Matrizenrechnung

Matrix: Eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen a_{ij} (i = 1, ..., n_i; j = 1, ..., m) in Zeilen und Spalten. Die a_{ij} heißen Elemente von A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{ij} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & ... & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & ... & ... & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} z.B.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Durch die Indizes i und j ist jedes Element der Matrix eindeutig identifizierbar. Die Matrix besteht aus Zeilen und Spalten. Dabei heißt i der Zeilenindex und j der Spaltenindex.

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \text{die } i\text{–te Zeile von } A$$

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ ...\ a_{ij}\ ...\ a_{im}) = \text{die } j\text{–te Spalte von } A$$

Aus der Zahl der Zeilen- und Spaltenindizes ergibt sich die Ordnung der Matrix (Größe der Matrix).

Anzahl der Zeilen: n

Anzahl der Spalten: m

Allgemein: $n \times m$ Matrix

Beispiel: $2 \times\ 3$ Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B' = transponierte Matrix

Kurzform: $A = a_{ij}$

<u>Vektor:</u> Eine Matrix, die nur aus einer Zeile oder Spalte besteht.

z.B.: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad A' = (a_1\ a_2\ a_3)$ = transponierter Spaltenvektor

$n \times 1$ $\qquad\qquad 1 \times m$

Spezielle Formen der Matrix

Quadratische Matrix

Eine Matrix der Ordnung $n \times n$ (die somit genauso viele Spalten- wie Zeilenvektoren aufweist) heißt quadratische Matrix. Die Elemente, für die gilt $i = j$, liegen auf der Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten und heißen Diagonalelemente der Matrix.

Die Summe der Diagonalelement dieser Matrix heißt Spur [Sp(A)] der Matrix.

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A) = 2 + 6 + (\text{-}7) = 1$$

Symmetrische Matrix

Eine quadratische Matrix A für die gilt $A = A'$ heißt symmetrische Matrix. Dies bedeutet, dass $a_{ij} = a_{ji}$ sein muss.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, den Wert Null haben, heißt Diagonalmatrix.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle den Wert 1 haben, heißt Einheitsmatrix und wird mit I bezeichnet.

Beispiel:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Identitätsmatrix}$$

Dreiecksmatrix

Eine Matrix, deren Elemente über oder unter der Hauptdiagonale gleich Null sind, wird als Dreiecksmatrix bezeichnet. Es wird zwischen oberer und unterer Dreiecksmatrix unterschieden.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{untere Dreiecksmatrix}$$

Einheitsvektor: Vektor, dessen Elemente alle 1 sind. Er wird mit u' oder 1 bezeichnet.

Grundlegende Operationen

<u>Addition und Subtraktion</u>

Sind A und B Matrizen der gleichen Ordnung (weisen also die gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen auf), können wir sie addieren und subtrahieren. Als Ergebnis erhalten wir eine Matrix C mit der gleichen Ordnung wie A und B. Die Elemente der Matrix ergeben sich dabei wie folgt: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Beispiel:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 12 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $A + B = B + A$ (kommutativ)

Transponieren von Matrizen

Haben wir eine Matrix A der Ordnung $n \times m$, so heißt die $m \times n$ Matrix A', die durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entsteht, die zu A transponierte Matrix bzw. die zu A Transponierte. Für jedes Element a'_{ij} von A' gilt: $a'_{ji} = a_{ij}$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

Multiplikation mit einem Skalar

Ein Skalar ist eine einzelne Zahl. Eine Matrix wird mit einem einzelnen Skalar multipliziert, indem man jedes Element mit dieser Zahl multipliziert.

Es gilt: $c \times A = A \times c = B$

Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Multiplikation zweier Matrizen

Eine Multiplikation zweier Matrizen A und B ist nur dann möglich, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix A identisch ist mit der Anzahl der Zeilenvektoren der Matrix B. Aus der Multiplikation der Matrix A mit der Ordnung $p \times n$ und der Matrix B mit der Ordnung $n \times m$ entsteht die Produktmatrix C mit der Ordnung $p \times m$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 44 & 64 & -32 \\ 46 & 27 & 49 & -8 \end{pmatrix}$$

Die Elemente von $C(k = 1, \dots, p; j = 1, \dots, m)$ lassen sich wie folgt berechnen:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot b_{ij}$$

Beispiel: Berechnung des Elementes c_{24}

$$\begin{aligned} c_{24} &= a_{21} \cdot b_{14} + a_{22} \cdot b_{24} + a_{23} \cdot b_{34} \\ &= 4 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-8) \\ &= 32 + 0 - 40 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 44 & 64 & -32 \\ 46 & 27 & 49 & -8 \end{pmatrix}$$

Es ist zu beachten, dass die Multiplikation zweier Matrizen nicht kommutativ ist, d.h. $A \times B \neq B \times A$.

Wichtig: Bei der Multiplikation zweier Matrizen ist die Reihenfolge von entscheidender Bedeutung.

Eine Matrixmultiplikation ist distributiv:

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

und assoziativ:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times \mathrm{C}) = A \times B \times C$$

Determinante

Kennziffer einer quadratischen Matrix, in deren Berechnung sämtliche Elemente der Matrix eingehen.

Determinante von $A = |A|$.

Die Determinante einer 2×2 Matrix A ist durch das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale minus dem Produkt der Elemente der Nebendiagonale definiert.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a_{11}\ a_{22}) - (a_{12}\ a_{21})$$

Die Determinante ergibt sich als gewichtete Summe der Elemente einer Zeile oder Spalte. Die Wahl der Zeile (oder Spalte) ist hierbei beliebig. Bezogen auf die Elemente der 1. Spalte ergibt sich das Gewicht für das Element a_{11} aus der Determinante derjenigen 2×2 Matrix, die übrigbleibt, wenn die Zeile und die Spalte, in denen sich das Element befindet, außer acht gelassen werden.

Die Determinanten der verbleibenden Restmatrizen werden Kofaktoren oder Minoren der Einzelelemente genannt. Das Vorzeichen der Kofaktoren erhalten wir, indem der Zeilenindex und der Spaltenindex des Einzelelementes addiert werden. Resultiert eine gerade Zahl, ist der Kofaktor positiv, ist die Summe hingegen eine ungerade Zahl, so ist der Kofaktor negativ.

Ist der Wert der Determinante gleich Null, ist die Matrix singulär.

Bestimmung der Determinante einer 3×3 Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot (8 \cdot 7 - 3 \cdot 0) - 4 \cdot (1 \cdot 7 - 5 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 3 - 5 \cdot 8) \\ &= 2 \cdot 56 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot (-37) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Allgemein:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

für a_{11}: $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit der Determinante $(a_{22} \cdot a_{33}) - (a_{23} \cdot a_{32})$

für a_{21}: $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit der Determinante $(a_{12} \cdot a_{33}) - (a_{13} \cdot a_{32})$

Eigenschaften von Determinanten

1. Die Determinante einer Matrix A ist gleich der Determinante der transponierten Matrix A':
   $|A| = |A'|$

2. Werden 2 Zeilen (oder Spalten) einer Matrix vertauscht, ändert sich lediglich das Vorzeichen des Wertes der Determinante

3. Werden die Elemente einer Zeile (Spalte) mit einer Konstanten multipliziert, verändert sich der Wert der Determinanten um den gleichen Faktor

4. Die Determinante des Produktes zweier quadratischer Matrizen A und B ist gleich dem Produkt der Determinanten der entsprechenden Matrizen:
   $|AB| = |A| \times |B|$

Matrixinversion

Wir suchen eine „Reziprokmatrix“ zu einer Matrix, die so geartet ist, dass das Produkt der beiden Matrizen die Identitätsmatrix ergibt. Die Reziprokmatrix wird als Inverse einer Matrix bezeichnet und erhält den Exponenten -1.

Die Frage lautet: Kann zu einer Matrix A die Inverse A^{-1} gefunden werden, so dass folgende Beziehung gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Die Inverse einer Matrix wird mit Hilfe der folgenden Gleichung bestimmt:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

Mit der adjunkten Matrix $adj(A)$ ist die Matrix der Kofaktoren von A gemeint.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad adj(A) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$adj(A)$ wird folgendermaßen berechnet:

$$a_{11} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 = 0$$

$$a_{21} = -1(1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 2$$

$$a_{31} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

Die Determinante $|A| = 4$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Gegenprobe:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & A^{-1} & = & I \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$