pi r \eta v_2 + \frac{qU}{d} = 0 \quad (5)$$

Mit dem Okularmikrometer des Mikroskops können die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bestimmt werden. Aus Gl. (3) lässt sich der Radius des Tröpfchens bestimmen

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_1}{2 \rho g}} \quad (6)$$

und in Gl. (5) einsetzen. Man erhält für die Ladung des Öltröpfchens:

$$q = -\frac{18 \pi d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_1}{2 \rho g}} (v_1 + v_2) \quad (7)$$

Millikan fand, dass die Ladungen q der Öltröpfchen ein ganzzahliges Vielfaches n der Elementarladung e waren. Der heute genauer bekannte Wert der Elementarladung e ist:

$$e = (1,602192 \pm 0,000007) \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Zur möglichst präzisen Bestimmung der Elementarladung aus dem Millikan-Experiment muss Gl. (7) noch mit einer Korrektur versehen werden. Die Messergebnisse zeigen, dass bei kleineren Öltröpfchen der nach Gl. (7) berechnete Wert $q = n e$ mit abnehmendem Radius r systematisch größer wird. Millikan erklärte dieses Verhalten damit, dass für sehr kleine Öltröpfchen (mittlerer Radius ca. 10^{-7} bis 10^{-6} m) die Stokessche Formel für die Reibungskraft, Gl. (2), nicht mehr anwendbar ist. Gl.(2) gilt mit hinreichender Genauigkeit nur für die Bewegung kugelförmiger makroskopischer Körper in einem kontinuierlichen Medium, d.h. für Öltröpfchen, deren Radius r wesentlich größer als die mittlere freie Weglänge λ der Luftmoleküle ist (λ einige 10^{-8} m). Tatsächlich kann man bei sehr kleinen Öltröpfchen mitunter beobachten, wie diese bei ihrer Sink- oder Steigbewegung in der Millikan-Kammer streckenweise beschleunigt werden, als ob sie für eine gewisse Zeit zwischen den Luftmolekülen hindurchfallen oder -steigen würden.

Gl. (7) liefert *richtige*, d.h. vom Radius r der Tröpfchen unabhängige Ergebnisse für q , wenn in der Stokesschen Formel für die Reibungskraft, Gl. (2), und entsprechend in Gl. (7) die makroskopische Zähigkeit η der Luft durch $\eta'(\lambda, r)$ bzw.

$\eta'(\lambda, r)$ ersetzt wird:

$$\eta'(\lambda, r) = \frac{\eta}{1 + \frac{A\lambda}{r}} = \frac{\eta}{1 + \frac{B}{pr}} = \eta'(p, r) \quad (8)$$

Hierbei sind A und B Konstanten und p der Luftdruck.

Messungen an jeweils ein und demselben Öltröpfchen in Luft bei verschiedenen Drucken ergeben: $B = 8,2 \times 10^{-3} \text{ Pa m}$. Man erhält also mit Gl. (7) u. (8) für die korrigierte Ladung q_k :

$$q_k = q K(p, r) \quad (9)$$

mit:

$$K(p, r) = \left(1 + \frac{B}{pr} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (10)$$

Da K lediglich eine Korrekturgröße für q ist, genügt es für die Berechnung von K den Radius eines Öltröpfchens nach Gl. (6) mit der unkorrigierten Zähigkeit η zu bestimmen.

3. Aufgabenstellung

Bestimmen Sie die elektr. Elementarladung e aus dem Millikan-Experiment durch mehrfache Messung der Steig- und Sinkgeschwindigkeiten von mindestens 10 verschiedenen elektrisch negativ geladenen Öltröpfchen.

4. Versuchsaufbau

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 2. Die Millikan-Kammer K besteht aus zwei runden Metallplatten mit Abstand $d = 6 \text{ mm}$. Sie sind mit einer Plexiglasskappe abgedeckt auf einem Stativ montiert. Das seitlich angebrachte Mikroskop ist schwenkbar und mittels einer Rändelschraube auf einen mittleren Bereich der Kammer fokussierbar. Die Mikrometerteilung des Messokulars gestattet die Ausmessung vertikaler Wegstrecken bis ca. 5 mm . Von der ebenfalls seitlich angebrachten Zerstäubervorrichtung werden durch kurzes Drücken des Gummiballs kleinste Öltröpfchen in die Kammer eingebracht. Durch eine Lampe schräg von der Seite beleuchtet sind die Öltröpfchen als helle Punkte vor dunklem Hintergrund gut sichtbar. Das Bild der Tröpfchen wird mittels einer am Mikroskop

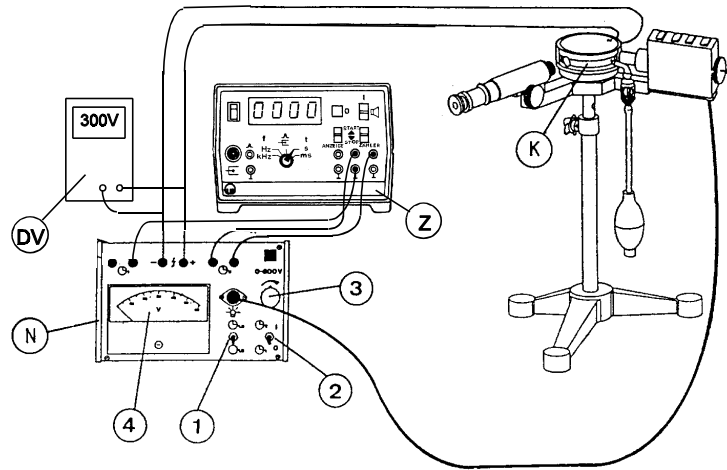


Abb.2: Versuchsaufbau

montierten Videokamera (o. Abb.) auf einem Monitor betrachtet.

Das Netzgerät N der Millikan-Kammer dient zur Stromversorgung der Beleuchtung und liefert eine variable Gleichspannung U für den Kondensator (positive Seite oben), die im Bereich $0 \dots 600 \text{ V}$ mit Knopf (3) kontinuierlich einstellbar ist und mit dem Spannungsmesser (4) bzw. einem zusätzlich angeschlossenen Digitalvoltmeter DV bestimmt wird. Ein Digitalzähler Z ist über Start- und Stopbuchsen, wie in Abb. 2 gezeigt, an das Netzgerät angeschlossen und dient zur Bestimmung der Sink- und Steigzeiten bzw. der Geschwindigkeiten v_1 u. v_2 . Mit Schalter (1) des Netzgerätes kann der Zähler gestartet oder gestoppt werden. Mit Schalter (2) wird die Kondensatorspannung ein- oder ausgeschaltet.

5. Versuchsdurchführung

Zu Beginn ist der Zähler und die Millikan-Kammer gemäß Abb. 2 mit dem Netzgerät zu verbinden, dessen Schalter 1 u. 2 auf Stop bzw. auszustellen und der Spannungsregler (3) auf 0 V (= linker Anschlag) zu drehen. Schalten Sie danach die Videokamera (am Kamerafuß) den Monitor, den Zähler, das Netzgerät (an der

Rückseite) und das Digitalvoltmeter ein. Der Monitor ist auf Videoeingang zu stellen, der Zähler ist auf Zeitmessung (s) und die Taste rechts neben der Anzeige zur Rückstellung der Sekundenanzeige zu drücken. Fokussieren Sie gegebenenfalls die Skala des Messokulars (mit Teilung $0 - 100$) durch Drehen des schwarzen Objektivrings der Kamera. Dazu ist die vordere Rändelschraube des Rings and der Mikroskopseite zu lösen. Die Kamera sollte im justierten Zustand eine gute Beobachtung des Okularbereichs zwischen den Teilstrichen 20 u. 80 ermöglichen.

Richten Sie den Ölzerstäuber nach Entfernen des Gummiverschlusses so aus, dass seine Öffnung den beiden Löchern in der Plexiglaskappe der Kammer gegenübersteht. Drücken Sie ein bis dreimal kurz und kräftig den Gummiball des Zerstäubers und beobachten Sie auf dem Monitor das Kammervolumen. Richten Sie ggf. Mikroskop und Kamera durch Schwenken auf ein Öltröpfchen, so dass dieses im Bereich der Okularskala sichtbar ist, und fokussieren Sie eventuell neu. Da das Mikroskop und die Kamera zusammen ein aufrechtes Bild erzeugen, fallen bei ausgeschalteter Spannung alle Tröpfchen auf dem Monitor. Durch Einschalten von Schalter 2 und Variieren der Spannung kann die Bewegung eines Tröpfchens umgekehrt werden, falls es seiner Größe entsprechend genügend negativ geladen ist.

Benutzen Sie zur Messung der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 wenn möglich eine für alle Tröpfchen gleiche (feste) Weglänge Δs auf der Okularskala (etwa von Teilstrich 20 bis 80), so dass der Beobachtungsbereich hinreichend ausgenutzt wird und die Start- bzw. Stoppositionen gut sichtbar sind. Wählen Sie Tröpfchen mit geringen Geschwindigkeiten aus (bis etwa 1 Skalenteil/s auf der Skala, s. Hinweis im Teil Versuchsdurchführung)! Stellen Sie die Spannung jeweils so ein, dass das Tröpfchen etwa gleich schnell steigt wie fällt. Durch Ein- und Ausschalten des Schalters 2 kann ein Tröpfchen vor seine Startposition gebracht werden, und beim Durchlaufen der Start- bzw. Zielmarke die Zeitnahme mit Schalter 1 gestartet bzw. gestoppt werden. Nach Durchlaufen der Zielmarke ist der Zähler sofort abzulesen und zurückzusetzen, so dass der Rücklauf eines Tröpfchens unmittelbar danach aufgenommen werden kann. Machen Sie vor den eigentlichen Messungen einige Probemessungen, um sich an den Ablauf des Messvorgangs zu gewöhnen.

Es sind Zeitmessungen an mindestens 10 verschiedenen Öltröpfchen durchzuführen, wobei die Fallzeiten t_1 (d.h. ohne Spannung) und Steigzeiten t_2 (d.h. mit Spannung U) an einem Tröpfchen jeweils zweimal zu bestimmen sind. Tragen Sie die Wegstrecke, Messzeit und Spannung jeweils in eine Tabelle ein.

Schalten Sie die Geräte nach den Messungen aus und verschließen Sie den Ölzerstäuber.

6. Versuchsauswertung

Zur Bestimmung der Elementarladung e aus den Messergebnissen sind die Mittelwerte der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bzw. bei fester Weglänge Δs die Mittelwerte der reziproken Zeiten t_1 und t_2 für jedes Tröpfchen zu bestimmen. Für die Berechnung des Weges Δs benutze man

die Mikrometereichung: $\Delta s = (5,06 \pm 0,01) 10^{-5} \text{ m/Skalenteil}$

Berechnen Sie Radius r , Ladung q , Korrekturfaktor K und korrigierte Ladung q_k für jedes Tröpfchen gem. Gl. (6), (7), (9) und (10). Benutzen Sie hierfür folgende Konstanten:

Zähigkeit der Luft:	η	$= (1,82 \pm 0,01) \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
korrigierte Dichte des Öls:	ρ	$= (884 \pm 10) \text{ kg/m}^3$
Abstand der Kondensatorplatten	d	$= (5,97 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ m}$
Konstante für Korrektur	B/p	$= (7,9 \pm 0,3) \times 10^{-8} \text{ m}$

Tragen Sie die Ladungen q_k für alle Tröpfchen auf einer gemeinsamen Skala auf. Ermitteln Sie aus den Abständen der Marken die jeweilige Zahl n der Elementarladungen eines Tröpfchens und aus dem Mittelwert für q_k/n für alle Tröpfchen den Wert der Elementarladung und die Standardabweichung (entsprechend dieser zweiten Mittelung). Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem hier angegebenen Wert für e .

Berechnen Sie den relativen Maximalfehler für e allein aus den oben angegebenen Maximalfehlern für die Konstanten und einer Unsicherheit bei der Spannungsbestimmung von max. 1 %. Welcher Einzelfehler hat auf das Messergebnis den stärksten Einfluss? Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Ein Nachweis der Quantelung der elektr. Ladung bzw. die Bestimmung der Elementarladung ist in diesem Versuch nur möglich, wenn der mittlere Fehler Δq bei der Bestimmung der einzelnen Tröpfchenladungen q deutlich kleiner ist als $e/2$. Erfahrungsgemäß ist dies nur für Ladungen $q < 10 e$ zu erreichen. Für diese sind die Steiggeschwindigkeiten der Tröpfchen $v_2 < 2 \text{ Skt./s}$ bei $U=200\text{V}$ und $v_1 \approx v_2$.

7. Fragen zur Selbstkontrolle

1) Wie muss die Geometrie eines Plattenkondensators beschaffen sein, damit

das elektr. Feld in seinem Inneren *homogen* ist?

- 2) Lässt sich das Millikan-Experiment auch bei vermindertem Luftdruck oder im Vakuum durchführen? Wenn ja, welche Kraft verändert sich dabei, und warum?
- 3) Was ist die *Zähigkeit* eines Gases und von welchen physikalischen Größen ist sie abhängig?
- 4) Welchen Vorteil bietet die Anwendung *ionisierender Strahlung* bei der Bestimmung der Elementarladung im Millikan-Experiment?
- 5) Bei welchen physikalischen Vorgang treten ebenfalls bestimmte elektr. Ladungsmengen auf, die auf die Existenz einer *Elementarladung* hindeuten?
- 6) Wie kann man auf indirekte Weise die Elementarladung heute noch genauer messen als im Millikan-Experiment?

Versuch C1: Elektrischer Widerstand von Metallen und Halbleitern

1. Literatur: Bergmann-Schaefer, Experimentalphysik, Bd. II
Walcher, Praktikum der Physik
Westphal, Physikalisches Praktikum
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik
Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2
Kittel, Einführung in die Festkörperphysik

Stichworte: Elektr. Feld, elektr. Stromdichte, Driftgeschwindigkeit, Ohmsches Gesetz, Ladungsträgerkonzentration, Beweglichkeit, elektrische Leitfähigkeit bzw. spezifischer elektrischer Widerstand von Metall u. Halbleiter, Wheatstonesche Messbrücke

2. Grundlagen

2.1 Leitungsmechanismus und Ohmsches Gesetz

Wirkt längs eines Leiters ein elektrisches Feld, so wandern seine beweglichen Ladungsträger. Es stellt sich für diese ein Gleichgewicht zwischen der beschleunigenden Kraft des Feldes und der auf sie wirkenden *Reibungskräfte* ein, so dass ein stationärer, d.h. zeitlich konstanter elektr. Strom I durch den Leiter fließt:

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

Hierbei ist \mathbf{j} ist die Stromdichte, A der Querschnitt des Leiters und Q die durch A transportierte Ladungsmenge.

Besteht der Leiter aus einem isotropen Stoff, sind Stromdichte \mathbf{j} und Feldstärke \underline{E} gleichgerichtet (s. Abb.1). Sind Elektronen (Ladung $-e$) mit der Konzentration n die beweglichen Ladungsträger, ist die Stromdichte:

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_D \quad (2)$$

und die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen parallel zur Feldrichtung:

$$\mathbf{v}_D = -\mu \underline{E} \quad (3)$$

\mathbf{v}_D nennt man *Driftgeschwindigkeit*, μ die *Beweglichkeit* der Ladungsträger.

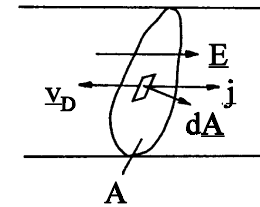


Abb.1:

Elektrischer Stromtransport durch Elektronen in Leitern:

\underline{E} elektr. Feldstärke,
 \mathbf{j} elektr. Stromdichte,
 \mathbf{v}_D Driftgeschwindigkeit,

Für viele elektrische Leiter, insbesondere die Metalle, ist die Stromdichte \mathbf{j} proportional zur elektrischen Feldstärke \underline{E} , d.h. es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\mathbf{j} = \sigma \underline{E}, \quad \sigma = ne\mu = \frac{1}{\rho} \quad (4)$$

σ ist die *elektrische Leitfähigkeit*, ρ der *spezifische elektrische Widerstand* des Leitermaterials. Diese materialspezifischen Größen sind, wie Gl. (4) besagt, von der Konzentration und Beweglichkeit der Ladungsträger abhängig.

Bei geeigneter Geometrie eines homogenen Leiters sind Stromdichte und Feldstärke in seinem Inneren räumlich konstant. Ist l die Länge und A der Querschnitt des Leiters, folgt mit $U = E l$ und $I = j A$ aus Gl. (4) das Ohmsche Gesetz in der bekannten Form:

$$I = GU = \frac{U}{R} \quad (5)$$

Hier ist $G = A\sigma/l$ der *elektrische Leitwert* (Einh.: Siemens, $1 \text{ S} = 1 \text{ } \Omega^{-1}$), $R = \rho l/A$ der *elektrische Widerstand* (Einh.: Ohm, $1 \text{ } \Omega = 1 \text{ V/A}$). Aus der Kenntnis der Probengeometrie und einer Strom- u. Spannungsmessung können σ bzw. ρ bestimmt werden.

Metalle sind gute elektrische Leiter. Halbleiter stehen - wie ihr Name besagt - bezüglich ihrer elektrischen Leitfähigkeit zwischen den Metallen und den Isolatoren.

2.2 Elektrische Leitfähigkeit der Metalle

Im metallischen Festkörper sind die zur Bindung beitragenden äußeren Atom-elektronen, die *Valenzelektronen*, nicht an die (ortsfesten) Ionen des Kristalls gebunden. Sie können sich quasi frei im Metall bewegen und verhalten sich bezüglich einiger physikalischer Eigenschaften, insbesondere der einfachen Metalle, wie ein Gas. (Modell des freien Elektronengases). Diese beweglichen Elektronen eines Metalls tragen den elektrischen Strom und werden deshalb *Leitungselektronen* genannt.

Die Konzentration der Leitungselektronen eines Metalls ist unabhängig von der Temperatur und groß im Vergleich zur Konzentration der beweglichen Ladungsträger in Halbleitern. Für Metalle ist $n = 10^{22}$ bis 10^{23} cm^{-3} (1 - 2 Elektronen/Atom), für Halbleiter bei Raumtemperatur nur $n = 10^{10}$ bis 10^{17} cm^{-3} . Dies ist vor allem der Grund, weshalb Metalle gute elektrische Leiter sind, Halbleiter dagegen weniger gute. So hat z.B. Kupfer bei Raumtemperatur die elektr. Leitfähigkeit $\sigma = 5,9 \times 10^5 \text{ (Ohm cm)}^{-1}$ bzw. den spez. elektr. Widerstand $\rho = 1,7 \times 10^{-6} \text{ Ohm cm}$. Bei einem Halbleiter ist σ bei Raumtemperatur um mehrere Zehnerpotenzen kleiner.

Die Beweglichkeit μ der Leitungselektronen eines Metalls wird von den eingangs erwähnten „Reibungskräften“ bestimmt, die durch die Streuung der Leitungselektronen im wesentlichen an zwei Arten von Störungen des Kristalls verursacht werden:

1. Streuung an statischen Defekten des Kristallgitters, wie z.B. Fremdatomen, Versetzungen und Korngrenzen (Störungen der Gitterperiodizität). Diese Streuung bewirkt einen temperaturunabhängigen Beitrag ρ_0 zum spez. elektr. Widerstand;
2. Streuung an dynamischen Störungen des Gitters aufgrund der Temperaturbewegung der Kristallionen (Gitterschwingungen mit sog. *Phononen* als Energiequanten). Diese Streuung bewirkt einen temperaturabhängigen Beitrag ρ_T zum spez. elektr. Widerstand.

Der spez. elektr. Widerstand ρ eines Metalls lässt sich darstellen als die Summe beider Beiträge (Matthiessensche Regel):

$$\rho = \rho_0 + \rho_T \quad (6)$$

Bei tiefen Temperaturen ($T < 10 \text{ K}$) ist die (mittlere) thermische Energie $k_B T$ ($k_B = \text{Boltzmann Konstante}$) pro Schwingung sehr gering, so dass ρ_0 dominiert. In diesem Temperaturbereich zeigt ein Metall den vom Grad seiner Reinheit und vom Kristallgefüge abhängigen, jedoch temperaturunabhängigen *spez. Restwiderstand* ρ_0 (s. Abb. 2b).

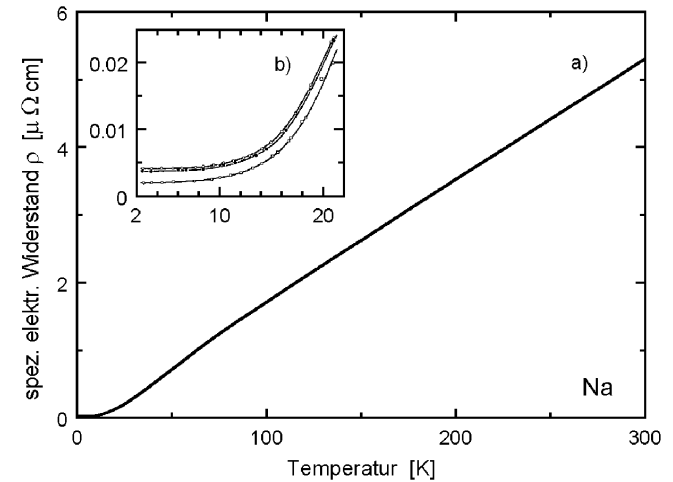


Abb.2: Spez. elektr. Widerstand $\rho(T)$ von Natrium, a) im Temperaturbereich 0 - 300 K, b) bei tiefen Temperaturen $T \leq 20 \text{ K}$ an drei verschiedenen Proben gemessen

Bei steigender Temperatur nimmt der Anteil ρ_T mit der Anzahl der thermisch angeregten Phononen zu. Bei genügend hohen Temperaturen (z.B. Raumtemperatur) dominiert ρ_T und nimmt nahezu linear mit T zu (s. Abb.2a), so dass:

$$\rho(T) = \rho_1 + a(T - T_1) \quad (7)$$

bzw.

$$\rho(T) = \rho_1 [1 + \alpha(T - T_1)] \quad (8)$$

wobei ρ_1 den spez. elektr. Widerstand bei einer Bezugstemperatur T_1 (z.B. $0 \text{ }^\circ\text{C}$) darstellt und die Größe

$$\alpha = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho}{dT} = \frac{1}{R_1} \frac{dR}{dT} \quad (9)$$

der Temperaturkoeffizient (TK oder TC) des elektr. Widerstandes ist. Reine Metalle haben einen positiven Temperaturkoeffizienten des elektr. Widerstandes von etwa der Größe $\alpha = 3 \dots 6 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, bezogen auf $R(0^\circ\text{C})$.

Bestimmte metallische Legierungen, insbesondere solche mit hohem Restwiderstand, haben dagegen über einen weiten Temperaturbereich einen viel kleineren positiven oder sogar negativen Temperaturkoeffizienten α , so z.B. *Manganin* (84% Cu, 4% Ni, 12% Mn). Man benutzt solche Legierungen wegen der geringen Temperaturabhängigkeit ihres elektr. Widerstandes zum Bau von Präzisionswiderständen.

2.3 Elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern

Man unterscheidet - nach Art der beweglichen Ladungsträger - ionische von elektronischen Halbleitern. Hier seien nur letztere betrachtet, bei denen sowohl Elektronen als auch Defektelektronen (sog. *Löcher* mit Ladung $+e$) zum Stromtransport beitragen können. Eine anschauliche Darstellung des Leitungsmechanismus elektronischer Halbleiter ist in der Anleitung zum Versuch C11 (*Kennlinien von HL-Diode und Transistor*) zu finden. Im folgenden ist hier nur Wesentliches zur Leitfähigkeit zusammengefasst und ergänzt:

Die elektr. Leitfähigkeit von Halbleitern ist durch die Summe der Beiträge von Elektronen und Löchern gegeben:

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h \quad (10)$$

n und p sind die Ladungsträgerkonzentrationen der zum Strom beitragenden Elektronen und Löcher, μ_e und μ_h sind ihre Beweglichkeiten.

Man unterscheidet bei Halbleitern die *Eigenleitung* von der *Störstellenleitung*. In reinen Halbleitern (ohne Fremddotierungen) liegt für nicht allzu tiefe Temperaturen Eigenleitung vor. Die Konzentration $n_i = (np)^{1/2}$ der beweglichen Ladungsträger ist hierbei viel geringer als die der Metalle. Für reines Silizium ist z.B. bei Raumtemperatur n_i ca. $2 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ (Vergl. hierzu n_{Cu} !). Die Konzentration n_i - und praktisch in gleichem Maße die Leitfähigkeit σ - ist darüber hinaus stark temperaturabhängig, im wesentlichen ist

$$\sigma_i \sim n_i \sim \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right) \quad (11)$$

Die Größe ΔW (ca. 1 eV) ist die für einen reinen Halbleiter charakteristische Anregungsenergie der Ladungsträger, die diese benötigen, um zum Stromtransport beizutragen.

In Halbleitern mit Dotierung bestimmter Fremdatome überwiegt (bei nicht zu hoher Temperatur) die Störstellenleitung. Sie wird durch die Elektronen oder Löcher der leicht ionisierbaren Fremdatome verursacht.

Zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration n bzw. p eines dotierten Halbleiters unterscheidet man drei Temperaturbereiche (s.Abb.3a):

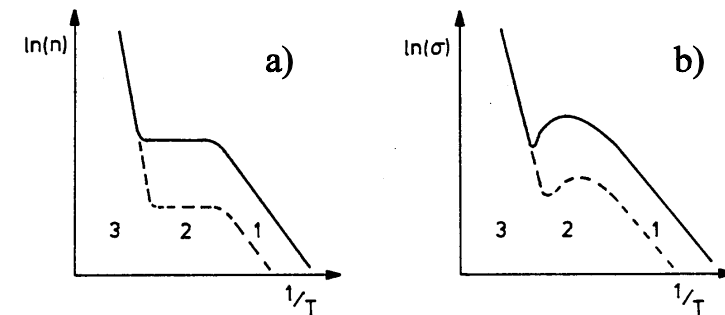


Abb.3: Temperaturabhängigkeit (schematisch) für a) Ladungsträgerkonzentration, b) elektrische Leitfähigkeit eines n-Halbleiters mit (—) hoher und (---) niedriger Dotierung; 1) Störstellenreserve, 2) Störstellenerschöpfung, 3) Eigenleitung

1. *Störstellenreserve* (bei tiefen Temperaturen): Mit steigender Temperatur werden die Fremdatome ionisiert, die Ladungsträgerkonzentration nimmt im wesentlichen exponentiell zu;
2. *Störstellenerschöpfung* (bei mittleren Temperaturen): Alle Fremdatome sind ionisiert, die Ladungsträgerkonzentration ist temperaturunabhängig;
3. *Eigenleitung* (bei hohen Temperaturen): Die Ladungsträgerkonzentration der Eigenleitung überwiegt und nimmt mit steigender Temperatur exponentiell zu.

Die Beweglichkeiten μ_e der Elektronen und μ_h der Löcher sind unterschiedlich und ebenfalls temperaturabhängig. Sie nehmen - ähnlich wie bei den Metallen - mit steigender Temperatur aufgrund der Streuung an den Gitterschwingungen ab. In den Bereichen 1) und 3) wird die Leitfähigkeit σ jedoch von der stark temperaturabhängigen Ladungsträgerkonzentration n oder p dominiert, so dass dort σ etwa die gleiche Temperaturabhängigkeit wie n bzw. p hat (s. Gl.(11)). Man beobachtet für Halbleiter einen Verlauf $\sigma(T)$, wie er in Abb. 3b für verschieden starke Dotierungen schematisch dargestellt ist.

Bei hohen Temperaturen oder entsprechend geringer Dotierung (Bereich 3) nimmt die Leitfähigkeit des Halbleiters mit T stark zu (der spez. Widerstand entsprechend ab). Der elektr. Widerstand hat dort einen (stark temperaturabhängigen) negativen Temperaturkoeffizienten. Ein elektronisches Bauelement aus einem solchen Material nennt man entsprechend *NTC-Widerstand*. Bei mittleren Temperaturen oder entsprechend großer Dotierung (Bereich 2) ist es umgekehrt: Die Ladungsträgerkonzentration ist unabhängig von T und die Abnahme von μ mit steigender Temperatur bewirkt einen positiven TK des Widerstands (*PTC-Widerstand*).

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Mit einer Wheatstoneschen Messbrücke ist der elektrische Widerstand $R(T)$ eines Kupferdrahtes im Temperaturbereich zwischen Raumtemperatur und 75°C zu bestimmen.
- 2. Aufgabe:** Mit der gleichen Messmethode ist der elektr. Widerstand $R(T)$ eines Halbleiters (NTC-Widerstand) im gleichen Temperaturintervall zu bestimmen.
- 3. Aufgabe:** Aus den Messergebnissen ist mit Gl. (9) der Temperaturkoeffizient α des elektrischen Widerstands des Kupferdrahtes und mit Gl. (11) die Anregungsenergie ΔW des Halbleiters zu bestimmen.

4. Versuchsanordnung

Das Bauteil mit dem zu bestimmenden Widerstand R befindet sich in einem Wasserbehälter, dessen Temperatur mit einem elektrischen Heizer variiert und mit einem Thermometer bestimmt wird. Ein motorgetriebener Magnet bewegt einen im Wasser liegenden Rührstab, um für eine möglichst homogene Temperatur des Wassers zu sorgen.

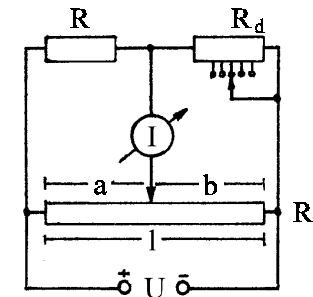


Abb.4:

Schaltbild der Wheatstoneschen Messbrücke

Abb.4 zeigt die Schaltung der Wheatstoneschen Messbrücke. Der unbekannte zu bestimmende Widerstand R ist mit einem bekannten, im vorliegenden Versuch dekadisch einstellbaren Widerstand R_d in Reihe geschaltet. Ein Potentiometer R_v , dessen Abgriff kontinuierlich über seiner gesamten Länge l verschiebbar ist, liegt parallel zu R und R_d . Zwischen dem Abgriff des Potentiometers und der Verbindung von R und R_d liegt ein Strommesser I als Nullinstrument. Liegt zwischen den Enden von R_v sowie R und R_d die Spannung U (im vorliegenden Versuch eine Gleichspannung von etwa 2 V), so fließt ein Strom, der sich in beide Äste der Brücke verzweigt. Durch Verändern von R_d und Verschieben des Abgriffs von R_v kann erreicht werden, dass der Strommesser I Stromlosigkeit anzeigt (Abgleich der Brücke). Dies bedeutet, dass die Potentialdifferenz (= Spannung) zwischen dem Abgriff von R_v und der Verbindung von R und R_d verschwindet, d.h. die über R und der Länge $a = l - b$ des Potentiometers abfallenden Spannungen U_R bzw. U_a gleich sein müssen. Diese sind wiederum jeweils nur durch die einzelnen Teilströme in den beiden Ästen der Brücke bestimmt und verhalten sich zur Gesamtspannung U wie die Widerstände zu den entsprechenden Gesamt Widerständen der Brückenäste. Es folgt mit:

$$U_R = \frac{R}{R + R_d} U = U_a = \frac{a}{a + b} U \quad (12)$$

$$R = \frac{a}{b} R_d \quad (13)$$

Der Abgleich der Brücke ist mit dem Dekadenwiderstand grob und mit dem Potentiometer fein durchzuführen. Das Potentiometer hat wie ein Rechenstab eine Skala, welche das eingestellte Verhältnis a/b direkt angibt und damit die

Bestimmung von R recht einfach macht. Die größte Empfindlichkeit des Abgleichs erreicht man wenn a/b etwa gleich 1 ist.

5. Versuchsdurchführung und Auswertung

5.1 Kupferdraht

Man montiere den Probenhalter mit der Spule aus Kupferdraht so am Stativ, dass die Spule ganz in das Wasser taucht und möglichst nah am Thermometer hängt. Achten Sie darauf, dass sich der Rührstab am Boden des Gefäßes frei bewegen kann. Stellen Sie danach die Schaltung gem. Abb. 4 her und bestimmen Sie zunächst den Widerstand des Drahtes bei Raumtemperatur bzw. der tiefsten Temperatur des Wassers.

Beim Abgleich der Brücke verfähre man folgendermaßen: Stellen Sie bei noch abgeschalteter Spannungsquelle das Potentiometer etwa auf Mittelstellung. Nach Einschalten von U ist durch Variieren von R_d der Strom I minimal zu machen und nachfolgend der Feinabgleich mit dem Potentiometer vorzunehmen.

Bestimmen Sie den Widerstand des Drahtes bei Temperaturen in Intervallen von jeweils ca. 5 °C bis hinauf zu 75 °C. Stellen Sie für diese Messungen den Heizer jeweils so ein, dass die Heizungsanzeige gerade aufleuchtet bzw. das Wasserbad sich langsam auf die gewünschte Temperatur erwärmt. Stellen Sie den Heizer nach der letzten Messung wieder ab.

Tragen Sie die Messergebnisse in geeignetem Maßstab auf Millimeterpapier auf und bestimmen Sie durch eine Ausgleichsgerade grafisch den Temperaturkoeffizienten α des elektr. Widerstandes bezogen auf den Widerstand bei 0 °C.

Durch entsprechende Geraden mit maximaler und minimaler Steigung ist der Fehler von α abzuschätzen. Berücksichtigen Sie hierbei unsystematische Messfehler $\Delta T = \pm 0,2$ °C und $\Delta R/R = \pm 0,2$ %. Diskutieren Sie das Messergebnis sowie mögliche systematische Fehlerquellen!

5.2 NTC-Widerstand

Führen Sie die Messungen für den Halbleiter wie für den Kupferdraht beschrieben durch. Bei der Messung kann es zweckmäßig sein, den Grobvergleich der Messbrücke schon vor Erreichen der Messtemperatur vorzunehmen.

Tragen Sie die Messergebnisse für R auf Millimeterpapier halblogarithmisch über der reziproken (absoluten) Temperatur 1/T auf, also

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = f\left(\frac{1}{T}\right)$$

R_0 ist hierbei ein beliebiger Bezugswiderstand (z.B. 1 Ohm). Bestimmen Sie aus einer Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte mit Gl. (11) die Anregungsenergie ΔW (in eV). Verfahren Sie zur Fehlerbestimmung wie bei dem Kupferdraht und diskutieren Sie das Ergebnis.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie ist die *elektrische Leitfähigkeit*, wie der *spezifische elektrische Widerstand* eines Leiters definiert?
- 2) Was versteht man unter *Driftgeschwindigkeit*, was unter *Beweglichkeit* von Leitungselektronen?
- 3) Was besagt das *Ohmsche Gesetz*?
- 4) Wie ändert sich der elektrische Widerstand eines Metalls mit der Temperatur und welcher *Streumechanismus* führt zur Temperaturabhängigkeit von R?
- 5) Wie ist der *Temperaturkoeffizient* α des elektrischen Widerstandes von metallischen Leitern definiert?
- 6) Welche Arten der elektr. Leitung unterscheidet man bei Halbleitern?
- 7) Welche Größe bedingt die starke Temperaturabhängigkeit der elektr. Leitfähigkeit reiner Halbleiter?
- 8) Wie ändert sich die elektr. Leitfähigkeit reiner Halbleiter bei hohen Temperaturen?
- 9) Was versteht man unter *NTC-* und *PTC-Widerstand*, und wie kann die unterschiedliche Temperaturabhängigkeit von σ bei Halbleitern erklärt werden?
- 10) Erklären Sie das Funktionsprinzip einer *Wheatstone-Brücke*!

Versuch C 6: Magnetische Hysterese

1. Literatur: Bergmann-Schäfer, Experimentalphysik, Bd. II
 Illberg, Physikalisches Praktikum f. Anfänger
 Westphal, Physikalisches Praktikum
 Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2

Stichworte: Magn. Feldstärke, magn. Induktion, magn. Moment, Magnetisierung, Permeabilität, entmagnetisierendes Feld, Weißsche Bezirke, Hysterese, Spulen, Halleffekt, Hallsonde

2. Grundlagen

2.1 Gleichung für magnetisierbare Körper

Mit der magnetischen Feldstärke H in einer magnetisierbaren Probe ist immer eine zweite magnetische Größe verbunden, die magn. Flussdichte oder Induktion B . Für magnetisch isotrope und homogen magnetisierte Körper gilt:

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0\mu H \quad (1)$$

Hierbei ist μ_0 die Induktionskonstante, M die Magnetisierung und μ die (dimensionslose) *magnetische Permeabilität* der Probe. Die magn. Induktion setzt sich also einem Anteil des Vakuums $\mu_0 H$ und einem der Materie $\mu_0 M$, der sogenannten *magnetischen Polarisation*, zusammen. Für dia- und paramagnetische Körper ist μ nahezu 1, für ferro- und ferrimagnetische Stoffe kann μ sehr große Werte annehmen und hängt zudem vom Magnetisierungszustand des Körpers ab.

2.2 Magnetische Hysterese

Misst man die magnetische Induktion B oder die Magnetisierung M eines Ferromagneten in Abhängigkeit von der steigenden und fallenden magnetischen Feldstärke H , erhält man eine sogenannte Hysteresekurve (s. Abb.1). Die nach einseitiger Sättigung $M = M_s$ und Ausschalten des äußeren Magnetfeldes zurückbleibende Magnetisierung nennt man *Remanenz* M_r . Sie erklärt den Begriff Hysterese. *Hysterese* bedeutet Nachwirkung. Um die Remanenz aufzuheben, benötigt man ein magnetisches Gegenfeld, das *Koerzitivfeld* H_c .

Die von einer Hysteresekurve eingeschlossene Fläche stellt den Energieverlust für einen Ummagnetisierungszyklus dar. Dieser Verlust tritt in Form von Magnetisierungswärme auf. Die Magnetisierungskurve eines vorher abmagnetisierten

Ferromagneten ($B = 0, M = 0$) nennt man *Neukurve* oder Jungfräuliche Kurve.

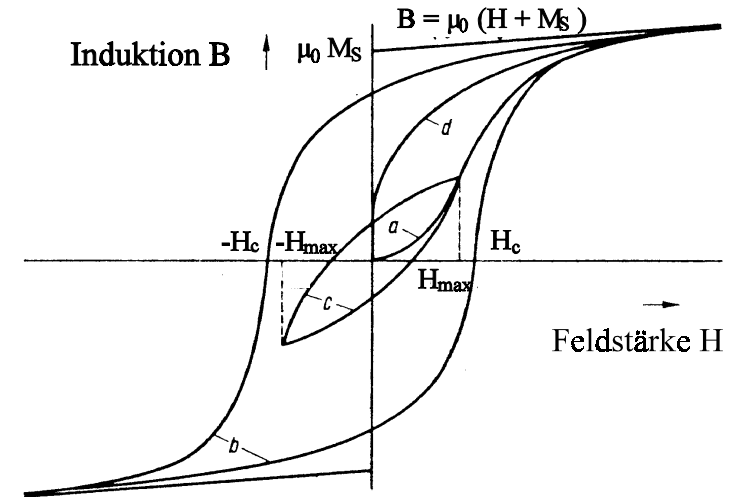


Abb.1: Induktions-Feldstärkekurven: a) Neukurve, b) Sättigungs-Hysterese-schleife, c) innere Hystereseschleife, d) ideale Induktionskurve

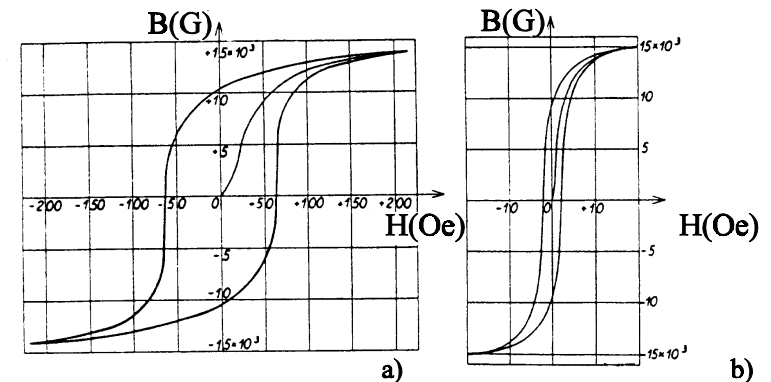


Abb.2: Hysteresekurve für a) Werkzeugstahl, b) weiches Schmiedeeisen

Die Form der Hysteresekurve eines Ferromagneten ist vor allem von seiner Zusammensetzung aber auch von seiner thermischen und mechanischen Vorbehandlung abhängig (siehe Abb.2 u.3).

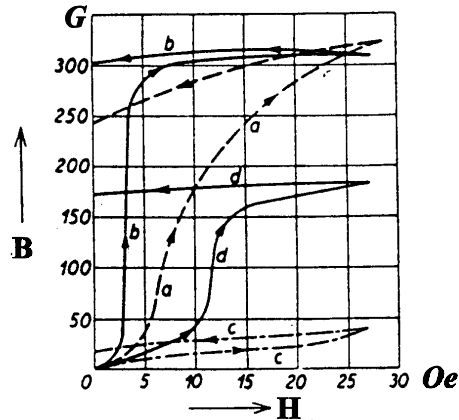


Abb.3:

Hysteresekurven von weichem Nickeldraht:

- a) in mechanisch unbeanspruchtem Zustand
- b) bei Torsion
- c) bei Dehnung
- d) bei gleichzeitiger Torsion und Dehnung

Einheiten: Induktion B: 1 T (Tesla) = 1Vs/m² = 10⁴ G (Gauß)
 Feldstärke H: 1 A/m = 4π/10³ Oe ≈ 1/80 Oe (Oersted)

Jeder Ferromagnet setzt sich aus vielen Elementarmagneten zusammen, deren magnetische Momente in *Domänen*, den sogenannten *Weißschen Bezirken*, jeweils in die gleiche Richtung zeigen. Von Bezirk zu Bezirk wechselt die Richtung der magnetischen Momente. In einem abmagnetisierten Ferromagneten heben sich die Weißschen Bezirke in ihrer Feldwirkung nach außen auf. Bei wachsendem äußeren Feld verschieben sich zunächst die Wände der Weißschen Bezirke zugunsten der Bezirke, deren magnetische Momente in ihrer Richtung dem äußeren Feld am nächsten kommen. Die hierfür benötigte Energie ist relativ gering. Die Magnetisierungskurve steigt zunächst steil an. Wird das äußere Feld weiter verstärkt, drehen sich die Weißschen Bezirke in die Richtung des äußeren Feldes. Hierfür ist ein größerer Energieaufwand als für die Wandverschiebung erforderlich. Der Übergang von der Wandverschiebung zur Drehung erfolgt kontinuierlich, wobei die Magnetisierungskurve allmählich abflacht. Sind die Drehungen abgeschlossen, erreicht man den Bereich der Sättigung. Die Magnetisierung steigt nur noch wenig mit wachsender Feldstärke und nähert sich asymptotisch der Sättigungsmagnetisierung M_s . Die Magnetisierung ist also der Feldstärke nicht proportional sondern hängt vom Magnetisierungszustand ab.

3. Messmethode zur Bestimmung der Neu- und Hysteresekurve

3.1 Abmagnetisierung

Eine Methode zur Abmagnetisierung eines Ferromagneten vor der Aufnahme einer Neukurve ist die Wechselfeldmethode. Dabei setzt man die Probe einem magnetischen Wechselfeld aus, dessen Amplitude H_0 langsam im Vergleich zur Periodendauer vom Maximalwert auf den Wert 0 verringert wird. Das magnetische Verhalten des Ferromagneten hierbei zeigt schematisch Abb. 4b, die im Versuch verwendete Schaltungsanordnung Abb. 5.

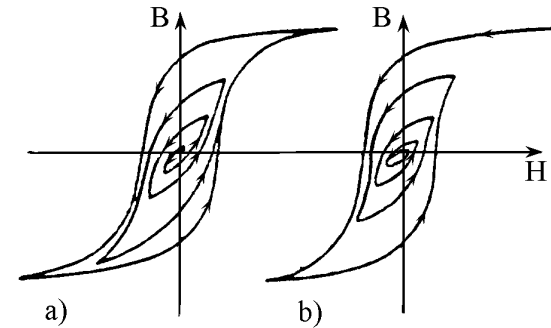
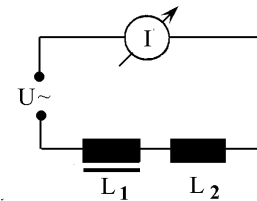


Abb.4: Aufeinanderfolgende Magnetisierungszyklen bei a) zunehmender, b) abnehmender Feldstärke

Abb.5:

Schaltung zum Abmagnetisieren der Magnetkerne:



- L_1 : Spule 600W / 2A max mit kleinem Kern
- L_2 : Spule 600W / 2A max Abmagnetisierungsspule
- I: Amperemeter
- U: variable Wechselspannungsquelle

3.2 Neu- und Hysteresekurve

Die im Versuch verwendete Anordnung zur Bestimmung einer Magnetisierungskurve eines Ferromagneten zeigt Abb.6. Ein Transformator-U-Kern mit aufgeklebtem I- oder zweiten U-Kern bildet mit zwei Feldspulen der Windungszahl n (bzw. einer mit Windungszahl $2n$) einen Elektromagneten, der mit Gleichstrom aus einer regelbaren Stromquelle Q erregt wird. Zwischen den Kernen besteht ein schmaler Luftspalt, in dem die magn. Induktion B mit einer Hallsonde gemessen werden kann. Die Sonde liefert bei konstantem Messstrom eine der Induktion B proportionale Hallspannung U_H , die mit einem mV-Meter gemessen und auf der Y-Achse eines XY-Schreibers aufgetragen wird. Auf dessen X-Achse wird die dem Erregerstrom I der Feldspulen proportionale Spannung $U = I R$ ($R = 10m\Omega$) aufgetragen. Die Messanordnung gestattet die Aufnahme von

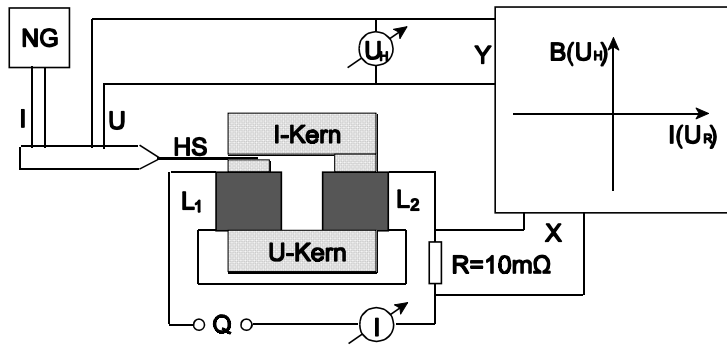


Abb.6: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Neukurve und Hysterese-schleife $B(I)$ eines Magnetkerns. Q : Gleichstromquelle $-2A...2A$, HS / NG : Hallsonde / Netzgerät, $L_{1,2}$ bzw. L_3 : Erregerspulen ($n = 2 \times 600W/2A$ max. bzw. $1200W/1A$ max.)

Neu- bzw. Hysteresekurven $B(I)$ für verschiedene Kernmaterialien.

Man kann den U- und I-Kern (bzw. doppelten U-Kern) näherungsweise als Toroid mit Luftspalt auffassen. Für einen solchen magnetisch nahezu geschlossenen Kreis verlaufen die Feldlinien nur im Inneren des Kerns und im Luftspalt. Magnetische Streufelder, die dem magnetisierenden Feld außer dem des Luftspaltes entgegenwirken (Entmagnetisierungsfelder) können (zunächst) vernachlässigt werden. Für einen solchen geschlossenen magnetischen Kreis gilt:

$$\oint H ds = H_i l + H_a d = n I \quad (2)$$

Hierbei ist $\oint H ds$ das Wegintegral der magnetischen Feldstärke H längs eines geschlossenen Weges im magnetischen Kreis. H_i und H_a sind die Feldstärken im Kern mit Polschuhen bzw. im Luftspalt, l ist die gemittelte Länge der Feldlinien H_i und d die Dicke des Luftspaltes. n ist die Gesamtzahl der Spulenwindungen und I die Stärke des Erregerstroms. Aus der Bedingung, dass die Normalkomponente der magn. Induktion B_n an den Grenzflächen von Polschuhen und Spalt stetig verläuft, folgt mit der Annahme einer homogenen Induktion $B = B_n$ aus Gl. (1):

$$B = B_a = \mu_0 H_a = B_i = \mu_0 \mu H_i \quad (3)$$

und mit Gl. (2) für das innere Feld H_i :

$$H_i = \frac{n I}{l} - \frac{B d}{l \mu_0} \quad (4)$$

sowie für die Permeabilität μ :

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H_i} = \frac{B l}{\mu_0 n I - B d} \quad (5)$$

Man erkennt aus Gl. (4), dass das innere Feld infolge des Spalts um den Betrag $Bd/l\mu_0$ kleiner ist als das eines geschlossenen Toroiden. Der Spalt wirkt also entmagnetisierend auf den Kern. Berücksichtigt man zusätzlich mögliche Streufeldverluste, muss zur Bestimmung des wahren inneren Feldes im Kern ein weiteres entmagnetisierendes Feld $H_e = N M$ von H_i in Gl. (4) abgezogen werden. M ist hierbei die Magnetisierung des Kerns und N ein von der Gestalt des Magneten abhängiger *Entmagnetisierungsfaktor*. Da für ferromagnetische Stoffe näherungsweise $B = \mu_0 M$ gilt, ergibt sich für H_i :

$$H_i = \frac{n I}{l} - \frac{B d}{l \mu_0} - \frac{B N}{\mu_0} \quad (6)$$

bzw für die Induktion B :

$$B = \mu \mu_0 H_i = \frac{\mu \mu_0 n}{l} \left(I - B \left(\frac{d}{\mu_0 n} + \frac{Nl}{\mu_0 n} \right) \right) \quad (7)$$

Man erhält die wahre Induktionskurve $B(H_i)$ aus der Kurve $B(I)$, indem man jeden Abzissenwert I um den Bruchteil $\{d/\mu_0 n + Nl/\mu_0 n\}$ des entsprechenden Ordinatenwertes B verringert. Ein solches Verfahren nennt man *Zurückscheren* der Induktionskurve $B(I)$, (siehe Abb.7). Die Schergerade S S' schließt mit der Ordinate B den Winkel β ein, wobei

$$\tan \beta = \frac{d}{\mu_0 n} + \frac{Nl}{\mu_0 n} \quad (8)$$

Ist einer der beiden Terme auf der rechten Seite von Gl. (8) klein im Vergleich zum anderen, gilt mit $\beta = \beta_1 + \beta_2$ näherungsweise:

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{d}{\mu_0 n}\right), \quad \beta_2 = \arctan\left(\frac{Nl}{\mu_0 n}\right) \quad (9)$$

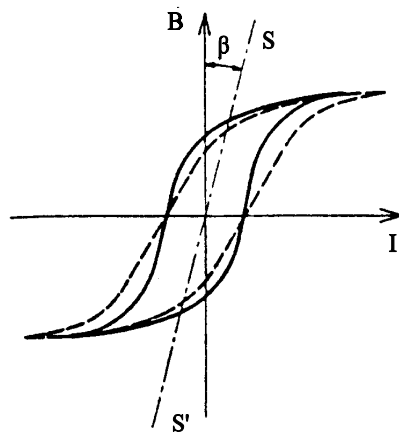


Abb.7:
Scherung einer Hystereseschleife

4. Aufgabenstellung:

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie mit der in Abb.6 gezeigten Anordnung die magnetische Induktion im Spalt des Eisenkerns in Abhängigkeit vom Erregerstrom für die Neukurve und einen Ummagnetisierungszyklus.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die magnetische Induktion im Spalt eines Ferritkerns in Abhängigkeit vom Erregerstrom für einen Ummagnetisierungszyklus.
- 3. Aufgabe:** Berechnen Sie für jeden Messwert B der Neukurve die Feldstärke H_i sowie die magnetische Permeabilität μ des Eisenkerns und stellen Sie die Größen $B(H_i)$ und $\mu(H_i)$ graphisch dar.
- 4. Aufgabe:** Bestimmen Sie den durch Streufeldverluste verursachten Entmagnetisierungsfaktor für den Eisen- und den Ferritkern.

5. Versuchsdurchführung

5.1 Abmagnetisieren

Vor jeder neuen Versuchsreihe sind die Kerne des Eisen-Magneten abzumagnetisieren. Benutzen Sie dazu den Aufbau gemäß Abb. 5. Die Kerne werden in die Spule L_2 geschoben und langsam wieder herausgezogen. Um vor der Abmagnetisierung eine möglichst maximale Erregung der Kerne zu erreichen, kann der Kern aus Spule L_1 vorsichtig so weit herausgezogen werden, bis der Spulenstrom 2 A erreicht hat. Der Vorgang des Abmagnetisierens kann mehrmals, sollte jedoch mindestens einmal wiederholt werden. Prüfen Sie gegebenenfalls die abmagnetisierten Kerne mit der Hallsonde.

5.2 Aufnahme der Neukurve und der Hystereseschleifen

Der Aufbau für den Eisenkern (I+U-Kern) geschieht wie in Abb.6 gezeigt.

Einstellungen des XY-Schreibers:

- Nullstellung: Blattmitte
- Empfindlichkeit x: 10mV/cm var. ($2A \triangleq 10cm$)
- Empfindlichkeit y: 1mV/cm cal. ($100mT \triangleq 1cm$)

Die Schreibereinstellungen sind ohne Erregung des Magnetkerns vorzunehmen.

Erhöhen Sie langsam den Erregerstrom I von Null beginnend in Schritten von ca. 0,1 A bis 2A. Eine Verminderung des eingestellten Stromwertes ist hierbei unbedingt zu vermeiden. Notieren Sie neben der Aufnahme der Schreiberkurve für jeden eingestellten Stromwert die Hallspannung $U_H(I)$ bzw. die Induktion $B(I)$. Zur Aufnahme der Hysteresekurve verändern Sie darauf langsam den Strom I (wieder nur in einer Richtung) von +2A nach -2A und darauf von -2A zurück nach +2A. Nach Anheben des Schreiberstifts ist der Strom auf Null zu stellen.

Zur Aufnahme der Hysteresekurve des Ferritkerns (2x U-Kern) ist lediglich eine Erregerspule (1200W, 1A max.) zu verwenden. **Vorsicht** beim Einbau der Kerne. Diese sind sehr spröde und splintern leicht!

Einstellungen des XY-Schreibers:

Nullstellung: Blattmitte

Empfindlichkeit x: 1mV/cm cal. (1A \triangleq 10cm)

Empfindlichkeit y: 1mV/cm var. (100mT \triangleq 2cm)

Variieren Sie den Erregerstrom von Null beginnend (jeweils nur in eine Richtung) nach +1A, dann nach -1A und zurück nach +1A. Nach Anheben des Schreiberstifts ist dann I auf Null zu stellen.

5.3 Auswertung

Berechnen Sie für jedes Wertepaar $B(I)$ des Eisenkerns die Feldstärke H_i gem. Gl.(4) und die Permeabilität μ gem. Gl. (5). Hierbei sind die Streufeldverluste zu vernachlässigen.

Tragen Sie die magn. Induktion $B(H_i)$ und Permeabilität $\mu(H_i)$ des Eisenkerns graphisch auf.

Spaltbreite des Eisenkerns: $d = 0,8$ mm; magn. Weglänge: $l = 354$ mm.

Berechnen Sie die durch den Luftspalt verursachte Entmagnetisierung gem. Gl.(4), bzw. Gl.(9), d.h. den durch sie im Graphen $B(I)$ entstehenden Scherwinkel β_1 . Schätzen Sie durch Vergleich von β_1 mit dem gemessenen Winkel β , den die Hysteresekurve bei $B = 0$ mit der B-Achse bildet, den noch verbleibenden Differenzwinkel β_2 ab. Bestimmen Sie hieraus näherungsweise den Entmagnetisierungsfaktor N .

Verfahren Sie auf gleiche Weise mit den Ergebnissen für den Ferritkern.

Spaltbreite des Ferritkerns: $d = 0,8$ mm; magn. Weglänge: $l = 381$ mm.

Diskutieren Sie die Messergebnisse und mögliche Fehler bei der Messung und Auswertung.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welchen Zusammenhang beschreibt die *magnetische Permeabilität* μ in magnetisierbaren Stoffen, wie groß ist sie für a) diamagnetische, b) paramagnetische, c) ferromagnetische Stoffe?
- 2) Was besagt der Begriff *magnetische Hysterese* bei Ferromagneten?
- 3) Diskutieren Sie den typischen Verlauf einer Hysteresekurve $B(H)$ für einen Ferromagneten und beschreiben Sie die ihr zugrunde liegenden physikalischen Prozesse bei der Auf-, Ab- bzw. Ummagnetisierung!
- 4) Was besagen die Begriffe *Neukurve*, *Sättigung*, *Remanenz* und *Koerzitivfeldstärke* bei einem Ferromagneten?
- 5) Wie sollte die Remanenz und Koerzitivfeldstärke idealerweise a) für einen Dauermagneten, b) für einen Transformator Kern beschaffen sein?
- 6) Nennen Sie verschiedene experimentelle Methoden zur Bestimmung der magnetischen Induktion B im allgemeinen bzw. speziell zur Bestimmung von Induktionskurven $B(H)$ von Ferromagneten.
- 7) Beschreiben Sie Größe und Wirkung des entmagnetisierenden Feldes anhand des Verlaufs der magn. Feldlinien für a) einen kurzen b) langen zylindrischen Stabmagneten, c) einen geschlossenen Toroiden d) einen Toroiden mit Luftspalt sowie e) die im Versuch benutzte Anordnung.
- 8) Welche Gleichung beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke H und dem erregenden elektr. Strom I in einem magnetischen Kreis?

Versuch C 7: Messung mit der magnetischen Drehwaage

1. Literatur: Walcher, Praktikum der Physik
Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik
Westphal, Physikalisches Praktikum
Bergmann-Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. II

Stichworte: Magnetisches Feld, magn. Feldstärke, magn. Flussdichte, elektrische Ströme, Durchflutungsgesetz, Gesetz von Biot-Savart, Kraftwirkungen im Magnetfeld

2. Grundlagen

2.1 Magnetische Durchflutung (1. Maxwellsche Gleichung)

Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und dem von ihm erzeugten magnetischen Feld. Betrachtet wird eine Fläche F , deren Randkurve durch den Vektor \underline{s} beschrieben sei, so dass die Flächennormale mit ihm ein Rechtsschraubensystem bildet. Die Fläche F sei in beliebige Flächenelemente dF aufgeteilt, durch welche elektrischer Strom der Stromdichte \underline{j} entweder in einzelnen Drähten oder räumlich verteilt hindurchtrete. Dann gilt ¹⁾:

$$\oint_S \underline{H}_s ds = f \int_F \underline{j}_n dF \quad (1)$$

In dieser 1. Maxwellschen Gleichung ist H_s die Komponente der magnetischen Feldstärke \underline{H} , die in Richtung von \underline{s} weist, \underline{j}_n ist die Komponente der Stromdichte \underline{j} , die senkrecht auf dF steht und f ist ein Proportionalitätsfaktor. In Worten bedeutet Gl. (1): Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über eine in sich geschlossene Kurve ist proportional der Gesamtheit der vom Integrationsweg umfassten Ströme. Aus Gl.(1) folgt z.B., dass die magnetische Feldstärke H in der Umgebung eines stromführenden (geraden) Drahtes proportional zur Stromstärke I und umgekehrt proportional zum Abstand r des Drahtes ist.

Setzt man nach der Konvention der Elektrotechnik in Gl.(1) $f = 1$ (praktisches Maßsystem) dann lautet das Durchflutungsgesetz:

1) Gl.(1) beschreibt hier lediglich den Fall stationärer (zeitl. konstanter) Felder und Ströme.

$$\oint_S \underline{H}_s ds = \int_F \underline{j}_n dF \quad (2)$$

Wir wenden Gl.(2) auf eine gerade Spule an, die so lang sein soll, dass das Feld im Außenraum vernachlässigbar klein gegenüber dem Feld im Innern der Spule ist. In der Spulennitte sei das Feld nahezu homogen.

Wird ein Integrationsweg wie in Abb. 1 angegeben gewählt, so hat das Linienintegral auf dem Teilweg 1 - 2 den Wert $H \cdot l$, auf den Teilwegen 2 - 3, 3 - 4 und 4 - 1 den Wert 0, da laut Voraussetzung H im Außenraum 0 ist und außerdem für eine große Spulenlänge im Innern der Spule das Feld keine Radialkomponente besitzt.

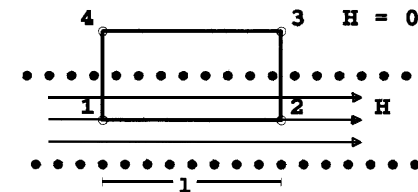


Abb.1: Integrationsweg zur Berechnung des Feldes einer langen Spule mit Gl.(2)

Man erhält mit Gl.(2) für die gerade (unendlich) lange Spule also $H l = N I$ bzw.

$$H = \frac{NI}{l} = nI \quad (3)$$

wobei N die Anzahl der vom Integrationsweg umschlossenen Spulenwindungen ist bzw. $n = N/l$ die Anzahl der Windungen je Längeneinheit und I die Stromstärke. Das Feld einer langen Spule ist also unabhängig vom Spulenradius und proportional zur Zahl der Windungen pro Längeneinheit. Die magnetische Feldstärke hat im praktischen Maßsystem die Dimension Stromstärke \times Windungszahl je Längeneinheit und die Einheit A/m.

2.2 Das Gesetz von Biot-Savart

Für einen (dünnen) stromführenden Draht lässt sich auch ganz allgemein eine

Beziehung für die magnetische Feldstärke in der Umgebung des Drahtes angeben (s. Abb.2). Ist $d\mathbf{l}$ ein kleines Leiterelement des Drahtes, durch welchen der Strom I fließt, und P der Aufpunkt, in dem H bestimmt werden soll, so ist der Beitrag $d\mathbf{H}$ des Drahtstückes $d\mathbf{l}$ zu H im Punkt P :

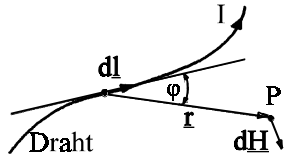


Abb.2:

$$|d\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi r^3} |d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| = \frac{I}{4\pi r^2} dl \sin\varphi \quad \text{Biot-Savart'sches Gesetz (4)}$$

Hierbei ist r der Abstand des Punktes P von $d\mathbf{l}$ (\mathbf{r} der Abstandsvektor) und φ der Winkel, den $d\mathbf{l}$ mit \mathbf{r} einschließt. $d\mathbf{H}$ ist senkrecht zu $d\mathbf{l}$ und \mathbf{r} gerichtet ($d\mathbf{H} \parallel d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$). Mit Hilfe des Elementargesetzes, Gl. (4) kann das Magnetfeld jedes beliebigen stromdurchflossenen Leiters durch Integration bestimmt werden.

Die Berechnung der Feldstärke im Zentrum einer kreisförmigen Leiterschleife mit dem Radius R ist über Gl.(4) besonders einfach. Hier ist für alle Drahtelemente $r = R$ und $\sin \varphi = 1$, so dass man nach Integration über den Drahtkreis erhält:

$$H = \frac{I}{2R} \quad (5)$$

Wenn anstelle einer Drahtschleife N Windungen hintereinander geschaltet werden, ist

$$H = \frac{NI}{2R} \quad (6)$$

Diese Formel gilt in guter Näherung für das Feld im Zentrum sehr flacher Spulen, bei denen $R \gg l$, die Spulenlänge ist. Man vergleiche Gln. (3) u. (6) für lange und für kurze, flache Spulen.

Anmerkung: Für endlich lange Spulen ist in Gl. (3) l bzw. in Gl.(6) $2 R$ durch das geometrische Mittel von $2 R$ und l , d.h. durch $(4R^2 + l^2)^{1/2}$ zu ersetzen.

2.3 Kraftwirkung im magnetischen Feld

Bringt man einen magnetischen Dipol, z.B. einen Stabmagneten in ein homogenes Magnetfeld der magn. Flussdichte (oder Induktion) \mathbf{B} , so wird auf ihn ein Drehmoment \mathbf{M} ausgeübt, dessen Stärke gegeben ist durch:

$$M = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = mB \sin\alpha \quad (7)$$

\mathbf{m} ist das magnetische Dipolmoment des Stabmagneten, welches dem Betrage nach mit Gl. (7) zugleich als max. Drehmoment pro Induktionseinheit definiert ist. α ist der Winkel, den die Dipolachse (Achse des Stabmagneten) mit der Feldrichtung einschließt. Ist der Stabmagnet wie im vorliegenden Versuch zur Bestimmung magn. Feldstärken in einer Torsionswaage (s. Abb. 3) so drehbar angeordnet, dass der Winkel α nur einen kleinen Bereich in der Nähe von $\alpha = 90^\circ$ überstreicht, so kann näherungsweise $\sin \alpha = 1$ gesetzt werden und man erhält aus Gl. (7) mit

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (8)$$

$$M = m\mu_0 H \quad (9)$$

($\mu_0 =$ Induktionskonstante). Aufgrund der Drehung des Dipols um den Winkel $\Delta\alpha = \beta$ wird in der Torsionswaage ein rücktreibendes Drehmoment $M_r = D \beta$ ($D =$ Direktionsmoment) erzeugt, so dass im Gleichgewicht der Momente

$$D\beta = m\mu_0 H \quad (10)$$

Man erhält für die magnetische Feldstärke H als Funktion des Drehwinkels β :

$$H = \frac{D\beta}{m\mu_0} = C' \beta \quad (11)$$

mit der Apparatekonstanten C' .

3. Aufgabenstellung

1. **Aufgabe:** Die Torsionswaage zur Messung magnetischer Felder ist mit einer langen Zylinderspule zu eichen.
2. **Aufgabe:** Es ist die magnetische Feldstärke in den Zentren zweier Kreisspulen zu bestimmen und mit berechneten Feldstärkewerten zu vergleichen.
3. **Aufgabe:** Zeigen Sie mit den Ergebnissen der Aufgabe 2 die Gültigkeit des Biot-Savart-Gesetzes.

4. Versuchsdurchführung

4.1 Versuchsanordnung

Abb. 3a zeigt die im Versuch benutzte Torsionswaage zur Bestimmung der magn. Feldstärke. Zwischen zwei vertikal gespannten Torsionsdrähten hängt ein Metallstab, in dessen Mitte ein kleiner Stabmagnet m so horizontal befestigt ist, dass seine Achse senkrecht zur Richtung des zu bestimmenden Magnetfeldes weist. Am oberen Ende des Stabes klemmt ein kleiner Spiegel S , der einen Lichtstrahl reflektiert und damit die Winkellage bzw. Verdrehung des Stabes und des

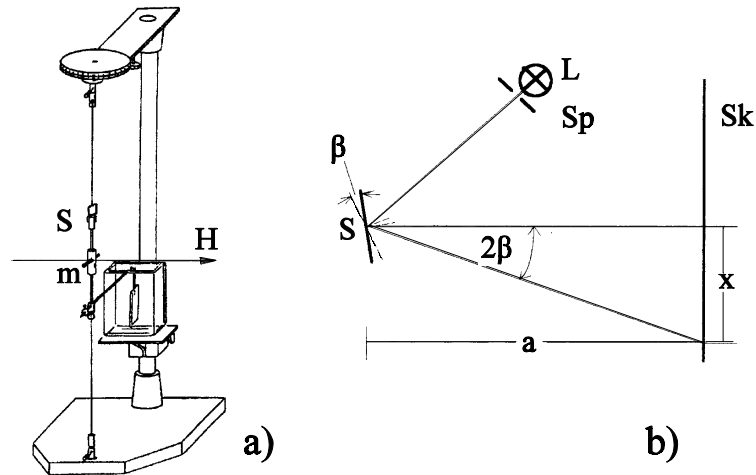


Abb.3: a) Torsionswaage, b) Strahlengang

Magneten aus der Ruhelage anzeigt. Am unteren Ende des Stabes ist eine Metallfahne angebracht, die in ein Wassergefäß eintaucht und die Drehschwingungen des Stabes dämpft. (Die Dämpfung ist über die Eintauchtiefe bzw. Wassermenge zu optimieren.) Abb. 3b zeigt die Projektion des Lichtstrahls auf die horizontale Ebene: Der von der Lampe L beleuchtete Spalt Sp wird über den Spiegel S auf einer horizontalen Skala Sk abgebildet, die sich im Abstand a vom Spiegel befindet. Spiegel und Skala sind so auszurichten, dass der Lichtstrahl senkrecht auf die Skala fällt, wenn sich der Magnet in seiner Ruhelage (ohne Magnetfeld) befindet. Eine Drehung des Magneten sowie Spiegels im Magnetfeld H um den Winkel β aus der Ruhelage bewirkt einen Ausschlag auf der Skala um die Strecke x , so dass

$$\tan 2\beta = \frac{x}{a} \quad (12)$$

Für kleine Ausschläge kann der Tangens durch den Winkel ersetzt werden und man erhält mit Gl. (11) u. (12)

$$H = \frac{D}{m\mu_0} \frac{x}{2a} = C' \frac{x}{2a} = Cx \quad (13)$$

Die Eichkonstante C wird im Versuch mit einer langen Zylinderspule bestimmt, deren Feldstärke H gem. Gl. (3) angenommen wird, so dass mit Gl. (3) und (13):

$$C = \frac{NI}{xl} \quad (14)$$

4.2 Eichung

Für die Eichung der Waage wird eine lange Zylinderspule benutzt. Sie besteht aus zwei Hälften, die so zusammengesteckt werden, dass sich der Magnet in einer Aussparung in der Spulenmitte befindet. Magnet und Spule sind so auszurichten, dass ihre Achsen senkrecht zueinander stehen. Die Spule hat zwei parallele Wicklungen (blau und rot) mit jeweils $N = 120$ Windungen auf der Wicklungslänge $l = 59$ cm und einen Durchmesser $2R = 12$ cm.

Für die Eichung wie die nachfolgenden Messungen mit den Kreisspulen wird jeweils der Ausschlag x des Lichtzeigers auf der Skala in Abhängigkeit von der

Stromstärke I durch die betreffende Spule gemessen. Für die Beschaltung steht eine Konstantstromquelle, ein Amperemeter sowie ein Polwender zur Verfügung. Die Eichmessungen erfolgen im Strombereich $0 - 0,5$ A in Schritten von ca. 50 mA vom frei gewählten Nullpunkt nach rechts und links auf der Skala durch Umpolen der Stromrichtung. Sie sind für beide Wicklungen der Zylinderspule einzeln und in Reihe geschaltet durchzuführen. Die max. Spannung der Stromquelle ist vor jeder Messreihe so einzustellen, dass sie gerade für den max. nötigen Strom innerhalb der Messreihe ausreicht. Der Abstand a vom Spiegel bis zur Skala ist zu bestimmen und während des Versuches nicht mehr zu verändern. (Andernfalls ist die Eichkonstante auf den geänderten Abstand umzurechnen.)

Die Werte der Messreihen werden in je ein Diagramm $x(I)$ eingetragen, durch die Messpunkte wird jeweils eine Ausgleichsgerade gelegt und aus diesen bei bekanntem Verhältnis N/I mit Gl. (14) die Eichkonstante C bestimmt.

4.3 Messung der Feldstärke in der Mitte der kurzen Spulen

Es sind die Feldstärken in den Zentren zweier Kreisspulen mit den Radien $R_1 = 10$ cm und $R_2 = 20$ cm zu bestimmen. Hierfür ist der Magnet in der Torsionswaage um 90° verdreht zu montieren. Beide Spulen können wahlweise mit 5 oder 10 Windungen (Wicklungslängen 4,5 mm bzw. 9 mm) beschaltet werden. Gemessen wird für jeweils beide Windungszahlen der Ausschlag x in Abhängigkeit der Stromstärke I von $0 - 3,5$ A in Schritten von ca. 0,5 A.

Die Ausschläge sind wie bei der Eichung nach beiden Seiten abzulesen und nach Multiplikation mit der Eichkonstanten C in ein Diagramm $H(I)$ einzutragen.

4.4 Man prüfe für die Kreisspulen die Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes, Gl. (4) bzw. (6) mit Hilfe der unterschiedlichen Messparameter I , N und R . Die experimentell ermittelten und die theoretisch berechneten Werte sind zu vergleichen und im Zusammenhang mit Messfehlern zu diskutieren.

5. Fehlerrechnung

5.1 Unsystematische Fehler

Die Eichkonstante C ist aus mehreren Messungen ermittelt worden, wobei ein graphischer Ausgleich der Beobachtungsfehler durchgeführt wurde.

Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert C_m der Konstanten C_i , die sich aus den einzelnen Messwertpaaren $x_i(I)$, $x_i(-I)$, $i = 1..n$, berechnen lassen. Vergleichen Sie C mit C_m und diskutieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der unterschiedlichen Mittelung. Berechnen Sie die Standardabweichung von $C_{(i)}$ (den mittleren Fehler der Einzelmessung von C) sowie die Standardabweichung S_m von C_m (den

mittleren Fehler des Mittelwertes C_m):

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum (C_i - C_m)^2}{n(n-1)}}$$

5.2 Systematische Fehler

Schätzen Sie die systematischen Fehler der Feldstärkemessungen ab, welche mit der Näherung für kleine Winkelausschläge der Torsionswaage (Gln. (9) u. (13)) verknüpft sind sowie mit der Annahme, dass die Zylinderspule unendlich lang ist (Gl. (3)) und die Kreisspulen extrem flach sind (Gl. (6)). Diskutieren Sie mögliche weitere systematische Fehler bei der Anordnung und Durchführung der Messung.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie lautet die *1. Maxwellsche Gleichung* für den Fall zeitunabhängiger Felder?
- 2) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen für den allgemeinen Fall zeitlich veränderlicher Felder?
- 3) Welche Einheiten des MKSA-Systems haben die magnetische Feldstärke H , die magn. Induktion B und das magn. Moment m ? Wie sind H und B im Vakuum verknüpft, wie in Materie?
- 4) Wie groß ist die magn. Feldstärke in der Mitte: a) einer sehr langen geraden Zylinderspule, b) einer sehr flachen Kreisspule, c) einer beliebigen Zylinderspule?
- 5) Leiten Sie mit Hilfe des *Biot-Savart Gesetzes* die Formel für die magnetische Feldstärke längs der Achse einer Kreisspule her!
- 6) Mit welcher Anordnung flacher Kreisspulen kann (in einem begrenzten Volumen) ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugt werden?
- 7) Nennen Sie mindestens drei verschiedene Methoden zur Messung magnetischer Felder sowie die ihnen zugrunde liegenden physikalischen Gesetze.
- 8) Welche Kräfte wirken auf einen magnetischen Dipol a) im homogenen Magnetfeld, b) im inhomogenen Magnetfeld?

Versuch C8/9: Wechselstromwiderstände und Reihenresonanz

1. Literatur: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.II
Pohl, Einführung in die Physik, Bd.2
Gerthsen, Kneser, Vogel; Physik

Stichworte: Wechselstromkreise, Zeigerdiagramm; ohmscher, kapazitiver und induktiver Widerstand; Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand, Reihen- und Parallelschaltungen; komplexer Wechselstromwiderstand, Impedanz; Resonanz und Güte von Schwingkreisen

2. Grundlagen

2.1 Elektrischer Widerstand in Gleichstromkreisen

Wird in einen Gleichstromkreis ein ohmscher Widerstand R geschaltet, so ist die Spannung U_R am Widerstand mit der Stromstärke I durch das Ohmsche Gesetz verknüpft:

$$U_R = R I \quad (1)$$

Wird anstelle des Ohmschen Widerstandes eine Spule mit der Selbstinduktion (Induktivität) L geschaltet, so ist das Verhältnis von Spannung zu Strom gemäß Gl.(1) nur durch den Ohmschen Widerstand R_L des Spulendrahtes festgelegt und von L unabhängig. Schließt man an eine Gleichspannungsquelle der Spannung U einen Kondensator mit der Kapazität C , so wird nur solange ein Strom fließen bis der Kondensator die Ladung $Q = C U$ besitzt.

2.2 Wechselstromkreise

In Abb. 1 ist ein sinusförmiger Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin \omega t$ im Linien- und Zeigerdiagramm dargestellt. I_0 ist der Scheitelwert, ωt die Phase, $\omega = 2\pi f$ die Phasengeschwindigkeit oder Kreisfrequenz, $f = 1/T$ die Frequenz und T die Periode des Wechselstroms. Im Zeigerdiagramm ist I_0 ein Zeiger, der sich mit der Phasengeschwindigkeit ω (= Winkelgeschwindigkeit) um den Ursprung dreht. Den Momentanwert des Stroms I zur Zeit t_1 (Phase $\varphi_1 = \omega t_1$) erhält man durch Projektion des Zeigers auf die vertikale Achse. Die Darstellung einer sinusförmigen Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ist analog. Mit der *Phasenverschiebung* φ wird jedoch berücksichtigt, dass in einem

Wechselstromkreis mit induktiven und kapazitiven Elementen Spannung und Strom im allgemeinen nicht die gleiche Phase haben (s.u.).

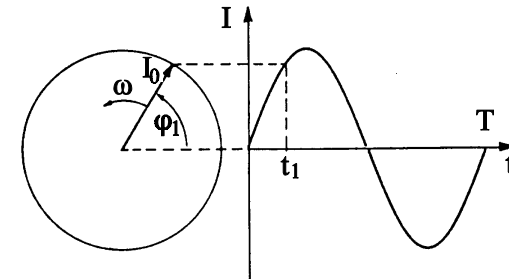


Abb.1: Darstellung eines sinusförmigen Wechselstroms im Zeiger- und Liniendiagramm

2.2.1 Ohmscher Widerstand:

Wird in einen Wechselstromkreis mit Stromstärke $I = I_0 \sin \omega t$ lediglich ein Ohmscher Widerstand R geschaltet, so ist die an R anliegende Spannung U_R wie im Gleichstromkreis durch das Ohmsche Gesetz (Gl. (1)) festgelegt.

$$U_R = R I = R I_0 \sin \omega t = U_{OR} \sin \omega t, \quad U_{OR} = R I_0 \quad (2)$$

Spannung und Strom sind für einen Ohmschen Widerstand zu jedem Zeitpunkt in Phase, d.h. die Phasen von Spannung und Strom sind gleich (s. Abb. 2a). Man bezeichnet den Ohmschen Widerstand R in einem Wechselstromkreis auch als *Wirkwiderstand*, da mit der Phasengleichheit von Strom und Spannung eine Energieaufnahme W (Joulesche Wärme) aus dem Stromkreis verbunden ist. Für die Zeit einer Periode erhält man:

$$W_T = \int_0^T U(t) I(t) dt = T U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (3)$$

Mit der Leistungsaufnahme eines Ohmschen Widerstandes sind zugleich die Effektivwerte U_{eff} einer Wechselspannung und I_{eff} eines Wechselstroms als diejenige Gleichspannung und derjenige Gleichstrom festgelegt, welche die gleiche Leistung an den Widerstand abgeben.

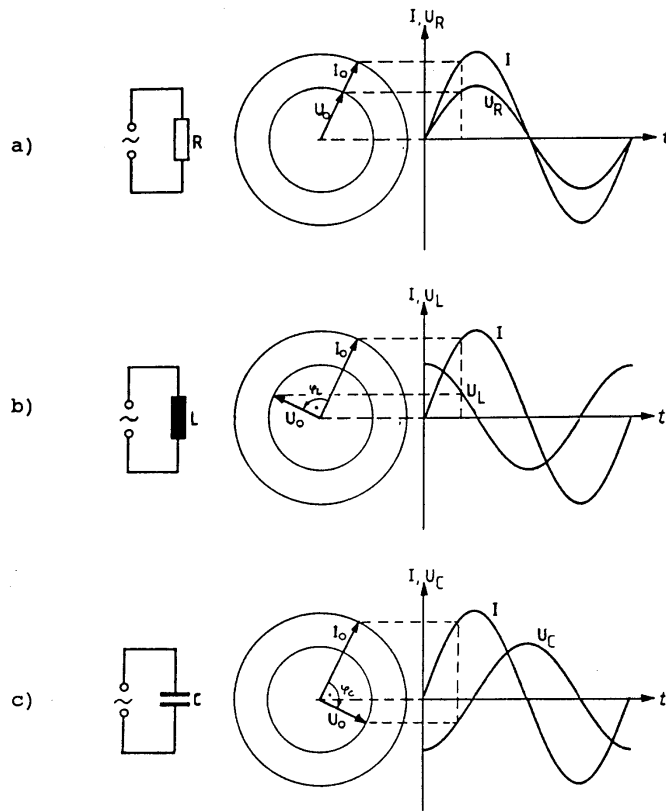


Abb.2: Zeiger- und Liniendiagramm von Wechselspannung und -strom für a) Ohmschen, b) induktiven und c) kapazitiven Widerstand

Für sinusförmige Wechselspannungen und -ströme folgt mit Gln. (1), (2) u.(3)

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

2.2.2 Induktiver Widerstand:

Wird in den Wechselstromkreis der Stromstärke $I(t) = I_0 \sin \omega t$ eine Spule der Induktivität L geschaltet und ist der Ohmsche Widerstand R_L der Spule vernachlässigbar klein, so ist die an der Spule entstehende Spannung gleich der

Induktionsspannung U_L

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (5)$$

Mit dem Ansatz $U_L = U_{0L} \sin(\omega t + \varphi_L)$ findet man nach Differenzieren von I nach der Zeit, Einsetzen in Gl. (5) und Koeffizientenvergleich der (linear unabhängigen) Zeitfunktionen $\sin \omega t$ u. $\cos \omega t$ für die Phasenverschiebung φ_L von Spannung und Strom und das Verhältnis X_L der Scheitelwerte U_{0L} und I_0

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}, \quad X_L = \frac{U_{0L}}{I_0} = \omega L \quad (6)$$

Die an der Spule liegende Spannung ist mit dem Strom nicht phasengleich sondern eilt ihm um eine Viertelperiode voraus (s. Abb. 2b). Das Verhältnis X_L der Scheitelwerte von Spannung und Strom nennt man den *induktiven Widerstand* oder *Blindwiderstand* einer Induktivität L. Er steigt mit zunehmender Frequenz. Die Phasenverschiebung $\pi/2$ von Spannung und Strom bei einer Induktivität bedingt, dass durch ihren Blindwiderstand über die Zeit einer Periode gemittelt keine Energie dem Stromkreis entnommen wird (das Integral in Gl. (3) verschwindet).

2.2.3 Kapazitiver Widerstand:

Schaltet man in den Wechselstromkreis einen Kondensator mit der Kapazität C, so ist seine Ladung Q proportional zur anliegenden Spannung U_C :

$$Q = C U_C \quad (7)$$

Differenzieren nach der Zeit liefert

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (8)$$

Mit dem Ansatz $U_C = U_{0C} \sin(\omega t + \varphi_C)$ findet man nach Differenzieren, Einsetzen in Gl. (8) und Koeffizientenvergleich:

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}, \quad X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \quad (9)$$

Beim Kondensator eilt die Spannung dem Strom um eine Viertelperiode nach (s. Abb. 2c). X_C ist der *kapazitive Widerstand* oder *Blindwiderstand* einer Kapazität C. Er fällt mit steigender Frequenz. Auch ein Kondensator entnimmt aus dem Stromkreis über die Zeit einer Periode gemittelt keine Energie.

2.2.4 Reihen- und Parallelschaltungen:

Schaltet man, wie in Abb. 3a gezeigt, einen Ohmschen Widerstand mit einer Spule ($R_L = 0$) und einem Kondensator in einem Wechselstromkreis in Reihe, so

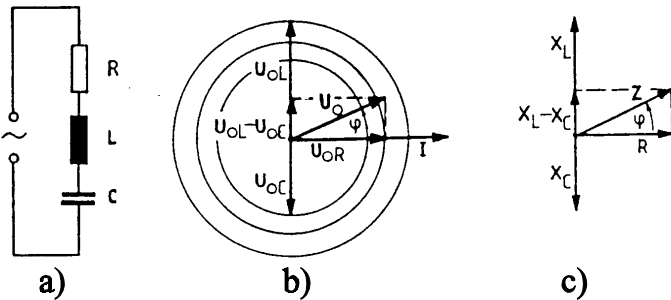


Abb.3: a) Reihenschaltung eines Ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerstandes, b) Zeigerdiagramm der Spannungen, c) Zeigerdiagramm der Widerstände

addieren sich die einzelnen Spannungen U_R , U_L und U_C zur Gesamtspannung U . In Abb. 3b sind die einzelnen Spannungszeiger U_{0R} , U_{0L} und U_{0C} und der Zeiger U_0 der Gesamtspannung zusammen mit dem des Stroms für einen Zeitpunkt dargestellt, in dem der Stromzeiger mit der horizontalen Achse zusammenfällt. Den Zeiger der Gesamtspannung erhält man durch geometrische Addition der einzelnen Spannungszeiger. Mit Gln. (2), (6) u. (9) erhält man unter Berücksichtigung der Phasenlagen der Einzelspannungen für das Verhältnis der Scheitelwerte von Gesamtspannung und Strom:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{\sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2}}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (10)$$

Man nennt Z den *Scheinwiderstand* der Schaltung. Der Scheinwiderstand setzt sich zusammen aus dem Wirkwiderstand (hier R), der von der mit dem Strom phasengleichen Spannungskomponente herrührt, und dem Blindwiderstand (hier $X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C$), der von den um $\pm\pi/2$ phasenverschobenen Spannungskomponenten herrührt. Für das Verhältnis von Blind- zu Wirkwiderstand bzw. für den Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom gilt

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (11)$$

Um den Gesamtwiderstand der in Abb. 3a gezeigten Schaltung zu bestimmen, können anstelle der Spannungen, Abb. 3b, auch direkt die Widerstände entsprechend Abb. 3c addiert werden.

Bei der Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes mit einer Spule ($R_L = 0$) und einem Kondensator in einem Wechselstromkreis sind die Einzelströme bzw. die Kehrwerte der Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes geometrisch zu addieren. Im Zeigerdiagramm sind diese gemäß ihrer Phasenlage zur gemeinsamen Spannung bzw. zum Leitwert $1/R$ aufzutragen. Man erhält für den Scheinwiderstand:

$$Z = \frac{U_0}{\sqrt{I_{0R}^2 + (I_{0L} - I_{0C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \quad (12)$$

und für den Phasenwinkel

$$\tan\varphi = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \quad (13)$$

2.3 Komplexe Wechselstromwiderstände

Im Prinzip lassen sich durch geometrische Addition auch die Wechselstromwiderstände größerer Netze mit gemischter Parallel- und Reihenschaltung bestimmen. Hierbei werden die Netze in elementare Netze mit reiner Reihen- oder Parallelschaltung zerlegt und dann ihre Scheinwiderstände oder Kehrwerte entsprechend ihrer Zusammenschaltung geometrisch aufaddiert. Die Berechnung von Widerstandsnetzen wird dagegen wesentlich einfacher, wenn man die komplexe Darstellung von Wechselspannungen, -strömen und -widerständen benutzt.

In der komplexen Darstellung wird die reelle harmonische Funktion $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$ wie folgt zu einer komplexen Funktion $\underline{z}(t)$ erweitert:

$$\underline{z}(t) = z_0 [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] \quad (14)$$

bzw. mit der Definition: $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$

$$\underline{z}(t) = z_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = z_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (15)$$

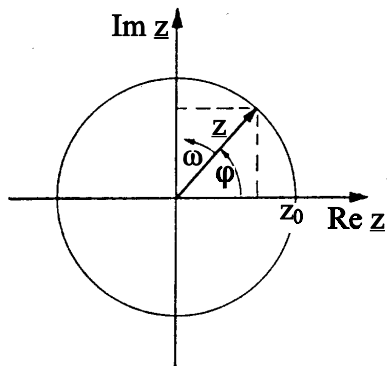


Abb.4:

Darstellung der komplexen Funktion $\underline{z}(t)$ zur Zeit $t = 0$ als Vektor in der Gaußschen Ebene

Abb. 4 zeigt die Funktion $\underline{z}(t)$ für den Zeitpunkt $t = 0$ in der Gaußschen Ebene als Vektor. $\underline{z}(t)$ rotiert mit ω um den Ursprung (wie die Wechselspannung bzw. der Wechselstrom im Zeigerdiagramm). Der Realteil $\text{Re } \underline{z} = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ist die Projektion von \underline{z} auf die horizontale Achse, der Imaginärteil $\text{Im } \underline{z} = z_0 \sin(\omega t + \varphi)$ die auf die vertikale, die imaginäre Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ schließt hier \underline{z} mit der reellen Achse den Winkel φ ein, der für eine beliebige komplexe Zahl \underline{z}

gegeben ist durch

$$\tan\varphi = \frac{\text{Im } \underline{z}}{\text{Re } \underline{z}} \quad (16)$$

Weiterhin gilt für den Betrag $z_0 = |z|$ einer bel. komplexen Zahl

$$\begin{aligned} z_0^2 &= |\underline{z}|^2 = \underline{z} \underline{z}^* = (\text{Re } \underline{z} + i \text{Im } \underline{z})(\text{Re } \underline{z} - i \text{Im } \underline{z}) \\ &= (\text{Re } \underline{z})^2 + (\text{Im } \underline{z})^2 \end{aligned} \quad (17)$$

wobei $\underline{z}^* = \text{Re } \underline{z} - i \text{Im } \underline{z}$ die konjugiert komplexe Zahl von \underline{z} ist.

Mit der Darstellung von \underline{z} durch Gl. (15) und $z_0 = 1$ folgen mit Gl. (17) die speziellen Rechenregeln

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = i^2 = -1, \quad |e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = 1 \quad (18)$$

Wie $\underline{z}(t)$ können Wechselströme und -spannungen als komplexe Zeitfunktionen $\underline{I}(t)$ und $\underline{U}(t)$ dargestellt werden:

$$\underline{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad \underline{U}(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (19)$$

Diese komplexen Funktionen werden jedoch lediglich für die Rechnung benutzt. Physikalisch messbar sind nur die Realteile. Das Verhältnis

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} \quad (20)$$

wird *komplexer Wechselstromwiderstand* oder *Impedanz* einer Schaltung genannt. Wie sich zeigen lässt, ist der Betrag von \underline{Z} , $Z = |\underline{Z}|$, der Scheinwiderstand, der Imaginärteil von \underline{Z} der Blindwiderstand und der Realteil von \underline{Z} der Wirkwiderstand eines Schaltkreises.

Für das Beispiel der Spule mit Induktivität L im Wechselstromkreis wird mit Gln. (5), (16) u. (20):

$$\underline{U} = L \frac{d\underline{I}}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \underline{I}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} = i\omega L \quad (21)$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Im}\underline{Z}}{\text{Re}\underline{Z}} = \infty, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Der induktive Widerstand einer Spule ist als komplexer Wechselstromwiderstand \underline{Z}_L rein imaginär, d.h. ein Blindwiderstand.

Für einen Kondensator der Kapazität C erhält man entsprechend mit Gl. (8) für den kapazitiven Widerstand \underline{Z}_C in der komplexen Darstellung die imaginäre Größe:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \quad \tan\varphi = -\infty, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (22)$$

Mit den komplexen Widerständen \underline{Z}_L , \underline{Z}_C und $\underline{Z}_R = R$ (reell) kann wie in Gleichstromkreisen der Gesamtwiderstand einer Schaltung berechnet werden, da in \underline{Z} jeweils die Phasenlage der Spannung zum Strom enthalten ist. Als Beispiel soll der Gesamtwiderstand der in Abb. 5 gezeigten Schaltung berechnet werden.

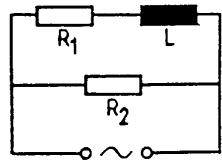


Abb.5:
Gemischte Reihen- und Parallelschaltung der Ohmschen Widerstände R_1 und R_2 mit einer Induktivität L

Der Widerstand R_1 kann auch den Ohmschen Widerstand R_L der Spule darstellen, der zum induktiven Widerstand \underline{Z}_L immer in Reihe liegt. Mit den Regeln für Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen in Gleichstromkreisen folgt:

$$\frac{1}{\underline{Z}_g} = \frac{1}{\underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_{R2}}, \quad \underline{Z}_g = \frac{(R_1 + i\omega L)R_2}{R_1 + i\omega L + R_2} \quad (23)$$

Erweitern des Ausdrucks von \underline{Z}_g mit dem konjugiert komplexen Nenner N^* liefert

$$\underline{Z}_g = \frac{A}{NN^*} + i \frac{B}{NN^*} \quad \text{mit}$$

$$A = R_1 R_2 (R_1 + R_2) + (\omega L)^2 R_2, \quad B = \omega L R_2^2 \quad (24)$$

$$NN^* = (R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2 \quad \text{und}$$

$$\underline{Z}_g^2 = |\underline{Z}_g|^2 = \frac{(A^2 + B^2)}{(NN^*)^2}, \quad \tan\varphi = \frac{B}{A}$$

2.4 Reihenresonanz

Mit *Resonanz* bezeichnet man den Zustand eines Wechselstromkreises (frequenzabhängiger Impedanz), in dem die Gesamtspannung \underline{U} und der Strom \underline{I} phasengleich sind, d.h. die Impedanz $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ des Kreises eine reelle Größe ist. Die Frequenz des Kreises für diesen Zustand ist die *Resonanzfrequenz* f_0 . Diese für den Kreis charakteristische Größe hängt von seinen Einzelimpedanzen und ihrer Zusammenschaltung ab.

Für die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators ist die Gesamtspannung \underline{U} die Summe der Einzelspannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und entsprechend die Gesamtimpedanz \underline{Z} gleich der Summe der Einzelimpedanzen \underline{Z}_R , \underline{Z}_L und \underline{Z}_C . Mit Gln. (20) - (22) folgt:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = |\underline{Z}| e^{i\varphi} \\ &= R + R_L + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

und für den Scheinwiderstand $Z = \underline{Z}$:

$$Z = \sqrt{(R + R_L)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (26)$$

Mit der Phasendifferenz φ zwischen Spannung und Strom und

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R + R_L} \quad (27)$$

ist im Falle der Resonanz ($\varphi = 0$) $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ und damit die Resonanzfrequenz f_0 :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (28)$$

Der Betrag I (bzw. Effektivwert) des Stromes \underline{I} ist mit U , dem Betrag (bzw. Effektivwert) der Spannung \underline{U} :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{(R + R_L)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (29)$$

Dieser ist maximal für die Resonanzfrequenz f_0 :

$$I(f_0) = \frac{U}{R + R_L} \quad (30)$$

$I(f_0)$ ist also nur durch den ohmschen Anteil von Z begrenzt. Die beiden Teilimpedanzen bzw. -spannungen Z_L und Z_C bzw. \underline{U}_L und \underline{U}_C sind im Resonanzfall gerade entgegengesetzt gleich groß und heben sich in ihrer Wirkung auf. Dabei können die Beträge U_L und U_C in der Nähe der Resonanzfrequenz jeweils erheblich größer sein als die Gesamtspannung U (s. Abb. 6).

Betrachtet man die Energie des Magnetfeldes der Spule ($W_L = \frac{1}{2}LI^2$) und die des elektrischen Feldes des Kondensators ($W_C = \frac{1}{2}CU_C^2$), so findet man, dass diese Energien mit einer Phasendifferenz von $\pi/2$, d.h. jeweils abwechselnd maximale

Werte annehmen bzw. Null sind. Die Maximalenergien sind im Resonanzfall gleich groß. Bei der Reihenschaltung von Spule und Kondensator *pendelt* also Energie zwischen magnetischem und elektrischem Feld. Schließt man die Schaltung, wenn z.B. der Kondensator gerade geladen ist, über der Spannungsquelle kurz, fließt danach ein Wechselstrom I der Frequenz f_0 durch den Kreis, wobei der Scheitelwert von I lediglich infolge des Wirkwiderstandes (R bzw. $R + R_L$) zeitlich abnimmt. Man nennt eine solche Schaltung deshalb auch *Reihenschwingkreis*. Entsprechendes gilt für die Parallelschaltung von Spule und Kondensator, den *Parallelschwingkreis*.

Abb. 6 zeigt die Effektivwerte von I , U_L und U_C sowie die Phasendifferenz φ von U und I für den Reihenschwingkreis ($R_L = 0$) als Funktion der Frequenz f der Gesamtspannung U ($U_{\text{eff}} = 1 \text{ V}$).

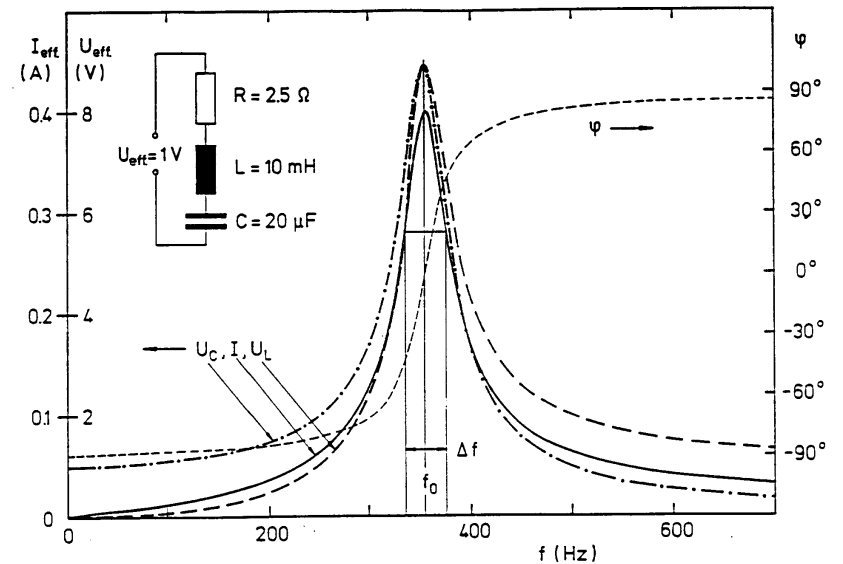


Abb.6: Resonanzkurven $I(f)$, $U_L(f)$ u. $U_C(f)$ sowie Phase φ für den Reihenschwingkreis (R, L, C). $f_0 = 356 \text{ Hz}$, $\Delta f = 40 \text{ Hz}$, $Q = 8,9$

In der Nähe der Resonanzfrequenz f_0 steigen die Kurven steil an bzw. fallen steil ab. Hierbei ist die *Güte* Q :

$$Q = \frac{1}{R + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (31)$$

ein Maß für die Form der Resonanzkurven. Je größer Q , also je kleiner der ohmsche Anteil der Impedanz im Verhältnis zu L/C ist, desto steiler und schmaler verlaufen die Kurven an der Resonanzstelle. Für große Güten ($Q \gg 1$) gilt:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (32)$$

wobei Δf die Resonanzbreite, das Frequenzintervall zwischen der oberen und unteren Grenzfrequenz bezeichnet, für welche die Resonanzkurve gerade den Bruchteil $1/\sqrt{2}$ des Maximalwertes besitzt.

In Abb. 6 sind die Maxima von U_L und U_C bei der gleichen Frequenz wie für I , also bei der Resonanzfrequenz f_0 gezeichnet. Dies gilt jedoch nur näherungsweise für hohe Güten. Durch Differenzieren von $U_L = \omega L I$ bzw. $U_C = I/\omega C$ nach ω und Nullsetzen der Ableitungen erhält man mit Gln. (29) u. (31) die Frequenzen f_L bzw. f_C der Maxima für U_L bzw. U_C :

$$f_L = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}}, \quad f_C = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} \quad (33)$$

f_L ist also stets größer als f_0 und nimmt mit abnehmender Güte zu, f_C stets kleiner als f_0 und nimmt entsprechend ab.

3. Aufgabenstellung

1. Aufgabe: Es sind die Gleich- bzw. Wechselstromwiderstände eines Ohmschen Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators aus Spannungs- u. Strommessungen zu bestimmen und bei gegebener Frequenz des Wechselstroms ($f = 50$ Hz) die Größen L und C zu berechnen.

2. Aufgabe: Es sind die Scheinwiderstände Z_g von drei Schaltungskombinationen (s.u.) des Ohmschen Widerstandes, der Spule

und des Kondensators in einem Wechselstromkreis zu bestimmen und mit berechneten Größen Z_g zu vergleichen.

3. Aufgabe: Für zwei Reihenschwingkreise bestehend aus Spule und Kondensator bzw. Spule, Kondensator und Ohmschen Widerstand sind der Strom und die Spannungen an Spule und Kondensator als Funktion der Frequenz der Gesamtspannung zu bestimmen. Aus der Auftragung der Resonanzkurven sind die jeweiligen Güten zu bestimmen und mit den aus Gl. (31) berechneten zu vergleichen.

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Bestimmung der Größen R , R_L , L und C

4.1.1 Gleichstrommessungen:

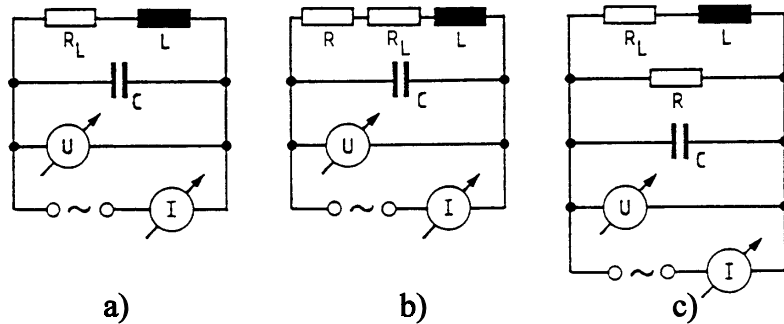
Der Ohmsche Widerstand R wird an eine variable Gleichspannungsquelle (U_{\max} ca. 25 V) angeschlossen. Mit zwei Universalmessgeräten werden Strom und Spannung für 5 verschiedene Ströme $0 < I < 1$ A gemessen. Man bestimme R aus der graphischen Auftragung $U(I)$ über eine Ausgleichsgerade. Nach Anschluss der Spule an die Quelle wird R_L auf die gleiche Weise bestimmt.

4.1.2 Wechselspannungsmessungen:

Die Spule wird an eine variable Wechselspannungsquelle ($f = 50$ Hz, U_{eff} max. ca. 25 V) angeschlossen. Ihr Scheinwiderstand wird (wie in 4.1.1) durch die Messung von 5 verschiedenen Effektivwerten U_{eff} und I_{eff} für $0 < I_{\text{eff}} < 1$ A aus der Steigung einer Ausgleichsgeraden von $U_{\text{eff}}(I_{\text{eff}})$ bestimmt. Anschließend wird der Kondensator in den Stromkreis geschaltet und sein Blindwiderstand entsprechend aus 5 verschiedenen Effektivwerten von Spannung und Strom für $0 < U_{\text{eff}} < 25$ V bestimmt. Aus den Messergebnissen mit Gleich- und Wechselspannung sind die Größen L und C zu berechnen.

4.2 Schaltungskombinationen:

Die nachfolgend gezeigten Schaltungskombinationen sind mit den unter 4.1 bestimmtem Bauteilen aufzubauen. Wie unter 4.1.2 sind die Scheinwiderstände der Schaltungskombinationen a), b) und c) aus je 5 verschiedenen Effektivwerten von Spannung und Strom im Bereich $0 < I_{\text{eff}} < 1$ A zu bestimmen und die Ergebnisse mit den berechneten Scheinwiderständen Z_g zu vergleichen.



Hinweis: Man berechne mit den Ergebnissen der 1. Aufgabe für jede Schaltungskombination zunächst den Zahlenwert für $1/Z_g^2$ und daraus Z_g .

4.3 Reihenschwingkreise

Für zwei Reihenschwingkreise bestehend aus:

- a) Spule und Kondensator (R_L, L, C) sowie
- b) Ohmschen Widerstand, Spule und Kondensator (R, R_L, L, C)

sind die Effektivwerte des Stroms I und der Spannungen U_L sowie U_C als Funktion der Frequenz f im Intervall $50 \text{ Hz} < f < 1000 \text{ Hz}$ zu bestimmen und graphisch darzustellen. Die Gesamtspannung U mit variabler Frequenz liefert ein Funktionsgenerator, dessen Frequenz für $f < 600 \text{ Hz}$ in Intervallen von ca. 50 Hz für $f > 600 \text{ Hz}$ in ca. 100 Hz -Intervallen geändert und mit einem Frequenzmesser bestimmt wird. An der Resonanzstelle sind die Frequenzintervalle kleiner zu wählen. Zur Beobachtung der Phasenlage der einzelnen Spannungen dient ein Oszilloskop. Die Spannung U_{eff} des Generators ist während der Messungen entweder konstant zu halten oder es sind die Effektivwerte des Stroms I bzw. der Spannungen U_L und U_C in der Auswertung auf eine konstante Gesamtspannung U_{eff} umzurechnen.

Die Kurven für a) und b) sind zu interpretieren und mögliche Messfehler zu diskutieren. Die für beide Resonanzkreise graphisch zu ermittelnden Frequenzen f_0, f_L und f_C sowie Güten Q sind mit den aus den Ergebnissen der 1. Aufgabe und den Gln. (28), (31) u. (33) berechneten Werten zu vergleichen.

5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was bedeuten die Begriffe *Scheitelwert*, *Effektivwert*, *Phase*, *Phasengeschwindigkeit*, *Frequenz* und *Periode* einer sinusförmigen Wechselspannung? Wie sind diese Größen im Zeiger- bzw. Liniendiagramm darstellbar?
- 2) Was ist der *Wirk*-, *Blind*- und *Scheinwiderstand* eines elektr. Bauelements?
- 3) Wie groß ist der Scheinwiderstand einer Spule, wie groß der eines Kondensators?
- 4) Wie addieren sich die Wechselstromwiderstände von Bauelementen einer Schaltung bei Parallel- bzw. Reihenschaltung?
- 5) Was versteht man unter der *Impedanz* eines elektr. Bauelements bzw. einer Schaltung und wie berechnet man aus ihr die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom?
- 6) Wie lautet die Bedingung für die *Resonanz* eines Schalt- oder Schwingkreises? Wie groß ist die Resonanzfrequenz für einen Reihenschwingkreis aus Spule und Kondensator?
- 7) Wie ist die *Güte* eines Reihenschwingkreises definiert? In welchem Zusammenhang steht ihre Größe mit den Resonanzkurven?

Versuch C 16: Thermoelektrizität

- 1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. II: Elektrizität u. Magnetismus
 Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik
 Pohl, Einführung in die Physik, Bd.2: Elektrizitätslehre
 Walcher, Praktikum der Physik
 Hellwege, Einführung in die Festkörperphysik

Stichworte: Thermoelektrische Effekte: Seebeck-, Peltier- u. Thomson-Effekt, Thermokräfte und Thermospannungen, Thermo-elemente, Thermosäule, Peltierelemente, Thermogenerator, Wärmepumpe

2. Grundlagen

2.1 Thermoelektrische Effekte

Verbindet man zwei Drähte aus verschiedenen Metallen A und B an ihren Enden miteinander, so dass sie einen geschlossenen Stromkreis bilden, und erwärmt man eine ihrer Kontaktstellen, entsteht eine elektromotorische Kraft in diesem Kreis. Es fließt ein elektr. Strom, der *Thermostrom* (s. Abb. 1a). Die hierfür notwendige Energie wird der Wärmequelle entzogen; mit dem Thermostrom ist auch ein Wärmestrom verbunden. Wird in einen der Drähte ein Voltmeter (mit genügend großem Innenwiderstand) geschaltet, so dass der elektr. Strom (nahezu) verschwindet (s. Abb. 1b), zeigt dieses eine *Thermospannung* U_{AB} an, die i. Allg. mit der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen anwächst. Erwärmt man die andere Kontaktstelle, so kehrt die Thermospannung ihr Vorzeichen um. Das Auftreten einer Spannung in elektr. Leitern infolge eines Temperaturgefälles wird nach ihrem Entdecker Seebeck (1821) *Seebeck-Effekt* genannt. Das die Spannung liefernde Metallpaar nennt man *Thermoelement*. Es wird vor allem zur Messung von Temperaturen genutzt.

Physikalisch in engem Zusammenhang mit dem Seebeck-Effekt steht seine Umkehrung, der *Peltier-Effekt*, (Peltier, 1834): Er besagt, dass ein elektr. Strom einen Wärmestrom verursacht. Dabei ist es gleich, ob der Strom von einem Temperaturgefälle (Thermostrom) oder einer äußeren Stromquelle gespeist wird. Fließt der Strom in einem Stromkreis aus zwei verschiedenen elektr. Leitern, erwärmt sich eine der Kontaktstellen der Leiter während sich die andere abkühlt. Bei zeitlich konstanten Temperaturen T_1, T_2 der Kontakte fließen zum Strom I proportionale Wärmeströme J_{P1}, J_{P2} zu bzw. von der Kontaktstelle (siehe Abb. 1c).

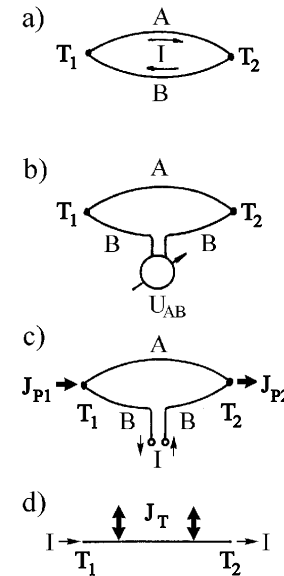


Abb.1:

Thermoelektrische Effekte in elektr. Leitern (schematisch):

A, B: verschiedene Metalle

- a) $T_1 \neq T_2$: Thermostrom I
- b) $T_1 \neq T_2$: Seebeck-Effekt, Thermospannung $U_{AB} \sim T_1 - T_2$
- c) $I \neq 0$: Peltier-Effekt, Wärmestrom $J_p \sim I$
- d) $T_1 \neq T_2, I \neq 0$: Thomson-Effekt, Wärmeemission oder Wärmeabsorption $J_T \sim I$

Mit der Umkehrung der Stromrichtung kehrt sich auch die Richtung der Wärmeströme um. Der Peltier-Effekt wird technisch in *Peltierelementen* vor allem bei elektr. Wärmepumpen genutzt (z.B. als Peltierkühler in Autokühlschränken).

Fließt durch einen Leiter ein elektr. Strom, bewirkt ein weiterer thermoelektrischer Effekt, der *Thomson-Effekt*, (Thomson, 1854), die Erzeugung oder Absorption von Wärme an allen Stellen des Leiters, an denen ein Temperaturgefälle herrscht (s. Abb.1d).

Seebeck-, Peltier- und Thomson-Effekt beschreiben Phänomene in elektr. Leitern, die beim Transport von Ladungen und Wärme im Gefälle des elektr. Potentials und der Temperatur auftreten. Die für diese Effekte charakteristischen Größen eines Leiters sind Transporteigenschaften wie die elektr. Leitfähigkeit oder die elektronische Wärmeleitfähigkeit. Über thermodynamische Beziehungen (s.u.) können die thermoelektrischen Transporteigenschaften eines Leiters wechselseitig berechnet werden.

2.2 Seebeck-Effekt

Neben elektr. oder magn. Feldern können in einem Leiter auch Temperatur- oder Konzentrationsgradienten seiner Ladungsträger elektr. Ströme verursachen. Der Seebeck-Effekt hat seine Ursache im Temperaturgradienten. Aufgrund des Temperaturgefälles haben die beweglichen Ladungsträger an verschiedenen Stellen eines Leiters im Mittel verschiedene kinetische Energien bzw. Geschwindigkeiten. Es resultieren ein diese Unterschiede ausgleichender elektrischer Strom (Thermostrom) sowie Raumladungen, die ein elektr. Potenzial φ (s. Versuch C17, Kraftwirkungen elektr. Ladungen) und ein zum Temperaturgradienten ∇T proportionales inneres elektr. Feld \underline{E} erzeugen:

$$\underline{E} = - \nabla\varphi = S \nabla T \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor S ist die *Thermokraft* des Leiters. Die Thermospannung $U_{1,2}$ eines Leiters mit den Temperaturen T_1 und T_2 an seinen Enden x_1 und x_2 erhält man durch Integration von \underline{E} längs des Leiters:

$$U_{1,2} = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = - \int_{x_2}^{x_1} E dx = \int_{x_1}^{x_2} S \frac{dT}{dx} dx = \int_{T_1}^{T_2} S dT \quad (2)$$

Da bei der Messung der Thermospannung Drähte an den Enden eines Leiters angeschlossen werden, die im entgegen gerichteten Temperaturgefälle ebenfalls eine Thermospannung erzeugen (s. Abb.1b), bestimmt man immer die Thermospannung U_{AB} eines Thermopaars AB als Differenz der einzelnen Thermospannungen:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_{T_1}^{T_2} (S_A - S_B) dT \quad (3)$$

$$\text{bzw.} \quad S_{AB} = \frac{dU_{AB}}{dT} = S_A - S_B \quad (4)$$

Die Thermokraft S_{AB} des Thermopaars AB erhält man aus der Ableitung der Thermospannung U_{AB} nach der Temperatur. Sie ist gleich der Differenz der

(absoluten) Thermokräfte S_A und S_B der einzelnen Leiter. Gln. (3) u. (4) besagen zum einen, dass die Thermospannung eines Thermoelements nicht vom Verlauf der Temperatur im Leitermaterial sondern nur von den Temperaturen der Kontaktstellen abhängt. Zum anderen besagen sie, dass in einem Stromkreis aus nur einem (homogenen) Leitermaterial die Thermospannung verschwindet, also nur die Thermospannung bzw. Thermokraft eines Stromkreises aus (mindestens) zwei verschiedenen Leitern direkt messbar ist. Die Thermokraft eines einzelnen Leiters ist jedoch eine reale Größe. Sie kann bei tiefer Temperatur mit einem Thermoelement bestimmt werden, bei dem der andere Leiter supraleitend ist, da in Supraleitern S verschwindet. Die Thermokraft eines einzelnen Leiters kann auch über den Thomson-Effekt bestimmt werden (s.u.). Auf solchen Messungen beruht z.B. die Bestimmung der Thermokraft von Blei als Vergleichsstandard für S von tiefen Temperaturen bis hinauf zu Raumtemperatur.

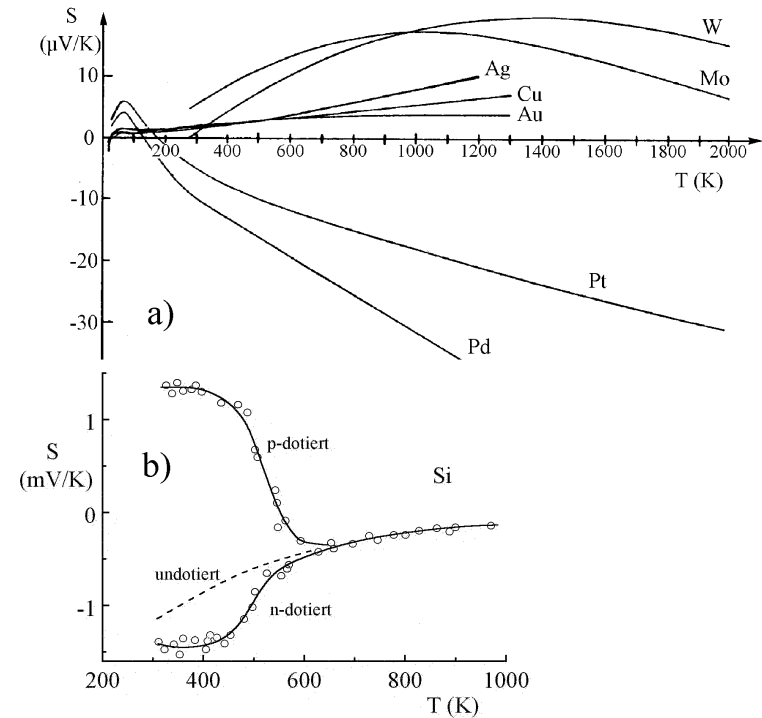


Abb.2: Thermokraft $S(T)$: a) für verschiedene Edel- u. Übergangsmetalle, b) für n- und p-dotiertes Silizium.

Abb. 2 zeigt die Thermokraft als Funktion der Temperatur für einige Übergangs- und Edelmetalle sowie für n- und p-dotiertes Si (s.a. Versuch C1, Elektr. Widerstand von Metallen u. Halbleitern). S hat für Metalle bei mittleren Temperaturen die Größenordnung von 10^{-6} V/K bis einige 10^{-5} V/K. Bei Halbleitern wie Si ist S wesentlich größer (mV/K). Das Vorzeichen von S hängt hier zudem noch von der Art der Dotierung ab, da die Bewegung der Elektronen und Löcher (Defektelektronen) entgegengesetzt ist. Die ausgeprägte Temperaturabhängigkeit der Thermokraft beruht auf ihrer starken Abhängigkeit von der elektronischen Struktur des Festkörpers. Darüber hinaus wird das (lokale) thermische Gleichgewicht der Leitungselektronen (bzw. Löcher) von thermischen Anregungen des Festkörpers und chem. Verunreinigungen sowie Gitterdefekten infolge mechanischer Beanspruchung beeinflusst. Die Thermokraft eines Leiters ist u.a. deshalb eine theoretisch schwer zu bestimmende Größe; oft stimmt nicht einmal das experimentell bestimmte Vorzeichen von S mit dem theoretisch berechneten überein.

2.2.1 Thermoelemente

Metallische Thermoelemente sind für viele Zwecke ideale Thermometer. Wegen ihrer geringen Masse bzw. Wärmekapazität reagieren sie fast trägheitslos auf Temperaturänderungen. Im einfachsten Fall werden nur zwei Drähte A, B mit unterschiedlichen Thermokräften benutzt (s. Abb. 1b). Einer der Kontakte, durch Verschweißen oder Verlöten der Drähte hergestellt, dient als Temperaturmessstelle, der andere als Vergleichsstelle. Diese wird auf konstanter, bekannter Temperatur gehalten (z.B. auf $T = 0^\circ\text{C}$ durch Eintauchen in Eiswasser). Zur Messung der Thermospannung wird ein Voltmeter mit ausreichend hoher Empfindlichkeit und hohem Innenwiderstand, bei Präzisionsmessungen auch mit genügend großer Nullpunktstabilität benötigt. Zur Vervielfachung der Empfindlichkeit bei der Messung kleinen Temperaturdifferenzen werden z.B. bei Strahlungsmessern, (s. Versuch D8, Temperaturstrahlung) und Peltierelementen (s.u.) mehrere Thermoelemente in Reihe geschaltet (Thermosäule); die Kontakte AB dienen gemeinsam als Sensor, die Kontakte BA gemeinsam als Vergleichsstelle.

Technisch genutzte Thermoelemente zur Temperaturbestimmung (bis hinauf zu etwa 2700°C) haben je nach Anwendung spezielle Schutzfassungen. Ihre Thermodrähte werden in Keramikröhrchen von der Messstelle zur Vergleichsstelle geführt, die auf konstanter Temperatur gehalten wird (s. Abb. 3a). Von dort führen Kupferleitungen zum Messgerät. Da diese Leitungen jeweils die gleichen Temperaturen an ihren Enden haben, treten keine zusätzlichen Thermospannungen auf. Cu hat zudem eine vergleichsweise geringe Thermokraft. Ist es nicht möglich, die Temperatur in der Nähe der Messstelle konstant zu halten, werden die

Thermodrähte (aus Kostengründen) mit speziellen Ausgleichsleitungen verlängert, die in einem beschränkten Temperaturbereich die gleiche Thermospannung liefern wie die Thermodrähte selbst (s. Abb. 3b). Generell muss bei der Thermometrie mittels Thermoelementen beachtet werden, dass zusätzliche Thermospannungen der Thermodrähte oder Zuleitungen durch mechanische Beanspruchung oder durch Temperaturunterschiede der Kontakte am Messgerät vermieden werden.

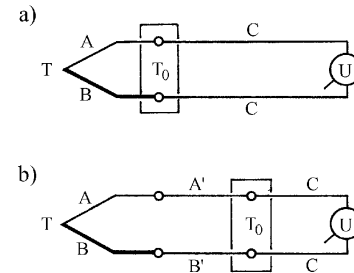


Abb.3:

Meßkreise kommerzieller Thermoelemente:

T: Meßstelle, T_0 : Vergleichsstelle

U: Meßgerät, A,B: Thermodrähte

a) ohne, b) mit Ausgleichsleitungen A', B'

C: Cu-Anschlußdrähte;

Die Wahl des Thermopaars richtet sich nach Messobjekt und Temperaturbereich. Bevorzugt werden Materialien mit großen Thermospannungen entgegengesetzten Vorzeichens, die sich monoton mit der Temperatur ändern (warum?). Abb. 4 zeigt die Thermospannungen bezogen auf 0°C für einige technisch genutzte Thermopaare. Ihre Thermospannungen sind in DIN-Tabellen festgehalten.

Für Thermometriezwecke kann die Thermospannung U eines Thermoelements in einem begrenzten Temperaturbereich durch eine Potenzreihe der Temperaturdifferenz $T - T_0$ seiner Kontaktstellen dargestellt werden:

$$U(T, T_0) = a_1(T - T_0) + a_2(T - T_0)^2 + \dots \quad (5)$$

Die Koeffizienten a_i sind hierbei material- und temperaturspezifische Konstanten; $a_1 (= S(T_0))$, vgl. Gl. (4)) hat bei technisch genutzten (metallischen) Thermoelementen Werte im Bereich zwischen einigen 10^{-6} V/ $^\circ\text{C}$ und einigen 10^{-5} V/ $^\circ\text{C}$. Für kleine Temperaturdifferenzen können in Gl. (5) die Terme mit höheren Potenzen von $T - T_0$ oft vernachlässigt werden. Dies ist messtechnisch von Vorteil, da die Thermospannung eines Thermoelements dann direkt proportional zur Temperaturdifferenz der Kontaktstellen ist.

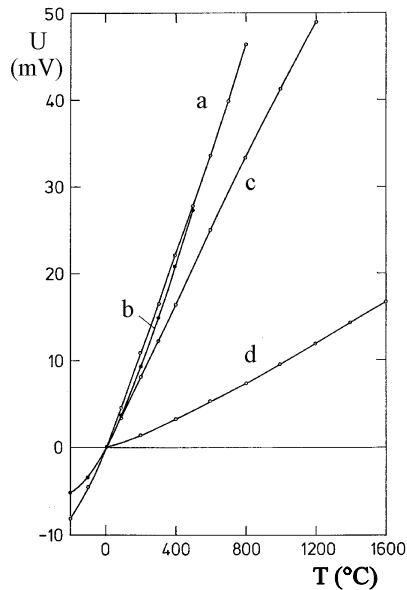


Abb.4:

Thermospannungen einiger kommerzieller Thermoelemente bezogen auf 0 °C:

- a) Fe-Konstantan (Cu₅₀Ni₅₀)
- b) Cu-Konstantan
- c) Ni-Cromel (Ni₉₀Cr₁₀)
- d) Pt-PtRh (Pt₉₀Rh₁₀)

2.3 Peltier- und Thomson-Effekt

Fließt ein elektr. Strom der Stärke I durch einem (homogenen) Leiter (konstanter Temperatur), fließt auch ein zu I proportionaler Wärmestrom $J = \Pi I$ durch den Leiter, welcher seine Richtung mit der des Stroms I umkehrt. Π ist der *Peltierkoeffizient* des Leiters. Fließt der Strom I im Stromkreis eines Thermopaars AB, wird am Übergang des Stromes von Leiter A zu Leiter B die *Peltierwärme*

$$J_P = (\Pi_A - \Pi_B) I = \Pi_{AB} I \quad (6)$$

frei. Die Größen Π_A , Π_B sind die Peltierkoeffizienten der Leiter A, B. Beim Übergang vom Leiter B zum Leiter A wird die Wärmeleistung $\Pi_{BA} I = -J_P$ frei, d.h. der Kontaktstelle die entsprechende Wärme entzogen. Das Vorzeichen von J_P hängt von den Peltierkoeffizienten und der Stromrichtung ab. Die Peltierwärme, Gl. (6), stellt den Überschuss bzw. das Defizit der Wärmeströme an den Kontakten dar.

Haben die Kontaktstellen unterschiedliche Temperaturen T_1 und T_2 , besteht also ein Temperaturgefälle, $\Delta T = T_1 - T_2$ längs der Leiter A und B, ist die an einem Kontakt emittierte Peltierwärme i. Allg. von der an dem anderen absorbierten

verschieden. Die insgesamt emittierte Peltierwärme ist (näherungsweise)

$$\Sigma J_P = (\Pi_{AB}(T_1) - \Pi_{AB}(T_2)) I = \frac{d\Pi_{AB}}{dT} \Delta T I \quad (7)$$

Zusätzlich wird die mit dem Strom ebenfalls reversible *Thomsonwärme* J_T längs jedes Leiters emittiert ($J_T > 0$) oder absorbiert ($J_T < 0$), insgesamt:

$$\Sigma J_T = -(\tau_A - \tau_B)(T_1 - T_2) I = -\tau_{AB} \Delta T I \quad (8)$$

Die Größen τ_A , τ_B sind die *Thomson-Koeffizienten* der Leiter A, B.

Der I. Hauptsatz der Thermodynamik fordert die Erhaltung der Energie: Im stationären Zustand ist die der Stromquelle entnommene elektr. Leistung P_{el} gleich der im Stromkreis des Thermopaars erzeugten Wärmeleistung* :

$$P_{el} = U_{AB} I = S_{AB} \Delta T I = \Sigma (J_P + J_T) = \left(\frac{d\Pi_{AB}}{dT} \Delta T - \tau_{AB} \Delta T \right) I \quad (9)$$

Die elektrische Leistung P_{el} bewirkt also sowohl den Transport von Wärme über ein Temperaturgefälle als auch die Erzeugung von Wärme; der Stromkreis wirkt als *Wärmepumpe* (vgl. Versuch B3, Heißluftmotor). Umgekehrt kann aufgrund des Temperaturgefälles infolge des mit dem Wärmestrom verknüpften Thermostroms dem Stromkreis elektr. Energie, z.B. über einen Lastwiderstand R_L entnommen werden; der Stromkreis arbeitet dann als *Thermogenerator*.

Wird neben der Joule-Wärme* P_J auch der (ohne Thermostrom vorhandene) Wärmestrom J_w infolge der Wärmeleitung über das Temperaturgefälle ΔT (s.u.) vernachlässigt, können die Umwandlungsprozesse von Wärme und elektr. Energie als reversibel betrachtet werden. Der II. Hauptsatz der Thermodynamik besagt dann, dass die Entropie S des Thermokreises sich nicht ändert, d.h. $dS = \Sigma \delta Q/T = 0$ ($\delta Q =$ zugeführte Wärme, $T =$ Kelvintemperatur) bzw.

*) Der elektr. Strom I hat nur das Potenzialgefälle U_{AB} zu überwinden, d.h. $P_{el} = U_{AB} I$. Die infolge des inneren elektr. Widerstandes R_i im Stromkreis auftretende Joule-Wärme $P_J = I^2 R_i$ wird hier vernachlässigt. Sie kann bei entsprechend geringem Strom beliebig klein gegenüber P_{el} gemacht werden.

$$\sum \frac{\delta J}{T} = \left(\frac{\Pi_{AB}(T_1)}{T_1} - \frac{\Pi_{AB}(T_2)}{T_2} - \frac{\tau_{AB}(T_1 - T_2)}{(T_1 + T_2)/2} \right) I = 0 \quad (10)$$

Die Reihenentwicklung von Gl. (10) nach Potenzen des Temperaturgefälles ΔT und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnungen ergibt

$$\tau_{AB} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi_{AB}}{T} \right) \quad (11)$$

Einsetzen von Gl. (11) in Gl. (9) ergibt für den Zusammenhang zwischen dem Peltierkoeffizienten Π und der Thermokraft S eines Leiters die einfache Beziehung

$$\Pi = S T \quad (12)$$

Die Gültigkeit dieser von Thomson gefundenen Relation wurde später durch die Theorie der irreversiblen Thermodynamik (Onsager, 1931) streng begründet. Aus Gln. (11) u. (12) folgt ferner

$$\frac{dS_{AB}}{dT} = \frac{\tau_{AB}}{T} \quad \text{bzw.} \quad S = \int_0^T \frac{\tau}{T} dT \quad (13)$$

Die Thermokraft S eines (chem. homogenen) Leiters lässt sich also aus der im Temperaturgefälle auftretenden Thomsonwärme bestimmen.

2.3.1 Wärmeleitung

Besteht in einer Substanz ein Temperaturgefälle, bewirkt dieses einen Wärmestrom, welcher so gerichtet ist, dass er zum Temperaturausgleich, d.h. zum thermischen Gleichgewicht führt. In festen Körpern wird ein Wärmestrom sowohl durch bewegliche Ladungsträger (unterschiedlicher kinetischer Energie) als auch durch temperaturabhängige Bewegungen der Atome (Gitterschwingungen) ermöglicht. Analog zum Transport elektr. Ladungen im elektrischen Feld (s. Versuch C1, Elektrischer Widerstand von Metallen u. Halbleitern) ist die Wärmestromdichte j_w proportional zum Temperaturgradienten ∇T , der Wärmestrom J_w zwischen Gebieten mit Temperaturen T_1 und T_2 proportional zur Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_2$:

$$j_w = - \lambda \nabla T \quad \text{bzw.} \quad J_w = \Lambda \Delta T \quad (14)$$

λ ist die *Wärmeleitfähigkeit* des Körpers, Λ der von λ und Geometrie Größen abhängige *Wärmeleitwert*.

2.3.2 Peltierelement

Abb. 5 zeigt den typischen Aufbau eines Peltierelements, welches in Kühl- und Heizsystemen, zur Temperaturstabilisierung oder zur Kompensation von Wärmeflüssen verwendet wird. Zwei solcher Elemente werden im vorliegenden Versuch benutzt.

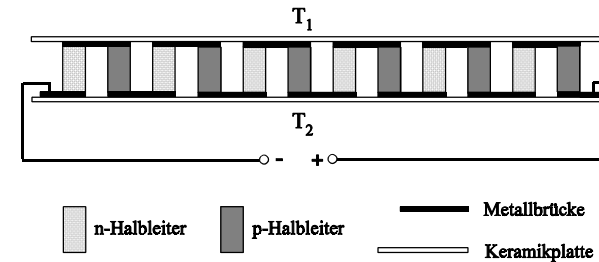


Abb. 5: Schematischer Aufbau eines Peltierelements: Schnitt entlang des Temperaturgefälles

Zwischen zwei Keramikplatten, die in gutem thermischen Kontakt zur jeweiligen zu kühlenden bzw. heizenden Umgebung stehen sollten, befinden sich (thermisch parallel geschaltet) Säulen aus nebeneinander abwechselnd n- und p-leitendem Halbleitermaterial (z. B. entsprechend dotiertes Si oder Bi_2Te_3). Die Säulen sind an den Keramikplatten paarweise über metallische Kontaktbrücken so verbunden, dass sie elektrisch alle in Reihe liegen. Je nach Bauart und Größe sind auf diese Weise zwischen 10 und mehr als 100 Thermopaare zusammengeschaltet. Die Materialien sind so gewählt und dimensioniert, dass die Anordnung sowohl einen möglichst geringen elektr. Innenwiderstand R_i besitzt, um die Erwärmung des Elements infolge der Joule-Wärme zu minimieren, als auch einen möglichst großen Wärmewiderstand $R_w = 1/\Lambda$, um den das Temperaturgefälle vermindern den Wärmestrom gering zu halten. Die Fläche der Keramikplatten beträgt typisch einige cm^2 , ihr Abstand weniger als 1 cm. Bei Stromstärken von bis

zu 60 A kann die Pumpleistung mehr als 100 W betragen; das maximale Temperaturgefälle ΔT beträgt ca. 60°C, die Maximaltemperatur materialabhängig ca. 70 °C.

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie durch elektrisches Beheizen einer Seite der Peltierelemente die Thermospannung U und den Wärmestrom J_w der Anordnung im Temperaturgefälle ΔT zwischen ca. 3 und max. 40°C. Berechnen Sie in der Auswertung die Thermokraft S , den Peltierkoeffizienten Π und den Wärmeleitwert Λ der Anordnung.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die vom Thermokreis bei maximaler Heizleistung abgegebene elektrische Nutzleistung in Abhängigkeit vom Lastwiderstand R_L . Bestimmen Sie aus den Messergebnissen die Wirkungsgrade des Thermogenerators.
- 3. Aufgabe:** Betreiben Sie die Peltierelemente als Wärmepumpe. Bestimmen Sie das Temperaturgefälle ΔT über den Elementen als Funktion der Stromstärke $I_p < 0$ sowie $I_p > 0$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der ersten Aufgabe und dem theoretisch berechneten.

4. Versuchsaufbau

Abb. 6 zeigt den Versuchsaufbau schematisch. Zwei Peltierelemente Pe befinden sich an ihren Unterseiten im thermischen Kontakt mit einem Aluminiumkörper K der Temperatur T_2 , an ihren Oberseiten mit einer Kupferplatte H der Temperatur T_1 . Der Aluminiumkörper wird mit Hilfe einer Pumpe P von Eiswasser durchflossen und auf nahezu 0°C gekühlt, die Kupferplatte von zwei elektr. Filmwiderständen R_H (je ca. 44 Ω) beheizt. Die Anordnung gestattet es - unabhängig vom Betrieb der Peltierelemente - ein bestimmtes Temperaturgefälle $\Delta T = T_1 - T_2$ zwischen ihren Ober- und Unterseiten einzustellen. Die Temperaturen T_1 u. T_2 werden mit zwei NiCr-Ni-Thermoelementen bestimmt und vom Thermometer T digital angezeigt. Die aufgrund der Temperaturdifferenz ΔT an den Peltierelementen entstehende Thermospannung U wird mit einem Digitalvoltmeter gemessen. Der zeitliche Verlauf $U(t)$ kann mittels eines Monitors analog verfolgt werden. Dieser erleichtert die Beurteilung, wann sich nach Änderung von Heiz- oder Kühlleistung ein neues stationäres

Temperaturgleichgewicht eingestellt hat. Die für die Heizung der Filmwiderstände sowie den Betrieb der Peltierelemente benötigten Gleichspannungen u. -ströme U_H, I_H bzw. U_p, I_p werden von einem U- und I-regelbaren Netzgerät geliefert, mit dem auch die Wasserpumpe betrieben wird. Im Betrieb der Anordnung als Thermogenerator kann den Peltierelementen durch Anschluss eines Lastwiderstands R_L elektr. Leistung entnommen werden.

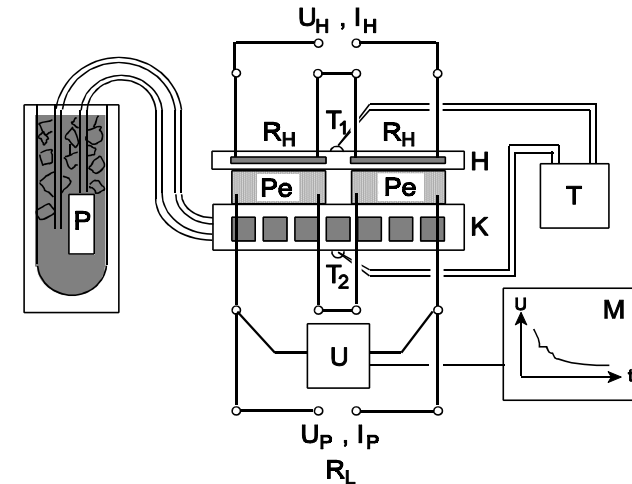


Abb. 6:

Versuchsaufbau schematisch: Peltierelemente Pe zwischen Kühlkörper K mit Wasserpumpe P und Heizplatte H mit Filmheizern R_H ; Thermoelemente T_1 u. T_2 mit digitaler Temperaturanzeige T ; Digitalvoltmeter U mit Monitor M ; Anschluss U_H, I_H zur Filmheizung; Anschluss U_p, I_p zum Betrieb der Peltierelemente bzw. R_L zur Leistungsentnahme.

4.1 Wirkungsgrade

4.1.1 Thermogenerator

Abb. 7 zeigt das Energiefluss- bzw Leistungsschema des Versuchsaufbaus als Thermogenerator (vergl. Versuch B3, Heißluftmotor). Die elektrische Leistung $P_H = U_H I_H$, mit der die Kupferplatte geheizt wird, stellt den Wärmeinput dar, die an einen externen Lastwiderstand R_L abgegebene elektr. Leistung $P_L = I^2 R_L$ die aus

dem Thermostrom I durch die Peltierelemente erzeugte elektr. Nutzleistung. Infolge der Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_2$ fließt aufgrund der Wärmeleitung der (stromlosen) Peltierelemente der Wärmestrom $J_w = \Lambda (T_1 - T_2)$ von der Heizplatte zum Kühlkörper ($T_1 > T_2$). Ein weiterer Wärmestrom $J_U = \Lambda_U (T_1 - T_U)$ wird vom Heizkörper an die Umgebung (T_U) abgegeben oder von ihr aufgenommen. Die aufgrund des Innenwiderstands R_i des Thermokreises erzeugte Joule-Wärme P_J fließt je zur Hälfte an die Heizplatte und den Kühlkörper ab. Die Kühlleistung P_K wird über den Wasserkreislauf abgeführt.

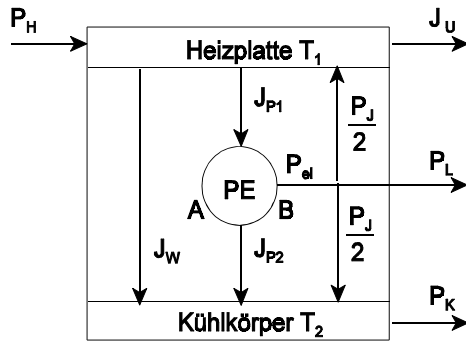


Abb. 7:
Energieflussschema
des Versuchsaufbaus
als Thermogenerator

Die Thermokraft S der verwendeten Peltierelemente ist im hier zu untersuchenden Temperaturbereich nahezu eine Konstante. Dies bedeutet mit Gln. (5), (12) u. (13): $U = S \Delta T$, $\Pi = S T$, $\tau \approx 0$ (d.h. der Thomson-Effekt verschwindet).

Der vom Thermokreis an den Kontakten der Temperatur T_1 und T_2 absorbierte bzw. emittierte Wärmestrom J_{P1} bzw. J_{P2} ist mit Gln. (6) u. (12) :

$$J_{P1,2} = \Pi(T_{1,2}) I = \frac{S T_{1,2} U}{R_L + R_i} = \frac{S^2 T_{1,2} \Delta T}{R_L + R_i} \quad (15)$$

Hierbei ist I der infolge der Thermospannung U fließende Strom. Die Differenz der Wärmeströme J_{P1} u. J_{P2} ist die vom Thermokreis erzeugte elektr. Leistung P_{el} :

$$P_{el} = \frac{U^2}{R_L + R_i} = \frac{S^2 \Delta T^2}{R_L + R_i} \quad (16)$$

Die vom Thermokreis gelieferte Nutzleistung P_L sowie die für $R_L = R_i$ - auf P_{el} bezogen - maximale Nutzleistung P_L^{max} ist

$$P_L = I^2 R_L = \frac{S^2 \Delta T^2 R_L}{(R_L + R_i)^2} \quad \text{bzw.} \quad P_L^{max} = \frac{S^2 \Delta T^2}{4 R_i} \quad (17)$$

Der *Gesamtwirkungsgrad* des Thermogenerators $\eta_{ges} = P_L / P_H$ (Nutzleistung / Wärmeinput) lässt sich als Produkt von *thermischem Wirkungsgrad* $\eta_{th} = J_{P1} / P_H$, *thermoelektr. Wirkungsgrad* $\eta_P = P_{el} / J_{P1}$ und *elektr. Wirkungsgrad* $\eta_{el} = P_L / P_{el}$ darstellen:

$$\eta_{ges} = \frac{P_L}{P_H} = \eta_{th} \eta_P \eta_{el} \quad (18)$$

Im stationären Zustand ist $P_H \approx J_{P1} + J_w$. Die Wärme $P_J/2$ kann bei der geringen Leistung P_{el} des Thermogenerators vernachlässigt werden, ebenso J_U . Damit wird:

$$\eta_{th} = \frac{1}{1 + \frac{\Lambda(R_L + R_i)}{S^2 T_1}}, \quad \eta_P = \frac{\Delta T}{T_1}, \quad \eta_{el} = \frac{R_L}{R_L + R_i} \quad (19)$$

$$\eta_{ges}(R_L = R_i) = \frac{\Delta T}{2 \left(T_1 + \frac{2 \Lambda R_i}{S^2} \right)} \approx \eta_{ges}^{max}$$

4.1.2 Wärmepumpe

Abb. 8 zeigt das Leistungsschema des Aufbaus als Wärmepumpe. In der Nutzung - Heizen - (s. Abb. 8a: $T_1 > T_2$, $J_w > 0$) ist der in den Thermokreis eingepreßte Strom $I_p < 0$ (definiert), ebenso die Wärmeströme $J_{P1,2} < 0$. Die Leistung $-P_H$ ist die nutzbare Heizleistung. In der Nutzung - Kühlen - (s. Abb. 8b: $T_1 < T_2$, $J_w < 0$) ist $I_p > 0$, $J_{P1,2} > 0$ und P_H die nutzbare Kühlleistung. In beiden Fällen ist die elektrische Leistung $P_p = U_p I_p$ der jeweils nötige Leistungsinput.

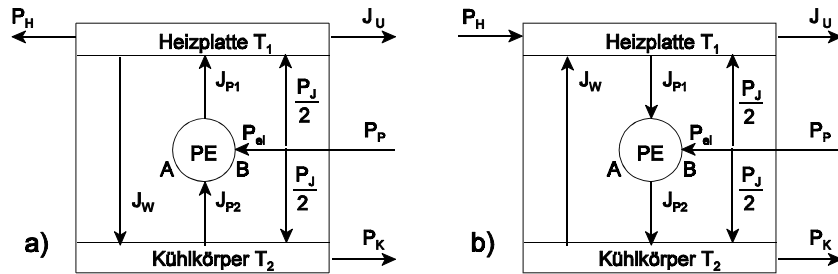


Abb. 8: Leistungsschema des Versuchsaufbaus als Wärmepumpe:
a) Heizplatte geheizt, $T_1 > T_2$, b) Heizplatte gekühlt, $T_1 < T_2$

Den „Wirkungsgrad“ der Wärmepumpe beschreibt die *Leistungszahl* $\epsilon = \pm P_H / P_P$ (Nutzleistung/Leistungsinput). Wird J_U vernachlässigt, fordert im stationären Zustand die Energieerhaltung:

$$P_H = J_{P1} + J_W - \frac{P_J}{2} = S T_1 I_P + \Lambda \Delta T - \frac{I_P^2 R_i}{2} \quad (20)$$

sowie $P_P = P_J - J_{P1} + J_{P2} = I_P^2 R_i - S \Delta T I_P$

Da der Wärmestrom J_{P1} linear mit dem Strom I_P , der beim Kühlen auftretende Wärmeverlust infolge der Joule-Wärme jedoch quadratisch mit I_P anwächst, gibt es eine *optimale Stromstärke* I_P^{opt} , bei der die Kühlleistung P_H maximal wird. Aus $dP_H/dI_P = 0$ folgt mit Gln. (20):

$$I_P^{opt} = \frac{S T_1}{R_i}, \quad P_H^{opt} = \frac{S^2 T_1^2}{2 R_i} + \Lambda \Delta T \quad (21)$$

Im Spezialfall $T_1 = T_2$, $\Delta T = 0$ ist damit die Leistungszahl ϵ_0 bzw. die *optimale Leistungszahl* ϵ_0^{opt} zum Kühlen:

$$\epsilon_0 = \frac{I_P^{opt}}{I_P} - \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_0^{opt} = \frac{1}{2} \quad (22)$$

Aus Gl. (22) und Abb. 9 ist zu erkennen, dass für geringe Stromstärken $I_P \ll I_P^{opt}$ die Leistungszahl ϵ_0 zwar große Werte annehmen kann, dann jedoch die Pumpleistung ($P_H \approx J_{P1}$) sehr gering ist.

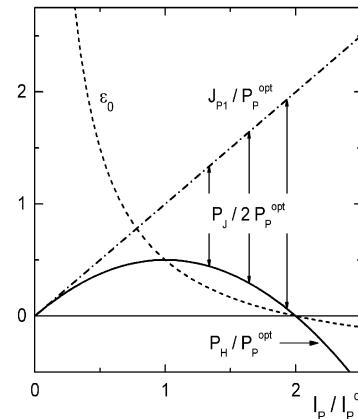


Abb. 9:
Wärmepumpe bei $\Delta T = 0$:
Wärmestrom J_{P1} ,
Verlustleistung $P_J/2$,
resultierende Kühlleistung P_H
und Leistungszahl ϵ_0 als
Funktion der Stromstärke I_P
(J, P u. I in reduz. Einheiten)

Aus der Bedingung $P_H(I_P) = 0$ kann mit Gln. (20) das beim Kühlen oder Heizen jeweils erreichbare Temperaturgefälle ΔT der Wärmepumpe berechnet werden:

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{1}{2} R_i I_P - S T_2\right) I_P}{\Lambda + S I_P} \quad (23)$$

5. Versuchsdurchführung

Vor Beginn der Messungen ist das Dewargefäß nach Einlegen der Pumpe mit Eis und Wasser zu füllen. Nach anschluss der Pumpe an das Gleichstromnetzgerät (3 - 6 V) ist mit dem Umpumpen des Kühlwassers zu beginnen. Warten Sie, bis die Temperaturen T_1 und T_2 ihren Tiefstwert erreicht haben und zeitlich nahezu konstant sind.

5.1 Heizversuch

Erhöhen Sie bei weiterhin gekühlter Unterseite der Peltierelemente (T_2) die Temperatur der Oberseite T_1 durch elektrisches Beheizen der in Reihe geschalteten Filmwiderstände stufenweise. Ziel dieses Versuchsteils ist, die Thermospannung aufgrund der Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseiten der Peltierelemente sowie den Wärmestrom durch sie lediglich infolge der Wärmeleitung (ohne elektr. Stromfluss durch die Elemente) zu bestimmen. Erst im folgenden Versuchsteil 5.2 werden durch zunehmende elektrische Belastung durch einen Lastwiderstand R_L die Parameter der Peltierelemente als Thermogenerator bestimmt.

Schließen Sie die Filmwiderstände an das Gleichstromnetzgerät (max. 40V; 3,2A) an. Schalten Sie zur genaueren Bestimmung der elektr. Heizleistung P_H in den Heizstromkreis ein mA-Meter (I_H); für die Spannungsmessung (U_H) genügt die Anzeige des Netzgerätes. Erhöhen Sie U_H in Stufen von ca. 5 V von 0 bis 40 V. Notieren Sie bei jeder Messung die Heizdaten I_H , U_H , die Temperaturen T_1 , T_2 und die Thermospannung U der Peltierelemente. Warten Sie nach jeder Änderung der Heizparameter, bis sich erneut ein stationäres thermisches Gleichgewicht eingestellt hat, d.h. die Thermospannung U zeitlich konstant ist. Das thermische Gleichgewicht sollte sich innerhalb von 3 - 4 min nach Ändern der Betriebsdaten einstellen. Dies kann anhand der Anzeige $U(t)$ des angeschlossenen Digitalmonitors (Digitales Oszilloskop) verfolgt werden. Lassen Sie sich gegebenenfalls durch den Betreuer in die Bedienung des Gerätes einweisen.

5.2 Thermogenerator

Nach Erreichen der höchsten Heizleistung (T_1 ca. 40°C) werden bei konstanter max. Heizleistung P_H ($U_H \approx 40V$; $I_H \approx 0,5A$) die Betriebsdaten der Peltierelemente (U_H , I_H , T_1 , T_2 , U , R_L) als Thermogenerator bestimmt. Dazu wird der Thermokreis schrittweise mit zunehmender Last, d.h. mit abnehmendem Lastwiderstand R_L überbrückt. Führen Sie die Messungen wie zuvor ohne Last nun mit folgenden Lastwiderständen durch:

$$R_L = 470; 100; 47; 14; 10; 8; 6; 4; 3; 2; 1 \Omega.$$

Warten Sie jeweils das thermische Gleichgewicht ab (U zeitlich konstant). Beachten Sie, dass die zu messende Spannung U hier nicht die Thermospannung sondern lediglich den Spannungsabfall über dem Lastwiderstand R_L infolge des Thermostroms angibt.

5.3 Wärmepumpe

Schalten Sie die Heizung U_H , I_H ab, nehmen Sie den Lastwiderstand aus dem Thermokreis und verbinden Sie den Kreis über das Amperemeter mit der Gleichstromquelle U_p , I_p ($I_p < 0$: + an schwarze, - an rote äußere Buchse: *Heizen*). Der Anschluss ist auf Stromregelung $I_p = 1,2 A$ einzustellen. Dazu muss zunächst der Strom auf Null, dann die Spannung hinreichend hoch und anschließend der Strom auf den Sollwert eingestellt werden, so dass die rote Lampe ständig aufleuchtet (= Stromregelung aktiv). Füllen Sie gegebenenfalls Eis in das Dewargefäß nach.

Warten Sie das sich neu einstellende thermische Gleichgewicht ab (U_p zeitlich konstant) und notieren Sie die Messwerte I_p , U_p , T_1 , T_2 . Die Messungen sind nach Reduzieren des Stroms $|I_p|$ in Schritten von ca. 0,3 A zu wiederholen. Nach dem Nulldurchgang ($I_p = 0$, $T_1 \approx T_2$) ist die Stromquelle auf *Kühlen* umzupolen und die Messungen sind nach schrittweiser Erhöhung von I_p um ca. 0,5 A bis zu $I_p = 3 A$ fortzuführen, anschließend ist die Stromquelle abzuschalten.

6. Versuchsauswertung

6.1 Heizversuch

Tragen Sie die im thermischen Gleichgewicht ermittelte Thermospannung U und Heizleistung P_H jeweils über der Temperaturdifferenz ΔT auf und bestimmen Sie aus den Steigungen der Ausgleichsgeraden die Thermokraft S sowie den Peltierkoeffizienten Π und den Wärmeleitwert Λ der Anordnung.

6.2 Thermogenerator

Bestimmen Sie aus den im Versuchsteil 5.2 ermittelten Messwerten für jeden Lastwiderstand R_L die Temperaturdifferenz ΔT , die mittlere Temperatur T_m und die elektr. Nutzleistung $P_L = U^2/R_L$.

Der Innenwiderstand R_i der Peltierelemente hat den temperaturabhängigen Wert

$$R_i(T_m) = (2,477 + 0,015 T_m / ^\circ C) \text{ Ohm.}$$

Bestimmen Sie den experimentellen Wirkungsgrad $\eta_{\text{exp}} = P_L/P_H$ und tragen Sie diesen über $^{10}\log(R_L/R_i)$ auf (Log-Papier oder η_{exp} über $\lg(R_L/R_i)$).

Berechnen Sie mit Gl. (19) und den Ergebnissen für S und Λ für die gleichen R_L - u. R_i -Werte die Einzelwirkungsgrade und tragen sie zum Vergleich mit dem experimentellen Ergebnis das Produkt $\eta_{\text{th}}\eta_p$ sowie η_{ges} in das Diagramm ein.

Diskutieren Sie Größe und Verlauf von η_{ges} (R_L/R_i), insbesondere die Lage des Maximums.

6.3 Wärmepumpe

Tragen sie die im Versuchsteil 5.3 ermittelte Temperaturkennlinie $\Delta T(I_p)$ auf. Bestimmen Sie aus den Messwerten und dem in 6.1 bestimmten Wert für Λ mittels Gl. (20) bzw. (23) die Mittelwerte für die Thermokräfte S^+ und S^- jeweils getrennt für positive und negative Ströme I_p . Vergleichen Sie S^+ u. S^- mit dem in 6.1 ermittelten Wert S . Berechnen Sie mit S^+ u. S^- für einige I_p -Werte die $\Delta T(I_p)$ -Kennlinie und tragen Sie diese zum Vergleich mit der experimentell bestimmten auf. Diskutieren Sie mögliche Unterschiede zwischen S^+ , S^- u. S insbesondere hinsichtlich systematischer Messfehler und Annahmen zur theoretischen Beschreibung der Messergebnisse.

7. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was ist der *Seebeck*-, was der *Peltier*- und was der *Thomson-Effekt*? Erläutern sie diese Effekte anhand der jeweiligen Randbedingungen in elektr. Leitern (Temperatur, Strom, ...).
- 2) Was ist die physikalische Ursache für das Auftreten einer *Thermospannung* in einem elektr. Leiter?
- 3) Was ist die *Thermokraft*? In welchem Zusammenhang steht sie mit der Thermospannung?
- 4) Warum benötigt man zur Messung von Thermospannungen Drahtpaare aus verschiedenem Material?
- 5) Welche Eigenschaften sollte ein zur Thermometrie benutztes Thermo-element besitzen?
- 6) Was ist bei der Messung von Temperaturen mit Thermoelementen zur Vermeidung bzw. Verringerung von Messfehlern zu beachten?
- 7) In welchem Zusammenhang stehen Seebeck- und Peltiereffekt, in welchem Thermokraft $S_{A,B}$ und Peltierkoeffizient $\Pi_{A,B}$ eines Leiterkreises A, B?
- 8) Welche physikalischen Eigenschaften sollte ein Material zur Nutzung als Peltierelement besitzen?
- 9) Welche physikalische Größe eines Festkörpers beschreibt seine Fähigkeit, Wärme zu leiten?

- 10) Was ist die Ursache von Wärmeströmen?
- 11) Beschreiben Sie die Funktionsweise eines elektrischen Thermogenerators! Wie ist sein Wirkungsgrad definiert?
- 12) Beschreiben Sie das Prinzip einer thermoelektrischen Wärmepumpe! Was beschreibt die Leistungszahl einer Wärmepumpe?

Versuch C 17: Kraftwirkung elektrischer Ladungen (Coulomb-Gesetz)

1. Literatur: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. II: Elektrizität u. Magnetismus
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik
Pohl, Einführung in die Physik, Bd.2: Elektrizitätslehre
Westphal, Physik

Stichworte: elektr. Ladung, Coulomb-Gesetz, elektr. Feld, Potenzial, Spannung; Gaußscher Satz; Kapazität: Plattenkondensator, Kugel; Influenz, Bildkraft

2. Grundlagen

2.1 Elektrische Ladungen, Coulomb-Gesetz

Elektrische Ladungen treten in der Elektrostatik durch ihre gegenseitige Kraftwirkung in Erscheinung: Werden bestimmte nichtmetallische Körper aneinander gerieben (z.B. Kunststoff und Wolle) und anschließend getrennt, ziehen sich diese gegenseitig an. Zwei gleiche auf diese Weise behandelte Körper (z.B. zwei mit Wolle geriebene Kunststoffstäbe) stoßen sich dagegen ab. Diese seit Jahrtausenden bekannte Erscheinung der elektrostatischen Kraftwirkung beruht auf der Existenz zweier verschiedener *elektrischer Ladungsarten* der Materie, die als positiv und negativ bezeichnet werden. Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an. Die elektr. Ladung ist in der Summe der negativen u. positiven Ladungen eine Erhaltungsgröße, eine Ladungsart kann weder allein erzeugt noch vernichtet werden. Durch räumliche Trennung von positiven u. negativen Ladungen (wie z.B. durch Reibung) werden ihre Kraftwirkungen makroskopisch beobachtbar. Elektrisch neutrale Körper tragen die gleiche Menge positiver wie negativer Ladungen, die sich in der Summe ihrer Kraftwirkungen makroskopisch aufheben.

Heute wissen wir, dass elektr. Ladungen als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e ($e = 1,602 \times 10^{-19}$ C (Coulomb)) auftreten und dass Protonen bzw. Elektronen Träger der positiven bzw. negativen Elementarladung sind. Die Kraftwirkungen der Elementarladungen sind für die Struktur aller Materie auf atomarer und molekularer Größenskala entscheidend und bewirken den Zusammenhalt von Festkörpern und Flüssigkeiten.

C. Coulomb (1785) war der erste, der die zwischen zwei elektr. geladenen Körpern

wirkende Kraft, die nach ihm benannte *Coulomb-Kraft*, quantitativ untersuchte. Er bestimmte mit einer Torsionswaage die Kraft, welche zwei elektr. geladene Kugeln aufeinander ausüben. Die Ergebnisse seiner Messungen sind im *Coulomb-Gesetz*, Gl.(1), zusammengefasst, welches besagt, dass die zwischen zwei Ladungen Q_1 u. Q_2 (in Richtung der Verbindungslinie) wirkende Kraft F proportional zum Produkt $Q_1 Q_2$ und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r der Ladungsschwerpunkte ist.

$$F = a \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \begin{array}{l} F < 0 : \text{anziehend} \\ F > 0 : \text{abstoßend} \end{array} \quad (1)$$

Streng genommen gilt das Coulomb-Gesetz nur für "Punktladungen" (Ladungen ohne räumliche Ausdehnung), d.h. in der Praxis um so besser, je geringer die Größe der geladenen Körper oder Teilchen im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstand r ist. Die Proportionalitätskonstante a in Gl.(1) ist durch die Einheit der Ladungsmenge festgelegt. Im SI-System ist die Ladungseinheit das Coulomb (C), welches durch die Einheiten der Stromstärke und Zeit definiert wird ($1 \text{ C} = 1 \text{ As}$). Der Faktor 4π ist ein zweckmäßiger Geometriefaktor, $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$ die *Influenzkonstante* oder *elektr. Feldkonstante*. Das Coulomb-Gesetz gilt in der Form von Gl. (1) für Punktladungen im Vakuum, mit geringer Abweichung der Proportionalitätskonstanten auch in Luft.

Wirken mehrere Ladungen Q_i auf eine Ladung Q , so ist die resultierende Kraft gleich der vektoriellen Summe der durch Gl. (1) beschriebenen Einzelkräfte (Superpositionsprinzip).

Das Coulomb-Gesetz soll im vorliegenden Versuch durch die Messung der zwischen zwei geladenen Kugeln wirkenden Kraft experimentell bestätigt werden. Die für den Versuch wichtigen physikalischen Größen und Gesetze der Elektrostatik werden im folgenden kurz erläutert.

2.2 Elektrisches Feld, Gaußscher Satz, elektrisches Potenzial

Die Eigenschaft einer elektr. Ladung Q , auf eine weitere Ladung q eine Kraft auszuüben, wird durch ein elektrostatisches Feld beschrieben, welches jede ruhende elektr. Ladung umgibt. Die Feldstärke \underline{E} ist ein Vektor, der für eine positive Ladung Q von ihr wegweisend in jedem Punkt des Raumes den Quotienten aus der Kraft \underline{F} und der (Probe)-Ladung q für den Grenzfall $q \rightarrow 0$ darstellt. Für eine Punktladung Q folgt mit Gl. (1):

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2)$$

Das elektrische Feld mehrerer Punktladungen ist wie die wirkende Kraft die vektorielle Summe aus den Feldstärken der einzelnen Ladungen. Bei räumlich oder flächenhaft verteilten Ladungen ist die elektr. Feldstärke ein entsprechendes Volumen- oder Flächenintegral. Das elektrostatische Feld kann bildlich durch *Feldlinien* dargestellt werden, die von positiven Ladungen (Quellen) ausgehen und in negativen Ladungen (Senken) enden. Der Vektor \underline{E} zeigt dabei in Richtung der Feldlinien, seine Größe variiert wie ihr gegenseitiger Abstand (s. Abb. 1).

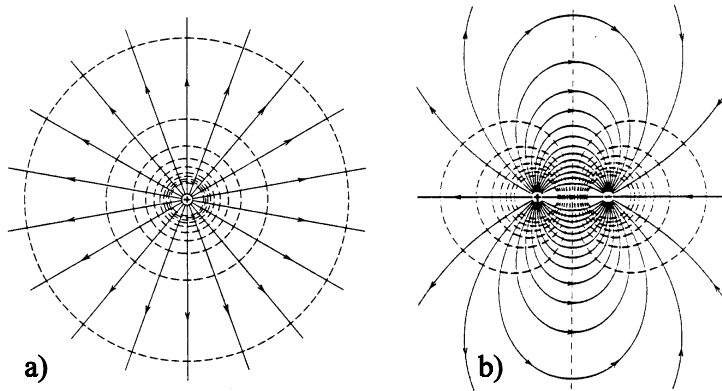


Abb.1: Elektr. Feldlinien (—) und Schnittlinien durch Äquipotenzialflächen (- -) für a) positive Punktladung, b) positive und negative Punktladung (elektr. Dipol)

Da das elektrostatische Feld keine Wirbel (in sich geschlossene Feldlinien) und immer Quellen und Senken in Ladungen hat, ist der von punktförmigen oder räumlich verteilten Ladungen ausgehende *elektr. Fluss* Φ durch jede in sich geschlossene Fläche S unabhängig von der Form der Fläche und nur abhängig von der von ihr umschlossenen Gesamtladung Q :

$$\Phi = \oint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Dies ist der *Kraftflusssatz* oder *Gaußsche Satz* der Elektrostatik. Aus Gl.(3) folgt speziell für eine konzentrisch um eine Punktladung Q gelegte Kugelfläche mit

Radius r :

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Das Coulomb-Gesetz wird also durch den Gaußschen Satz bestätigt bzw. lässt sich aus ihm ableiten.

Wird eine Ladung q im elektrostatischen Feld einer Ladung Q vom Ort \underline{r}_1 nach \underline{r}_2 bewegt, so wird an ihr infolge der Kraftwirkung eine Arbeit geleistet, die sich in der Veränderung der potentiellen Energie der Ladung q im Feld \underline{E} um

$$\Delta W = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E} \cdot d\underline{r} = -q \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E} \cdot d\underline{r} = -q U(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \quad (5)$$

äußert. Die Größe $U(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$ ist die *elektr. Spannung* U . Sie ist eine Eigenschaft des elektr. Feldes und vom Wege zwischen \underline{r}_1 und \underline{r}_2 unabhängig. U lässt sich deshalb als Differenz eines *elektr. Potentials* $\varphi(\underline{r})$ darstellen: $U(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \varphi(\underline{r}_1) - \varphi(\underline{r}_2)$. Das elektr. Potential $\varphi(\underline{r})$ erhält man aus Gl.(5) mit $\underline{r}_2 = \underline{r}$ und $\underline{r}_1 \rightarrow \infty$ und der Festlegung $\varphi(\infty) = 0$. Für das elektr. Potential einer Punktladung Q folgt damit aus Gln.(2) u. (5):

$$\varphi(\underline{r}) = - \int_{\infty}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6)$$

Flächen mit jeweils konstantem Potential, sog. *Äquipotenzialflächen*, sind alle die Orte in der Umgebung einer Ladung, zwischen denen eine Probeladung ohne Arbeitsleistung bewegt werden kann. Auf ihnen steht der Vektor der elektr. Feldstärke jeweils senkrecht (s. Abb. 1). Kennt man das Potential einer Ladungsverteilung, kann mit der Beziehung $\underline{E} = - \text{grad } \varphi$ die elektr. Feldstärke berechnet werden und umgekehrt aus \underline{E} das Potential φ .

2.3 Metallische Leiter, Kapazität

Wird ein Metall einem elektrostatischen Feld ausgesetzt oder durch Berührung mit einem geladenen Metall ebenfalls elektrisch geladen, werden sich seine Elektronen aufgrund ihrer leichten Beweglichkeit so lange verlagern, bis sich im

Gleichgewicht die Kräfte auf sie aufheben, d.h. das elektr. Potenzial konstant ist und das elektr. Feld überall im Inneren des Metalls verschwindet. Dann ist jedoch im Inneren eines Metalls auch der elektr. Fluss durch jede geschlossene Fläche und die darin liegende elektr. Ladung Null. Mit Versuchen, im Inneren geladener Metallkörper Ladungen nachzuweisen, ist die Gültigkeit des Gaußschen Satzes und des Coulomb-Gesetzes mit viel größerer Genauigkeit nachgewiesen worden, als es durch Coulombs Experimente möglich war.

Ein elektr. geladenes Metall hat also (getrennte) Ladungen nur an seiner äußeren Oberfläche, die zugleich Äquipotenzialfläche ist. Auf diesem Prinzip beruht der *Faraday-Becher*: Führt man einen geladenen Körper in einen Metallbecher und berührt ihn damit von innen, so fließen die Ladungen an die äußere Oberfläche des Bechers ab, der Körper wird entladen.

Befinden sich zwei entgegengesetzt geladene Leiter, z.B. zwei Metallkugeln mit den Ladungen $+Q$ u. $-Q$ im sonst freien Raum gegenüber, so besteht ein elektr. Feld und damit eine elektr. Spannung U zwischen ihnen. Um eine Probeladung q ($q \ll Q$) von einer Kugel zur anderen zu transportieren, muss die Arbeit qU geleistet werden. Erhöht man die Ladungen Q , vergrößert sich proportional dazu auch die Spannung zwischen den Kugeln. Das Verhältnis von Ladung zu Spannung einer Anordnung entgegengesetzt geladener Leiter ist die *Kapazität* $C = Q/U$. (Einheit der Kapazität: 1 Farad, $1 F = 1 C/V = 1 As/V$). Die Kapazität C einer Anordnung von Leitern im Vakuum ist eine von der Geometrie der Leiter und ihrer relativen Lage abhängige Größe. Dies sei an zwei einfachen Beispielen verdeutlicht:

Metallkugel im freien Raum:

Die Kugel mit Radius r_0 habe die Ladung Q . Man denkt sich die Ladung $-Q$ sehr weit von der Kugel entfernt gleichmäßig im Raum verteilt. Aus Symmetriegründen ist die Ladung der Kugel gleichmäßig auf ihrer Oberfläche verteilt und das elektr. Feld und Potenzial im Außenraum der Kugel radialsymmetrisch (s. Abb. 2a). Aus dem Gaußschen Satz, Gl.(3), folgt damit, dass Feldstärke und Potenzial im Außenraum denen einer Punktladung Q gleichen, die sich anstelle der Kugel in ihrem Zentrum befindet. Im Inneren der Kugel ist $E = 0$ und $\varphi = \text{const.}$ wie an der Kugeloberfläche, also $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r_0$. Die Spannung zwischen der Kugel und der Umgebung (im Unendlichen) ist gleich dem Potenzial, so dass ihre Kapazität $C = Q/U = 4\pi\epsilon_0 r_0$ ist. Eine Kugel, z.B. mit dem Radius $r_0 = 1 \text{ cm}$ hat eine (geringe) Kapazität von ca. 1 pF (10^{-12} F).

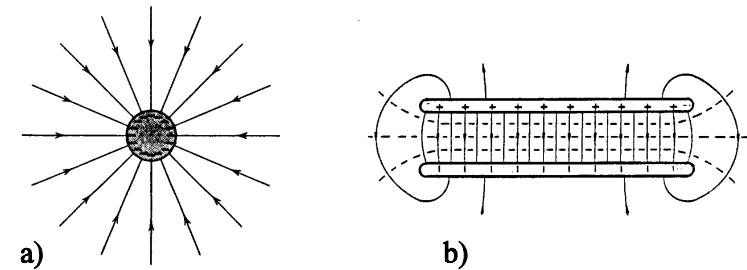


Abb.2: a) Feldlinien einer negativ geladenen Metallkugel, b) Feldlinien und Äquipotenzialflächen(schnitte) eines Plattenkondensators

Plattenkondensator:

Befinden sich zwei ebene, die Ladungen $+Q$ u. $-Q$ tragende Metallplatten der Fläche S im Abstand d ($d^2 \ll S$) dicht gegenüber, ist das elektr. Feld im wesentlichen im Raum zwischen den Platten konzentriert und dort (nahezu) homogen (s. Abb. 2b). Die Ladungen sind (bis auf die Plattenränder) gleichmäßig auf den gegenüberliegenden Oberflächen der Platten verteilt. Legt man eine geschlossene Fläche mit der einen Seite in eine Kondensatorplatte hinein, mit der anderen in den Raum zwischen die Platten, so ist gerade die Ladung Q darin eingeschlossen, so dass mit Gln. (3) u. (5) $E = Q/\epsilon_0 S$, $U = E d$ und damit die Kapazität des Plattenkondensators $C = Q/U = \epsilon_0 S/d$ ist. Für z.B. $S = 1 \text{ dm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$ ist C ca. 90 pF . Je nach Aufbau hat ein Plattenkondensator infolge des Feldes außerhalb des Raumes zwischen den Platten eine geringe, für einen kleinen Plattenabstand nur wenig von d abhängige zusätzliche sog. *Streukapazität* C_0 .

2.4 Influenz, Bildladung

Nähert man eine positive Ladung Q einer ungeladenen Metallplatte, wird das elektrische Feld der Ladung auf die zuvor gleichmäßig verteilten pos. u. neg. Ladungen der Platte Kräfte ausüben. Die negativen Ladungen (Elektronen) der Platte werden in den Bereich direkt gegenüber der Ladung Q angezogen, so dass dieser negativ gegenüber der von Q weiter entfernten Umgebung der Platte geladen wird. Diesen, beim Entfernen der Ladung Q wieder verschwindenden Ladungseffekt nennt man *Influenz*. Infolge der Influenz resultiert eine anziehende Kraft, die sog. *Bildkraft*, zwischen einer Ladung und der durch sie influenzierten Ladung. Im oben genannten Beispiel kann für eine Punktladung Q im Abstand d gegenüber einer großen geerdeten Metallplatte die Bildkraft leicht bestimmt werden (s. Abb. 3a). Da die geerdete Platte eine ebene Äquipotenzialfläche ($\varphi = 0$) darstellt, ist der Feldlinien- u. Potenzialverlauf zwischen der Ladung Q und der

Platte der gleiche wie derjenige zwischen zwei Punktladungen +Q und -Q im Abstand 2d für den Raumbereich von einer Punktladung bis zur Mittelebene (vergl. Abb. 1b). Die durch die Punktladung Q verursachte Influenzladung der Platte ist also hinsichtlich des Feldverlaufs und der Bildkraft einer gedachten Punktladung -Q, der *Bildladung* im Abstand 2d gleichwertig.

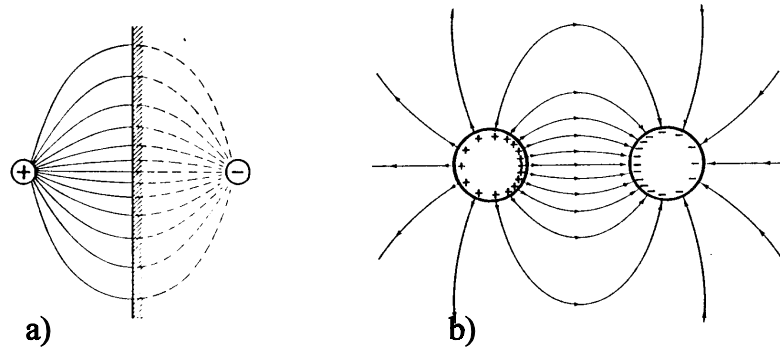


Abb.3: a) Feldlinien einer Punktladung vor geerdeter Metallplatte (mit Bildladung), b) Feldlinien und Ladungsverteilung durch Influenz zweier entgegengesetzt geladener Metallkugeln

Die Bildkraft ist also in diesem Fall mit Gl. (1)

$$F = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \quad (7)$$

Befinden sich zwei gleich oder entgegengesetzt geladene Metallkugeln mit Radius r_0 in großem Abstand r ihrer Mittelpunkte gegenüber ($r \gg r_0$), so ist die gegenseitig influenzierte Ladung sehr gering; die Kugeln haben eine gleichmäßige Oberflächenladung (s. Abb. 2a) und üben die gleiche Coulomb-Kraft aufeinander aus wie entsprechende Punktladungen in den Kugelzentren. Ist der Abstand r jedoch nicht viel größer als der minimale Abstand $2 r_0$, sind die Ladungen aufgrund ihrer gegenseitigen Influenz nicht mehr gleichmäßig auf den Oberflächen verteilt (s. z.B. Abb. 3b). Es wirkt zwischen den Kugeln zusätzlich eine anziehende Bildkraft. Diese kann für kleine Abstände r beträchtlich sein und muss im vorliegenden Versuch berücksichtigt werden. Ihre Berechnung ist aus Geometriegründen schwieriger als im vorhergehenden Beispiel. Seien F_+ bzw. F_- die Beträge der zwischen zwei gleich bzw. entgegengesetzt geladenen Kugeln

wirkenden Gesamtkräfte und F_C der Betrag der Coulomb-Kraft für entsprechende Punktladungen, sind mit der Festlegung:

$$F_+ = K_+ F_C \quad \text{bzw.} \quad F_- = K_- F_C \quad (8)$$

K_+ bzw. K_- die Korrekturfaktoren infolge der Influenz. Diese sind in der nachfolgenden Tabelle für den im Versuch wichtigen Abstandsbereich r_0/r angegeben:

r_0/r	K_+	K_-
0,10	0,996	1,004
0,15	0,986	1,014
0,20	0,967	1,035
0,25	0,935	1,074
0,30	0,889	1,141
0,35	0,828	1,265

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Eichen Sie ein Ladungsmessgerät durch Bestimmung der Ladung eines Plattenkondensators bei fester Spannung für verschiedene Plattenabstände.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Ladung einer Metallkugel für verschiedene Ladespannungen und vergleichen Sie ihre Kapazität mit der einer *freien* Kugel.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die zwischen zwei positiv geladenen Metallkugeln wirkene Kraft a) als Funktion der Ladespannung bei festem Abstand und b) als Funktion des Abstandes bei konstanter Ladespannung.
- 4. Aufgabe:** Bestimmen Sie die zwischen einer positiv geladenen Metallkugel und einer geerdeten Metallplatte wirkende Bildkraft als Funktion des Abstandes.

4. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus zwei Teilen:

1) Zur Eichung des Ladungsmessers (s. Abb. 4) wird ein Plattenkondensator C mit variablem auf 0,1 mm genau einstellbarem Plattenabstand benutzt. Die positiv zu ladende isolierte Kondensatorplatte ist über einen Schutzwiderstand $R = 50 \text{ M}\Omega$ und den Schalter S zum Laden mit der Spannungsquelle U und zum Entladen mit dem Eingang des Ladungsmessverstärkers MV verbunden. Die der Ladung (ca. 10^{-8} As) proportionale Ausgangsspannung des Verstärkers wird mit dem Digitalvoltmeter DVM bestimmt.

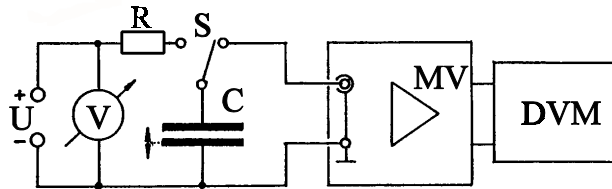


Abb.4: Schaltschema zur Ladungsmessung am Plattenkondensator

2) Die Anordnung zur Messung der Kraft zwischen zwei geladenen Kugeln sowie zwischen einer Kugel und einer geerdeten Metallplatte zeigt Abb. 5. Zwei elektr. isoliert angebrachte metallisierte Kunststoffkugeln K_1 und K_2 befinden sich auf gleicher Höhe in variablem Abstand gegenüber. K_1 ist an einem Hebelarm befestigt, welcher das Moment der seitlich auf sie wirkenden Kraft innerhalb des Sensors KS auf eine dünne Blechlamelle überträgt und diese leicht durchbiegt. Die Biegung wird von zwei Dehnungsmessstreifen bestimmt, die auf beide Seiten der Lamelle geklebt sind. Dehnungsmessstreifen sind dünne Folien mit Leiterbahnen, deren Längenänderung durch Messung ihres elektr. Widerstandes mit großer Empfindlichkeit bestimmt werden kann. Das mit dem Sensor verbundene Messgerät KM zeigt die auf K_1 wirkende Kraft digital in Newton an. Da die im Versuch zu bestimmenden Kräfte jedoch sehr klein sind ($\approx 10^{-4} \text{ N}$), dient ein nachgeschaltetes Digitalvoltmeter DVM zur Ablesung der Kraft. Die Kugel K_2 bzw. ein geerdetes Blech B werden über einer Schiene S in variablem Abstand zu K_1 aufgestellt. Zur Ladung der Kugeln dient die Hochspannungsquelle HV (max. benutzte Spannung: 15 kV). Ihr Minuspol ist mit der Erdbuchse des Geräts und der Schiene verbunden, der Pluspol über einen (internen) Schutzwiderstand mit dem Steckerstift HS. Dieser wird zum Laden der Kugeln mit ihnen in Kontakt gebracht. Bei jedem Ladungsvorgang ist **unbedingt** gleichzeitig ein mit der Schiene (Erde) verbundener Metallstab E zu umfassen! Auf diese Weise bleibt der

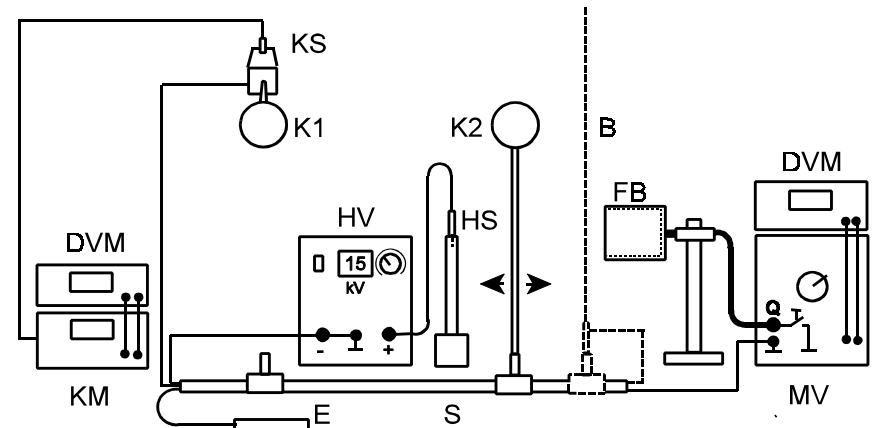


Abb.5: Versuchsaufbau zur Kraft- und Ladungsmessung der Kugeln

menschliche Körper auf Erdpotential und es werden unangenehme Stromschläge bei Annäherung an den Ladungsstift HS vermieden. Zur Ladungsmessung der Kugel K_2 wird über sie ein Faraday-Becher FB gestülpt, der mit dem Eingang des Messverstärkers MV verbunden ist, dessen Erde wiederum mit der Schiene S. Zum Trocknen der Kugeln, ihrer Isolatoren und der Umgebungsluft dient ggf. ein Warmluftventilator.

5. Versuchsdurchführung und Auswertung

Zum Versuchsbeginn sind die Schaltungen Abb. 4 u. 5 (soweit gleichzeitig möglich) aufzubauen und die empfindlichen Messgeräte Kraft- und Ladungsmessers zum Aufwärmen einzuschalten (mindestens 15 min. vor der Messung). Vor Beginn der Messungen sind die Schaltungen vom **Betreuer** des Versuchs zu überprüfen und **nur von ihm** die Hochspannungsquelle einzuschalten.

Wegen der selbst bei hohen Spannungen nur geringen Ladungen der Kugeln ist darauf zu achten, dass diese und die Isolatoren sauber und trocken sind bzw. bleiben; insbesondere sollten sie nicht mit den Händen berührt oder angehaucht werden. Ein zu schnelles Abfließen der Ladungen infolge z.B. feuchter Isolatoren kann bei der Kraftmessung leicht bemerkt werden und diese unmöglich machen.

Bei der Messung mit dem Plattenkondensator ist zu beachten, dass das Kabel vom Schalter S zur isolierten, feststehenden Kondensatorplatte möglichst kurz und

ohne Berührung zu geerdeten Teilen sein sollte. Ferner sollte der Steckerstift der mit dem Messverstärker verbundenen Koaxialleitung nicht ganz in die betreffende Buchse des Schalters S eingesteckt werden, da sonst möglicherweise der Isolationswiderstand zur Erde nicht ausreichend groß ist.

zu Aufgabe 1:

Der Messverstärker ist auf den Bereich 10^{-8} As stat., der Nullpunkt der Ausgangsspannung U_Q bei geerdetem Eingang (gedrückte Erdungstaste) einzustellen, die Gleichspannungsquelle auf 200 V. Es ist die der Ladungsmenge des Kondensators $Q = a U_Q$ proportionale Spannung U_Q des Verstärkers für Plattenabstände

$$d = 10; 5; 3; 2; 1,5 \text{ u. } 1 \text{ mm}$$

jeweils dreimal, bei großen Abweichungen der Einzelmessungen entsprechend öfter zu bestimmen. Der Verstärkereingang ist kurz vor der Entladung des Kondensators zu erden, der Schalter jeweils nur kurzzeitig auf Entladen zu stellen.

Tragen Sie in der Auswertung die Mittelwerte U_Q über $1/d$ auf und bestimmen Sie über eine Ausgleichsgerade und die Kapazitätsformel für den Plattenkondensator die Eichkonstante a des Messverstärkers sowie aus dem Achsenabschnitt $U_Q(1/d=0)$ die Streukapazität C_0 des Kondensators! Der Durchmesser D der Kondensatorplatten beträgt 26 cm.

zu Aufgabe 2:

Es wird die Ladung der Kugel K_2 bzw. die Spannung U_Q für positive Ladespannungen $U = 5$ bis 15 kV (gegen die Schiene, bzw. Erde) in Schritten von 2,5 kV jeweils dreimal bestimmt. Dazu wird K_2 über die Position $x = 80$ cm der Schiene gestellt. Nach Einstellen der Sollspannung des Hochspannungsgeräts und Ergreifen des Erdstabes wird mit der anderen Hand der Steckerstift HS am kabelseitigen hinteren Ende des Griffes erfasst, aus dem Isolator-Standfuß genommen, kurzzeitig an die Kugel gehalten und dann wieder in den Fuß zurückgesteckt. Zur Ladungsmessung wird der Eingang des Messverstärkers (Einstellung wie vorher) kurzzeitig geerdet, der Faraday-Becher aus der in ausreichendem Abstand zu HS aufgestellten Halterung genommen und vorsichtig über die Kugel geführt. Beobachten Sie, wie schon bei der Annäherung des Bechers an die Kugel (oder den Stift HS) Ladung im Becher influenziert wird. Befindet sich die Kugel ganz innerhalb des Bechers ohne ihn zu berühren, ist die influenzierte Ladung gleich der auf der Kugel. Sie verschwindet wieder bei Entfernen des Bechers. Berührt die Kugel die Innenwand des Bechers, fließt ihre

Ladung in den Becher ab. Nach Zurücklegen des Bechers in die Halterung ist die vom Ladungsmesser angezeigte Spannung U_Q sofort abzulesen.

In der Auswertung ist die mittlere Ladung der Kugel über der Ladespannung aufzutragen und über eine Ausgleichsgerade die Kapazität der Kugel in dieser Anordnung zu bestimmen. Vergleichen Sie diese mit der Kapazität einer Kugel im freien Raum! Der Radius der beiden Kugeln beträgt $r_0 = 1,9$ cm.

zu Aufgabe 3:

a) Zunächst ist die Schiene so einzurichten, dass beide Kugeln (in gleicher Höhe) sich ohne Kraftwirkung gerade berühren, wenn der Isolator von K_2 auf der Position $x = 43,8$ cm steht, der Abstand $r = 0$ der Kugelmittelpunkte also $x = 40$ cm entspricht. Einer weiterer Schienenfuß ist so festzuklemmen, dass sich K_2 auf einen minimalen Abstand $r = 6$ cm an K_1 heranführen lässt.

Es ist jeweils die Differenz der Kräfte $\Delta F = F(6 \text{ cm}) - F(40 \text{ cm})$ zwischen beiden positiv geladenen Kugeln für Ladespannungen U von 5 bis 15 kV in Schritten von 2,5 kV jeweils dreimal zu bestimmen. Vor jeder Messung sind die Kugeln erneut zu laden. Stellen Sie dazu K_2 auf $x = 80$ cm und laden Sie die Kugeln auf, K_1 nur durch leichtes Berühren von unten! Drücken Sie die Nulltaste des Kraftmessers und notieren Sie die Anzeige des Voltmeters (Bereich: 2V; 1V entspricht 5×10^{-3} N)! Nach Heranführen von K_2 auf $x = 46$ cm ist die Anzeige erneut zu notieren. Es ist zweckmäßig, danach nochmals die Kraftanzeige für den Abstand $r = 40$ cm zu bestimmen und bei der Differenzbildung die Mittelwerte $F(40 \text{ cm})$ zu benutzen.

Tragen Sie in der Auswertung die Mittelwerte ΔF über U^2 auf, gegebenenfalls mit den Ergebnissen der 2. Aufgabe auch über Q^2 und prüfen Sie die Proportionalität!

b) Der Versuch ist wie im Teil a) durchzuführen jedoch bei einer Ladespannung von 15 kV je zweimal für die Abstände

$$r = 6; 6,5; 7; 8; 10; 12; 14; 18 \text{ cm.}$$

Vor jeder Messung sind die Kugeln neu zu laden. Die Mittelwerte der Messergebnisse sind über $1/r^2$ aufzutragen, für kleine Abstände r zusätzlich die infolge der Bildkraft korrigierten Werte F/K_1 . Die Korrekturfaktoren sind durch Interpolation der Tabelle zu entnehmen. Bestimmen Sie aus einer Ausgleichsgeraden das beobachtete Kraftgesetz und vergleichen Sie es mit dem Coulomb-Gesetz, Gl.(1)! Diskutieren Sie das Ergebnis. Schätzen Sie aus den Messwerten unsystematische und mögliche systematische Fehler ab!

zu Aufgabe 4:

Zu Beginn ist das mit einem Kabel an der Schiene geerdete Blech B anstelle K_2 mit der Schiene so zu justieren, dass B bei Berührung von K_1 gerade auf der Position $x = 41,9$ cm steht. Anschließend ist wie vorher zu verfahren: Laden der Kugel K_1 mit $U = 15$ kV, wenn B auf $x = 80$ cm steht, Messung der Kraftdifferenz $\Delta F = F(d) - F(40 \text{ cm})$ für die Abstände:

$$d = 3; 3,5; 4; 5; 6; 7; 9 \text{ cm.}$$

Tragen Sie Messwerte entsprechend Gl.(7) über $1/4d^2$ auf, ebenso die korrigierten Messwerte F/K und diskutieren Sie das Ergebnis wie in Aufgabe 3!

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie lautet das *Coulomb-Gesetz*? Welches universelle Kraftgesetz hat die gleiche Form wie das Coulomb-Gesetz?
- 2) Was besagt der *Kraftflusssatz* (Gaußsche Satz) der Elektrostatik? Was kann aus ihm hinsichtlich elektr. (Überschuss-)Ladungen im Inneren von Metallen gefolgert werden?
- 3) Wie ist die *elektrische Feldstärke* definiert, wie das *elektrische Potenzial*?
- 4) Welchen Verlauf haben elektr. Feldstärke u. Potenzial a) innerhalb und außerhalb einer mit Q geladenen Metallkugel, b) innerhalb und zwischen den Platten eines geladenen Kondensators?
- 5) Was versteht man unter der *Kapazität* elektr. Leiter und wie kann man sie experimentell bestimmen?
- 6) Was bedeutet die *elektrische Influenz* und wie wirkt sie auf geladene bzw. ungeladene elektr. Leiter ?