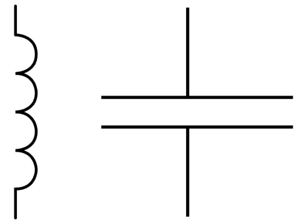
Universität Duisburg-Essen



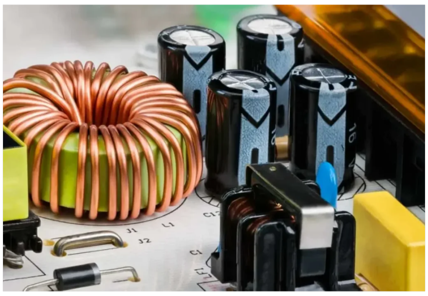


Abbildung 1: Schaltsymbole und reale Bauteile

Versuchsanleitung für das Anfängerpraktikum

Induktivität und Kapazität

22. Mai 2025

Raum ME150

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Informationen

1.1 Literatur

1. Gerthsen/Kneser, Physik
2. Demtröder, Experimentalphysik, Bd. 2
3. Halliday/Resnick/Walker, Halliday Physik Bachelor Editon
4. Greiner, Theoretische Physik, Bd.3

1.2 Stichworte

- Effektivwert
- Spitze-Wert, Spitze-Spitze-Wert
- Blindwiderstand
- Induktion
- Wheatstonesche Messbrücke

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Eigenschaften von Spulen und Kondensatoren

Kondensatoren und Spulen sind passive Bauteile und können im Gleichspannungs- sowie im Wechselstromkreis angewendet werden, um Energie zu speichern. Während der Kondensator die Energie in Form eines elektrischen Feldes speichert, tut die Spule dies in Form eines magnetischen Feldes. Im Falle des Kondensators ist die physikalische Größe, die die gespeicherte Ladungsmenge für eine bestimmte Spannung angibt, die Kapazität C und wird in der Einheit Farat ($[C] = 1\ F = 1\ \frac{Coulomb}{V} = 1\ \frac{As}{V}$) angegeben und im Falle der Spule sprechen wir von der sogenannten Induktivität L mit der Einheit Henry ($[L] = 1\ H = 1\ \frac{Vs}{A}$). Sie hängen jeweils von der spezifischen Gestalt des Kondensators bzw. der Spule ab.

Allgemein gilt für die Kapazität des Kondensators folgende Beziehung:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D}\, d\vec{A}}{\int \vec{E}\, d\vec{s}} \tag{1}$$

$\vec{E}$ ist das elektrische Feld, $\vec{D}$ beschreibt die dielektrische Verschiebung und kann mit Hilfe der Dielektrizitätskonstante ε auch ausgedrückt werden über

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \tag{2}$$

und ergibt zusammen mit Gl.(1) für die allgemeine Form zur Berechnung der Kapazität eines Kondensators:

$$C = \frac{\oint \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}\, d\vec{A}}{\int \vec{E}\, d\vec{s}} \tag{3}$$

Die einfachste Form des Kondensators ist der Plattenkondensator, da das elektrische Feld zwischen den Platten nahezu homogen ist, können wir den Betrag von $\vec{E}$ somit als konstant betrachten. Für den Plattenkondensator mit dem Plattenabstand d, der Dielektrizitätskonstante ε_r und der Plattenfläche A gilt also:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \tag{4}$$

Die einfachste Bauform einer Spule ist die Zylinderspule mit der Windungszahl N, dem Querschnitt A der Spule, der Permeabilitätszahl μ_r und der Länge l gilt:

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l} \tag{5}$$

Im Unterschied zum Kondensator besitzt die Spule, da sie aus einem gewickelten Draht besteht, noch einen kleinen, messbaren ohmschen Widerstand. Dieser ist abhängig von der Länge des Drahtes l, seinem Durchmesser d (bzw. der Querschnittsfläche A) und der Materialkonstante ϱ des verwendeten Drahtes:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A} \tag{6}$$

Weiterhin wichtig zu erwähnen ist, dass nur so lange eine Spannung in die Spule induziert wird, solange sich das Magnetfeld ändert. Das kann z.B. ein Wechselstrom sein, oder aber ein bewegter Magnet in einer Spule. Dieser Zusammenhang lässt sich über folgende Formel darstellen:

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{7}$$

Für die induzierte Spannung gilt die Lenz´sche Regel, d.h. die durch Induktion entstehenden Ströme, Felder und Kräfte behindern stets den die Induktion einleitenden Vorgang. [1] In Formelschreibweise drückt sich dies durch ein negatives Vorzeichen aus:

[1]Demtröder, Experimentalphysik 2, Seite 121

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\int B\,dA = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$
$$\Phi = magn.Fluss \tag{8}$$

Bei der Induktion wird allgemein unterschieden zwischen der Selbstinduktivität (auch: Selbstinduktion, Eigeninduktion) und der Gegeninduktivität, die bei der magnetischen Wechselwirkung mehrerer Stromkreise auftritt.

*Hinweis:*Im Verlauf dieser Anleitung ist bei dem Wort "Induktion" stehts die Selbstinduktion gemeint.

2.1.1 Verhalten des Kondensators im Gleichspannungs- bzw. Wechselspannungsstromkreis

Gleichspannungsstromkreis
Soll der Kondensator an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen werden, brauchen wir zur Strombegrenzung einen Vorwiderstand. Da der ohmsche Widerstand hier die Höhe des Ladestroms bestimmt und somit auch die Geschwindigkeit des Lade- bzw. auch des Entladevorgangs, wird für die Kombination aus Kapazität und ohmschen Widerstand eine neue Größe als Zeitkonstante eingeführt und mit "Tau" bezeichnet. Diese lässt sich leicht aus dem in der Schaltung verwendeten ohmschen Widerstand und der Kapazität berechnen.

$$\tau = R \cdot C \tag{9}$$

Sobald die Spannungsquelle eingeschaltet wird, ist ein Strom messbar und es baut sich aufgrund der Ladungstrennung zwischen den Kondensatorplatten ein elektrisches Feld auf, dessen Feldstärke proportional zur messbaren Spannung U ist. Herleiten lässt sich das über das Potential bzw. die Laplace-Gleichung. Hierbei liegt die linke Platte bei x=0 bzw. dem Potential ϕ_1 und die rechte bei x=d bzw. dem Potential ϕ_2. Somit ergibt sich:

$$E = -\nabla\phi = \frac{U}{d} \cdot \vec{e}_x \tag{10}$$

oder, wenn man nur die Beträge betrachtet:

$$E = \frac{U}{d} \tag{11}$$

Während des Ladevorgangs ändert sich durch Ladung des Kondensators stetig die Last für die Spannungsquelle, d.h. der Ladestrom sinkt und die Spannung am Kondensator nähert sich der Sättigung. Ist das Potential des Kondensators so groß wie das der Spannungsquelle, stoppt der Ladevorgang. Zudem kann ein Kondensator auch bei unendlich zur Verfügung stehender Energie nicht unendlich stark aufgeladen werden, da das Dielektrikum (das Material zwischen den Kondensatorplatten) eine Durchschlagsfestigkeit und damit eine Spannung vorgibt, ab dieser der Kondensator zerstört werden würde.

In Formeln ausgedrückt ergibt sich also für den Ladevorgang:

$$u_c = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad bzw. \quad i_c(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{12}$$

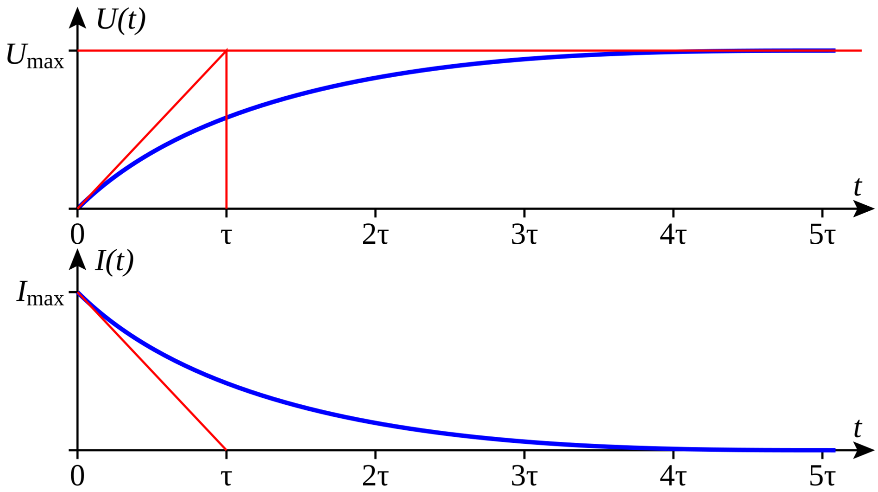


Abbildung 2: Ladevorgang am Kondensator

Wechselstromkreis

Nun betrachten wir das Verhalten des Kondensators im Wechselstromkreis. Hierzu legen wir eine sinusförmige Wechselspannung an, die in folgendem Diagramm als Sinuskurve, sowie als Zeigerdiagramm dargestellt wird:

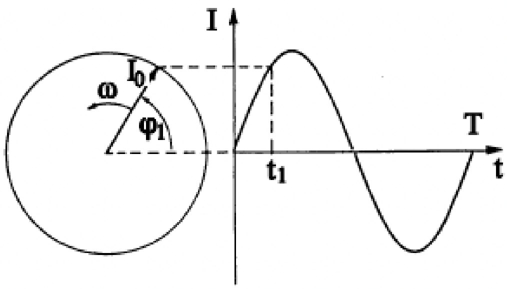


Abbildung 3: Darstellung der Wechselspannung als Sinus und Zeigerdiagramm

I_0 ist hier der Scheitelwert, $\omega = 2\pi f$ die Phasengeschwindigkeit und die allgemeine Formel, um die Sinusschwingung zu beschreiben lautet: $I(t) = I_0 \cdot sin(\omega t + \varphi)$ Zu beachten ist, dass Strom und Spannung am Kondensator phasenverschoben sind, das ist schon an der Ladekurve erkennbar. Während der Strom beim Ladevorgang maximal ist, liegt die Spannung zunächst bei 0. Auch dieser Sachverhalt lässt sich mit Hilfe des Zeigerdiagramms darstellen:

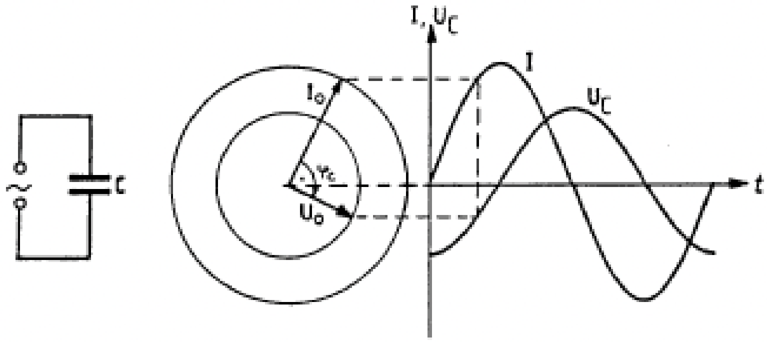


Abbildung 4: Zeigerdiagramm Kondensator

Die Phasenverschiebung wird durch den nicht messbaren, sogenannten Blindwiderstand (auch kapazitiver Widerstand) verursacht, der auch imaginärer Widerstand genannt wird und von der Frequenz abhängt. Mathematisch lässt sich das einfach durch ein Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene darstellen

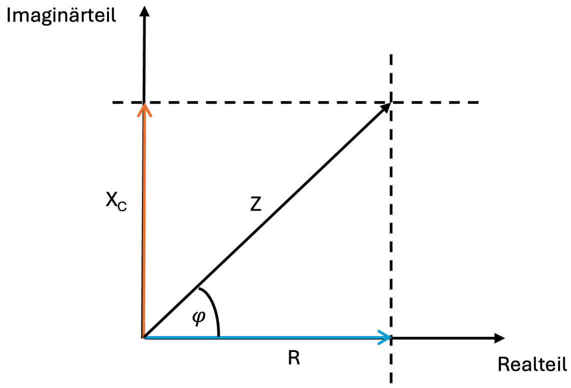


Abbildung 5: Zeigerdiagramm mit Impedanz

Hier sind die Beträge der jeweiligen Komponenten aufgetragen und es ist zu erkennen, dass die Kombination aus dem ohmschen und dem Blindwiderstand die sogenannte Impedanz Z darstellt. Die Phasenveschiebung φ lässt sich aus der Lösung der Differentialgleichung

$$I = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dC \cdot U_C}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \tag{13}$$

mit dem Ansatz $U_C = U_0 \cdot sin(\omega t + \varphi_C)$ bestimmen und ergibt sich zu

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2} \quad mit \;\; X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{14}$$

2.1.2 Verhalten der Spule im Gleichspannungs- bzw. Wechselstromkreis

Genauso wie Kondensatoren sind Spulen passive Bauteile. In der Regel bestehen sie aus einem um einen Eisenkern gewickelten Draht, das Kernmaterial kann aber auch variieren. Die Gleichungen (5) und (7) beschreiben allgemein die Induktivität und deren Einfluss bei sich zeitlich verändernden Strömen, bzw. Spannungen. Hier ist bereits zu erkennen, dass die Induktion stark von dem Material des Kerns abhängt und je leichter dieser Stoff magnetisierbar ist, desto größer ist auch die Permeabilität μ_r. Zudem spielt die Induktion vor allem im Wechselstromkreis eine wichtige Rolle, bzw. bei Ein- und Auschaltvorgängen. Daher konzentrieren wir uns in der weiteren Betrachtung eher auf Wechselstromkreise. Bei der Spule gilt es im Gegensatz zum Kondensator noch zu beachten, dass diese einen messbaren, ohmschen Widerstand besitzt, welcher sich über Gl. (6) berechnen lässt.

Wird ein runder Leiter (ohne Kern) von einem Strom durchflossen, bildet sich um ihn herum ein magnetisches Feld. Dieses kann wie folgt berechnet werden:

$$\oint B\, ds = \int_0^{2\pi} r \cdot B\, d\varphi = 2\pi \cdot r \cdot B(r) = \mu_0 I \tag{15}$$

Eine Spule ist nichts anderes, als mehrere dieser runden Leiter hintereinander,d.h. die Formel wird um die Windungszahl N erweitert:

$$\oint B\, ds \approx N \cdot \mu_0 \cdot I \tag{16}$$

Bei dieser vereinfachten Betrachtung ist das Feld im Spuleninneren homogen und somit unabhängig vom Ort. Natürlich wirkt dieses Feld auch wieder auf den Leiter zurück, d.h. es kommt zur Selbstinduktion und diese wirkt ihrer Ursache entgegen. Betrachten wir eine Spule, die mit einer Lichtquelle an eine Gleichstromquelle angeschlossen wird. Wird der Strom eingeschaltet, leuchtet die Lampe mit Verzögerung auf, da durch die Induktion (Gl.(7))zum Zeitpunkt t= 0 die Induktionsspannung maximal ist und erst dann baut sich ein mag. Feld um die Spule auf und die Spannung nimmt über die Zeit ab, während der Strom zunimmt. Genau wie beim Kondensator gibt es hier eine Zeitkonstante $\tau = \frac{R}{L}$ und die Strom- bzw. Spannungsformel für den Ladevorgang:

$$u_L = U_0 \cdot e^{-\tau \cdot t} \quad bzw. \quad i_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\tau \cdot t}\right) \tag{17}$$

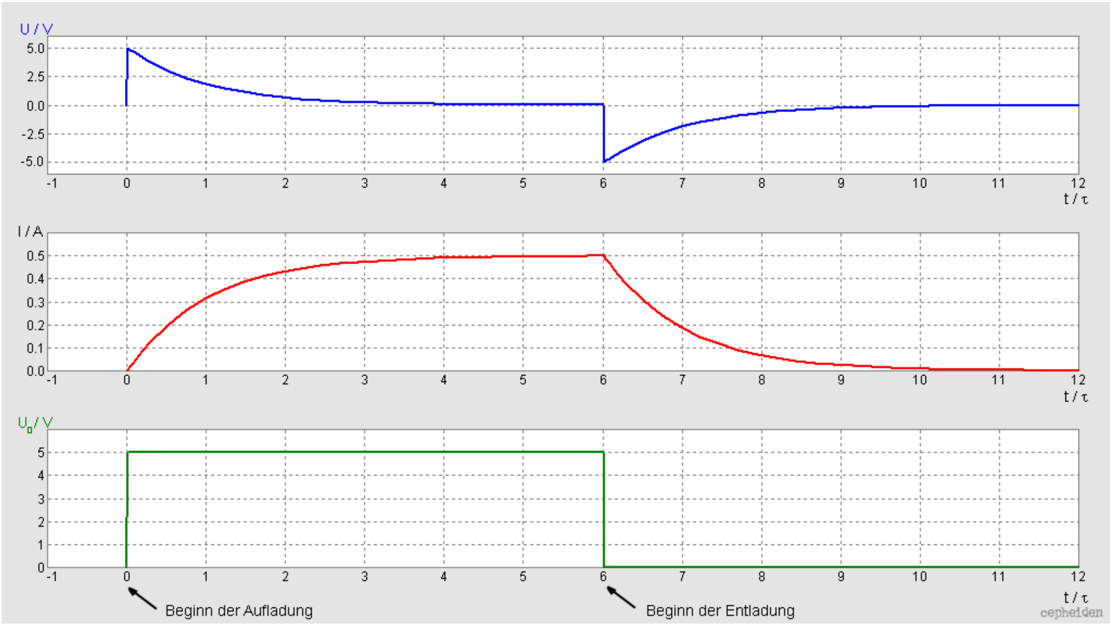


Abbildung 6: Lade- und Entladevorgang der Spule

Wie leicht zu erkennen ist, verhält sich die Spule genau andersherum als der Kondensator, d.h. hier ist die Phasenverschiebung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit dem Blindwiderstand $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$. Dies kann ebenfalls in einem Zeigerdiagramm zusammengefasst werden

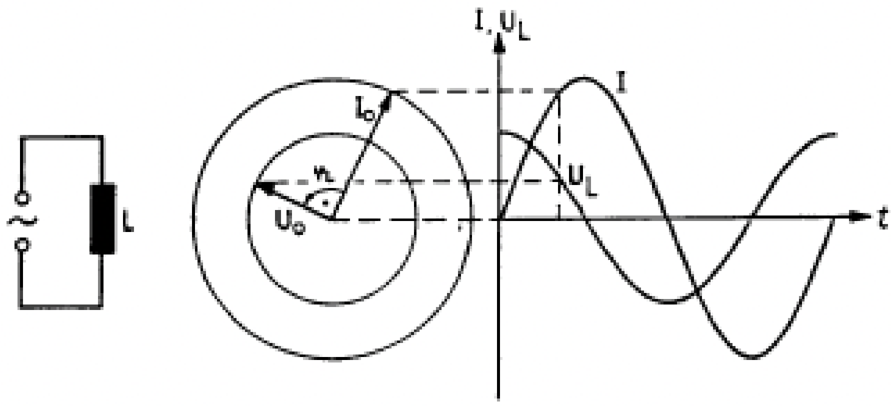


Abbildung 7: Zeigerdiagramm Spule

Hier ist nochmal besonders gut zu erkennen, dass die Spule exakt das gegensätzliche Verhalten eines Kondensators zeigt.

2.2 Die Wheatstonesche Messbrücke

Um besonders Widerstandswerte möglichst exakt bestimmen zu können, benötigen wir in der Regel ein spezielles Messsystem. Es geht aber auch etwas einfacher mittels der sogenannten *Wheatstoneschen Messbrücke.* Im Prinzip können wir hier durch drei bekannte Widerstände einen unbekannten bestimmen, indem wir ein Strommessgerät einbauen und mittels eines Potentiometers den sogenannten *Brückenstrom* auf 0 A regeln.

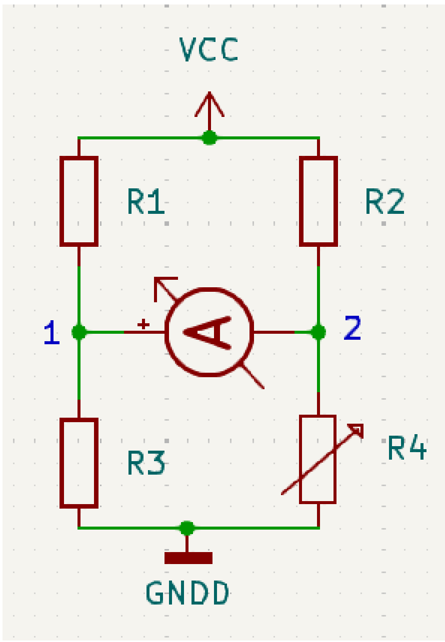


Abbildung 8: Messbrücke

Hierbei ist ein Widerstand durch ein Potentiometer ersetzt, deswegen nennt man dies auch $\frac{1}{4}$-Brücke. Zudem existieren auch noch $\frac{1}{2}$- Brücke, und Vollbrücke.
Wenn kein Strom messbar ist, gilt an den Punkten 1 und 2 $\varphi_1 = \varphi_2$, d.h. die Spannungen U_1 und U_2 sind gleich, sowie U_3 und U_4. Es ergibt sich:

$$\frac{U_1}{R_1} \cdot (R_1 + R_3) = \frac{U_2}{R_2} \cdot (R_2 + R_4) \tag{18}$$

Auflösen ergibt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{19}$$

Somit kann ein unbestimmter Widerstand errechnet werden, sobald die 3 anderen Widerstandswerte bekannt sind, oder das Verhältnis der Widerstände zueinander. Dieses Messprinzip findet häufig Anwendung im Labor, z.B. bei der Verwendung von Sensoren (z.B. Dehnungsmesstreifen, Druck, Waagen etc.).

3 Aufgabenstellung

1. Diskutieren Sie die von Ihnen aufgenommene Kennlinie des Kondensators und berechnen Sie die Zeitkonstante, sowie die Kapazität.

2. Bestimmen Sie die unterschiedlichen Ströme und den kapazitiven bzw. induktiven Widerstand und erstellen Sie ein Diagramm $X_C(f)$ und $X_L(f)$ bei unterschiedlichen Frequenzen. Diskutieren Sie ihre Ergebnisse.

3. Bestimmen Sie den ohmschen Widerstand und den Scheinwiderstand der Spule aus den Ergebnissen der Brückenschaltung und diskutieren Sie evtl. Abweichungen zu den Ergebnissen aus Aufgabe 2.

4. Bestimmen Sie den induktiven Widerstand der Spule.

4 Versuchsdurchführung

4.1 Qualitative Messung der Kondensatorkennlinie

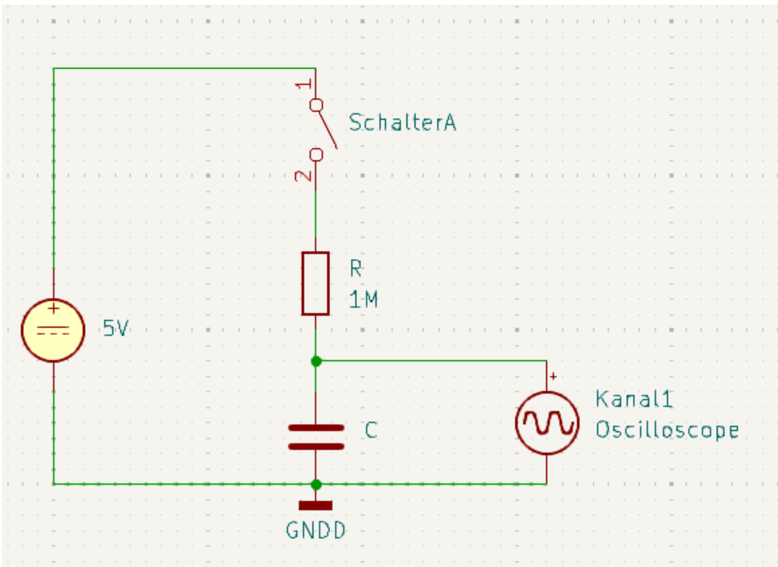


Abbildung 9: Schaltskizze

1. Bauen Sie die Schaltung nach der Skizze auf.
2. Schalter A wird geschlossen. Optimieren Sie die Ladekennlinie mit Hilfe der Einstellungen auf dem Oszilloskop.
3. Übertragen Sie das Ergebnis als Skizze in ihr Laborbuch. Nutzen Sie die Screenshot Funktion des Oszilloskopes, um ein Bild für die Auswertung zu erstellen.

4.2 Bestimmung des Blindwiderstandes von Kondensator und Spule

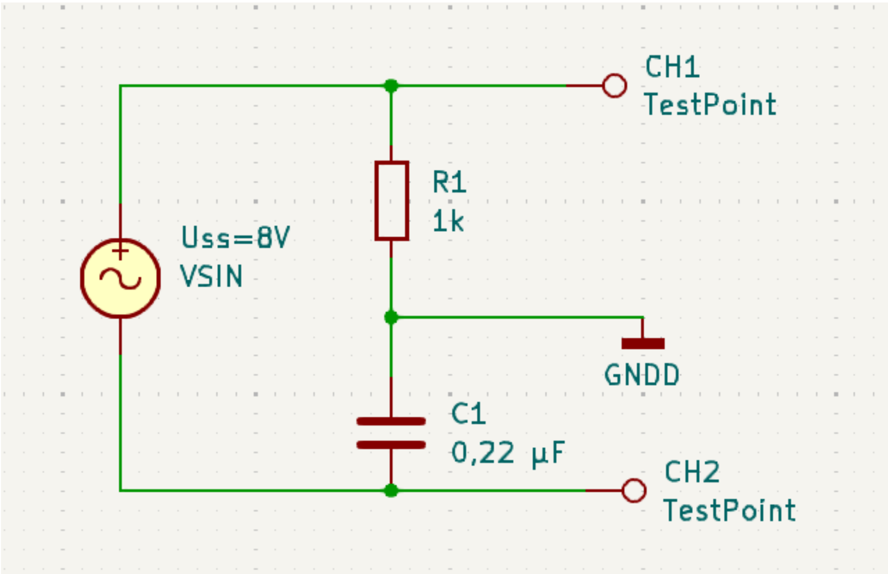


Abbildung 10: Schaltskizze

1. Nachdem Sie die Schaltung nach Schaltskizze aufgebaut haben, stellen sie am Freuenzgenerator eine Spannung von 8V ein (Spitze-Spitze-Wert) und messen Sie die Spannung am Widerstand und Kondensator bei den Frequenzen f= 0,1 - 0,7 kHz in 0,1 kHz Abständen.
2. Widerholen Sie den Versuch mit einer Spule von L=100 mH, einem Widerstand von R = 470 Ω und bei f = 1 kHz - 6 kHz in 1 kHz Abständen.
3. Messen Sie die Spannung am Kondensator bzw. Spule mit einem digitalen Multimeter und diskutieren Sie die Abweichungen der Werte von denen des Oszilloskops. Welchen Wert zeigt das Multimeter an?

4.3 Bestimmung des ohmschen und des Scheinwiderstandes Z einer Spule

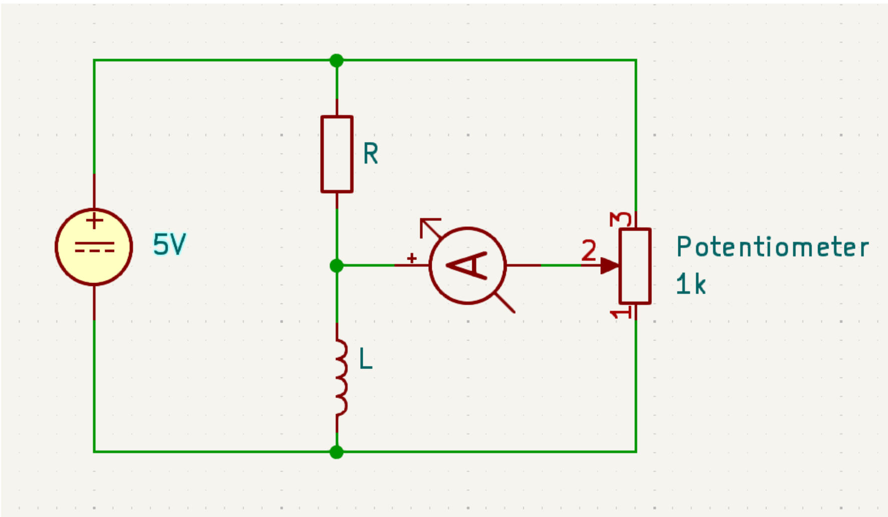


Abbildung 11: Schaltskizze

1. In dieser Schaltung ist R frei wählbar, die Spule hat die Wingunszahl N=900 und wird ohne Eisenkern betrieben. Warum entspricht diese Schaltung einer Halbbrücke?
2. Gleichen Sie die Brücke ab und notieren Sie sich die Widerstandswerte des Potentiometers. Anschließend kann R der Spule errechnet werden.

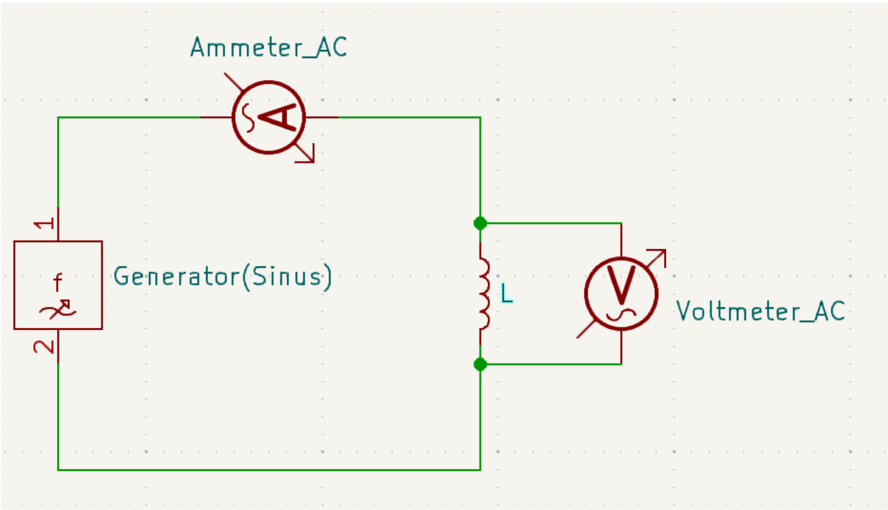


Abbildung 12: Schaltskizze

1. Nun benutzen wir noch einmal den Frequenzgenerator. Hier dürfen Sie sich die Spitze-Spitze-Spannung selber aussuchen.
2. Im nächsten Schritt bestimmen Sie den induktiven Widerstand der Spule bei 200 - 2000 Hz. Messen Sie in Abständen von 500 Hz.

5 Fragen zur Selbstkontrolle

- Was genau ist ein Blindwiderstand und wie kann dieser ermittelt werden?
- Warum besitzt der Kondensator keinen ohmschen Widerstand, die Spule aber schon?
- Wofür wird die Wheatstonesche Messbrücke genutzt und wo findet sie Anwendung?
- Wie kann mit Hilfe des Zeigerdiagramms der Scheinwiderstand Z einer Spule berechnet werden?