Einlesezeit

Für die Durchsicht der Klausur wird eine Einlesezeit von **10 Minuten** gewährt. Während dieser Zeitdauer ist es Ihnen **nicht** gestattet, mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Dies bedeutet konkret, dass sich während der gesamten Dauer der Einlesezeit keinerlei Schreibgeräte (Stifte, Füller, etc.) auf dem Tisch befinden dürfen sowie die Nutzung von mitgeführten Unterlagen respektive (elektronischer) Wörterbücher bzw. tragbarer Translater strengstens untersagt ist. Nehmen Sie Ihre Schreibgeräte und Unterlagen erst **dann** zur Hand, wenn die Prüfungsaufsicht auf das Ende der Einlesezeit hingewiesen hat und füllen Sie zunächst das Deckblatt **vollständig** aus.

Viel Erfolg!

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL-NR.	
TISCH-NR.	

Klausurunterlagen

Ich versichere hiermit, dass ich sämtliche für die Durchführung der Klausur vorgesehenen Unterlagen erhalten, und dass ich meine Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel und sonstiger unlauterer Mittel angefertigt habe. Ich weiß, dass ein Bekanntwerden solcher Umstände auch nachträglich zum Ausschluss von der Prüfung führt. Ich versichere weiter, dass ich sämtliche mir überlassenen Arbeitsunterlagen sowie meine Lösung vollständig zurück gegeben habe. Die Abgabe meiner Arbeit wurde in der Teilnehmerliste von Aufsichtsführenden schriftlich vermerkt.

Duisburg, den __________ ______________________________
(Unterschrift der/des Studierenden)

Falls Klausurunterlagen vorzeitig abgegeben: ______________Uhr

Bewertungstabelle

Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Aufgabe 3	
Aufgabe 4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
Gesamtpunktzahl	
Anhebungsfaktor	
angehobene Punktzahl	
Bewertung gem. PO in Ziffern	

(Datum und Unterschrift 1. Prüfer, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Söffker)

(Datum und Unterschrift 2. Prüfer, PD Dr.-Ing. Wend)

(Datum und Unterschrift des für die Prüfung verantwortlichen Prüfers, Söffker)

Fachnote gemäß Prüfungsordnung:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0
sehr gut		gut			befriedigend			ausreichend		mangelhaft

Bemerkung: ______________________

Achtung: Schreiben Sie Ihre Antwort für ALLE Aufgaben direkt unter die entsprechende Frage in den Aufgabenbogen!

Maximal erreichbare Punktzahl:	**120**
Mindestprozentzahl für die Note 1,0:	**95%**
Mindestprozentzahl für die Note 4,0:	**50%**

Aufgabe 1 (15 Punkte)
Gegeben sei nachfolgendes technisches System zur Lageregelung einer Welle mit Hilfe zweier magnetischer Radial- und einem magnetischem Axiallager. Entsprechend müssen bei einer vollständigen, elektromagnetischen Lagerung alle drei ebenen Bewegungsrichtungen (x_1, x_2, z) gleichzeitig geregelt werden (nach: Roddeck, W.: *Einführung in die Mechatronik*. 2. Aufl. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 2003) (siehe Abb. 1.1).

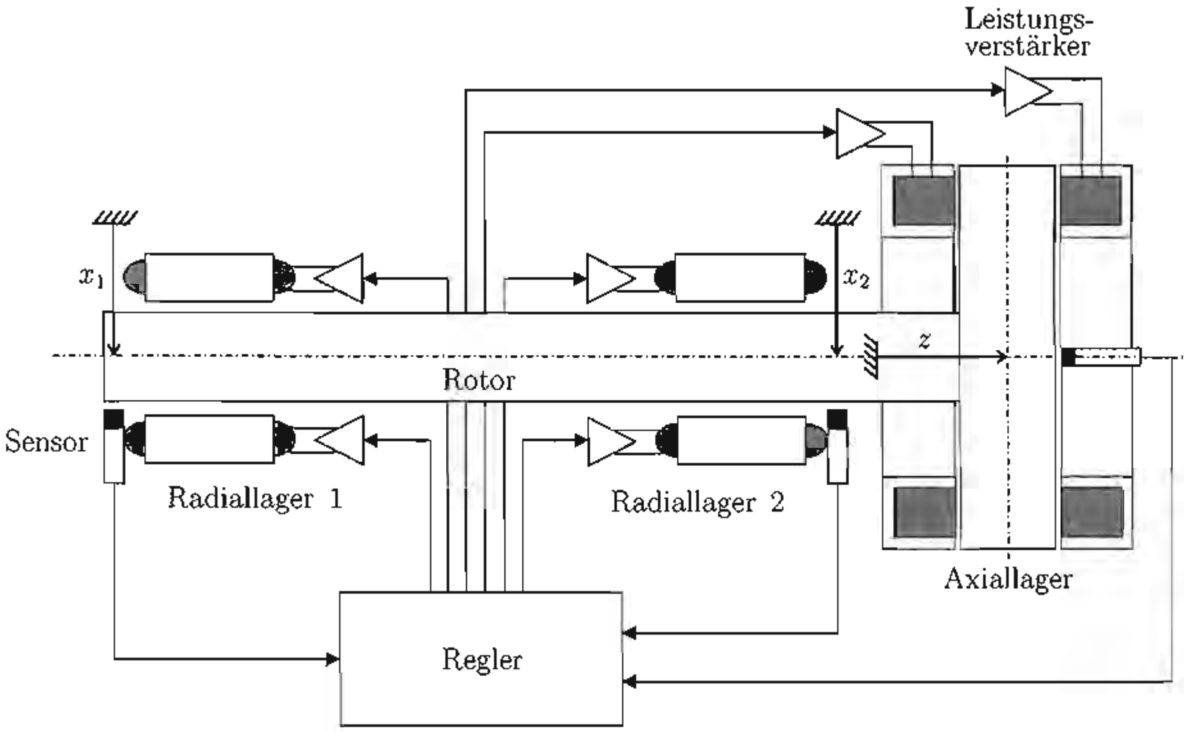
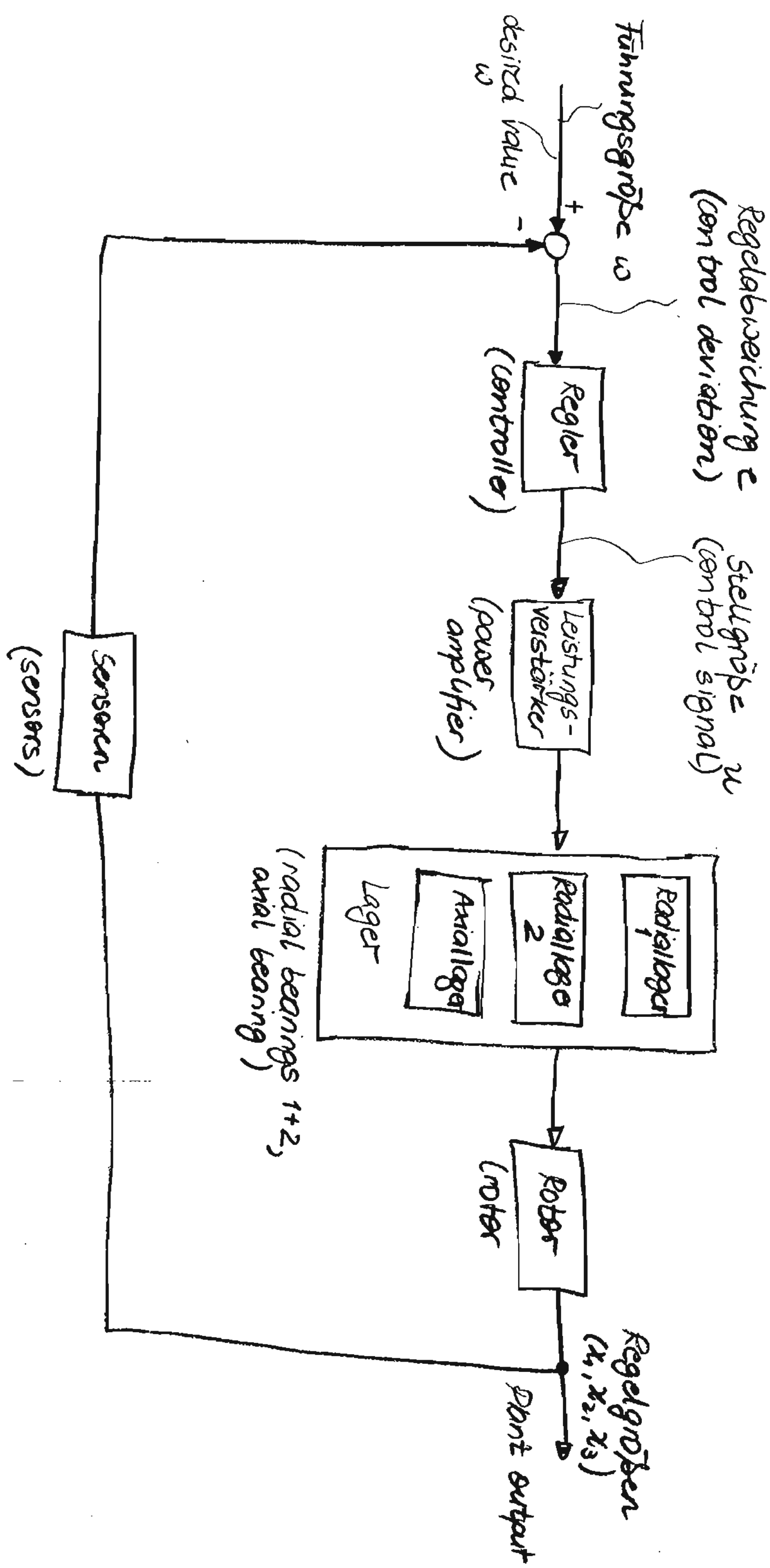


Abbildung 1.1: Regelung einer Welle durch zwei Radial- und ein Axiallager (Roddeck, W.: *Einführung in die Mechatronik*, S. 425)

Zu regeln sind die Positionen der drei Messstellen des sich im Schwerefeld der Erde befindlichen Rotors im ruhenden sowie im drehenden Zustand in Relation zu den eingezeichneten Mittellagen.

a) (3 Punkte)
Zeichnen Sie die separaten Regelkreise für die drei eingezeichneten Koordinatenrichtungen x_1, x_2 und z. Benennen Sie die Elemente und Größen sowie zusätzlich die Regelabweichung und die Stellgröße sowohl in regelungstechnischer Nomenklatur sowie in den Begriffen, wie sie im gezeichneten Beispiel angegeben sind.



b) (1 Punkt)
Klassifizieren Sie das durch die Gleichung $4y+2\dot{y} = 3\dot{u}+5\ddot{u}$ beschriebene Eingangs-/Ausgangsverhalten, wobei u den Ausgang und y den Eingang des Systems darstellen.

$5\dot{u} + 3u = 2y + 4\int y \Rightarrow PIT_1$

c) (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Zahlenwerte der Zeitkonstante der Dynamik T sowie der Integrationszeitkonstante T_I des in Aufgabe 1b) gegebenen Eingangs-/Ausgangsverhalten?

$\frac{5}{3}\dot{u} + u = \frac{2}{3}\left(y + 2\int y\right)$

Zeitkonstante $T = \frac{5}{3}$
(time constant)

Integrationszeitkonstante $T_I = \frac{1}{2}$
(integrational time constant)

d) (2 Punkte)
Bei einem Vorderfahrwerk eines neuartigen Experimentalfahrzeuges wurden die in Abb. 1.2 angegebenen Übergangsfunktionen gemessen.

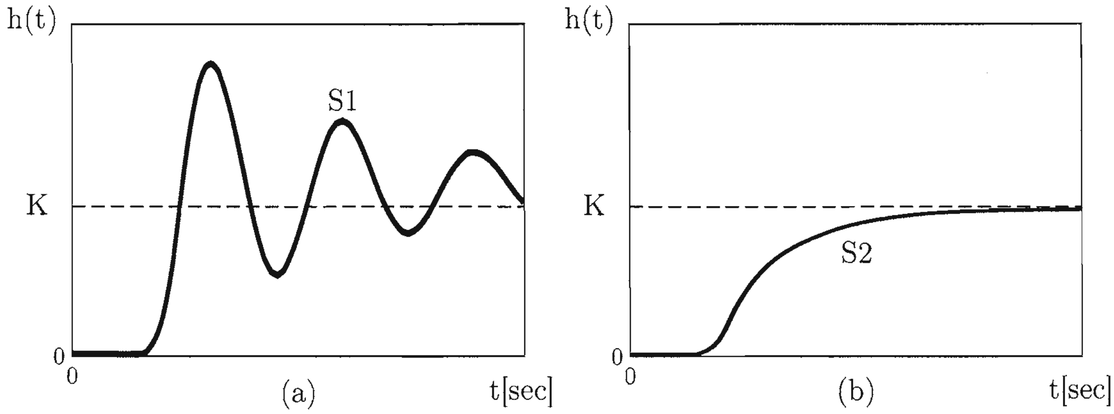


Abbildung 1.2: Übergangsfunktionen

Geben Sie die beschreibenden Differenzialgleichungen der zugrundeliegenden Systeme mit u als Ausgang und y als Eingang an.

$$S1: \quad \frac{1}{\omega_{01}^2}\ddot{u} + \frac{2D_1}{\omega_{01}}\dot{u} + u = K_1\, y(t - T_{t1}), \quad 0 < D_1 < 1$$

$$S2: \quad \frac{1}{\omega_{02}^2}\ddot{u} + \frac{2D_2}{\omega_{02}}\dot{u} + u = K_2\, y(t - T_{t2}), \quad D_2 \geq 1$$

e) (2 Punkte)
Welcher zentrale physikalische Unterschied zeigt sich in den in Abb. 1.2(a) und Abb. 1.2(b) angegebenen Übergangsverhalten?

Welcher konkrete Parameter beschreibt (abhängig von der konkreten Zahl) die Fähigkeit eines Systems sowohl ein Übergangsverhalten nach Abb. 1.2(a) wie auch nach Abb. 1.2(b) aufzuweisen?

- Schwingungen treten auf
  (Oscillation appears)

- Dampfung (Damping)

f) (2 Punkte)
Die vereinfachte Beschreibung des Bewegungsverhaltens eines ventilgeregelten Hydraulikzylinders erfolgt durch die Gleichungen

$$\dot{p}_{\mathrm{A}} = \frac{E}{V_{\mathrm{A}}}\left(Q_{\mathrm{A}} - A_{\mathrm{A}}\dot{x}\right),$$
$$\dot{p}_{\mathrm{B}} = \frac{E}{V_{\mathrm{B}}}\left(Q_{\mathrm{B}} - A_{\mathrm{B}}\dot{x}\right), \text{ und}$$
$$m\ddot{x} = p_{\mathrm{A}}A_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}}A_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{ext}}$$

wobei
$p_{\mathrm{A,B}}$: Druck in Kammer A oder B
$A_{\mathrm{A,B}}$: Druckbeaufschlagte Fläche in Kammer A oder B
$V_{\mathrm{A,B}}$: Volumen der Kammer A oder B
$Q_{\mathrm{A,B}}$: Volumenstrom der Kammer A oder B
E : Kompressionsmodul
m : Masse
x : Zylinderstangenposition
F_{ext} : Extern angreifende Kraft

beschreiben und die Größe $\dot{x}$ gemessen wird.
Die Matrizen A und C der Zustandsraumbeschreibung lauten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{EA_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{A}}} \\ 0 & 0 & -\frac{EA_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}} \\ \frac{A_{\mathrm{A}}}{m} & -\frac{A_{\mathrm{B}}}{m} & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es sei $m = 0,5$ sowie $A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{A}} = 2$ und $V_{\mathrm{B}} = 1$. Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems in Abhängigkeit von E.

charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - 4\lambda E = 0$
(characteristical polynom)

i) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{E}$ $(E \geq 0)$

ii) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2j\sqrt{-E}$ $(E < 0)$

☐

g) (2 Punkte)
Das in Abb. 1.3 gezeigte System ist hinsichtlich seiner stationären Genauigkeit zu untersuchen.

Welche stationäre Abweichung $e(t \to \infty)$ weist das System für einen Einheitssprung mit $w = 1(t)$ und $D > 1$ auf?

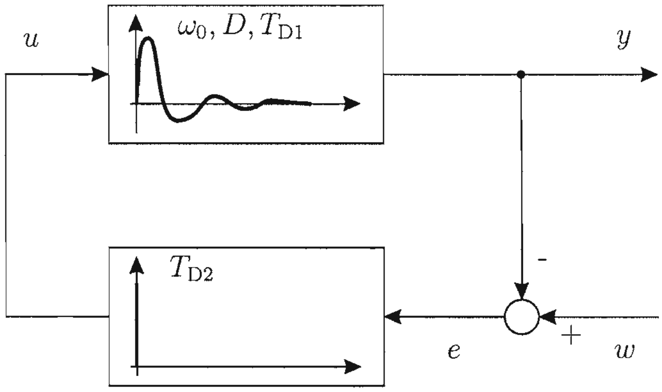


Abbildung 1.3: Blockschaltbild eines Systems

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2} + T_{D1} T_{D2}\right) \ddot{y} + \frac{2D}{\omega_0} \dot{y} + y = T_{D1} T_{D2} \ddot{w}$$

- stationärer Endwert : $y(\infty) = 0$
  (stationary end value)

- stationäre Abweichung : $e(\infty) = w - y(\infty) = 1$
  (stationary deviation)

h) (1 Punkt)
Welchen dringenden Rat für den Reglerentwurf zur Regelung einer rein integralen Strecke (IT_0-Übertragungsverhalten) können Sie prinzipiell aussprechen, wenn der Reglerentwurf vornehmlich der Realisierung stationärer Genauigkeit dient und Schwingungen nicht zusätzlich angeregt werden sollen? Begründen Sie Ihre Antwort.

keine integrale Rückführung verwenden
(Do not apply integral feedback.)

$\square$

$\sum \square$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei das Blockschaltbild (Abb. 2.2) einer schwebenden Kugel (Abb. 2.1). Die Kugel wird als Massepunkt mit der Masse m modelliert. Durch einen Aktor wird eine Magnetkraft f erzeugt, um die Position der Kugel zu regeln. Die Kraft hängt von der Position der Kugelauslenkung x und dem Spulenstrom i des Aktors ab. Zur Ermittlung der Kugelauslenkung wird ein Sensor eingesetzt.

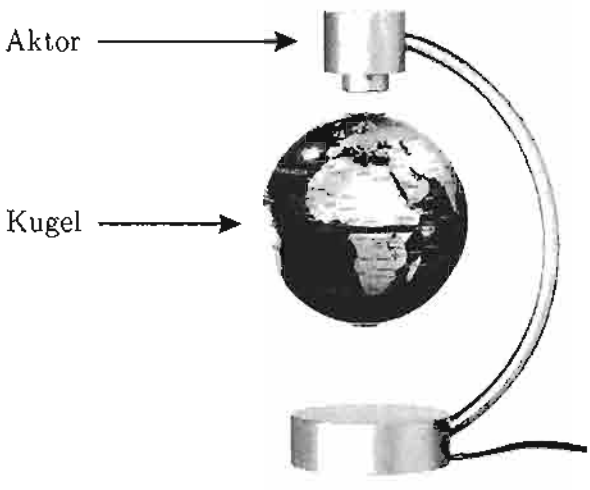


Abbildung 2.1: Schwebende Kugel (www.techgalerie.de)

Auf Basis des Sensorsignals berechnet der Regler die Stellgröße i_r, um die Strecke zu regeln. Zur Minimierung des Messrauschens kann ein Filter benutzt werden.

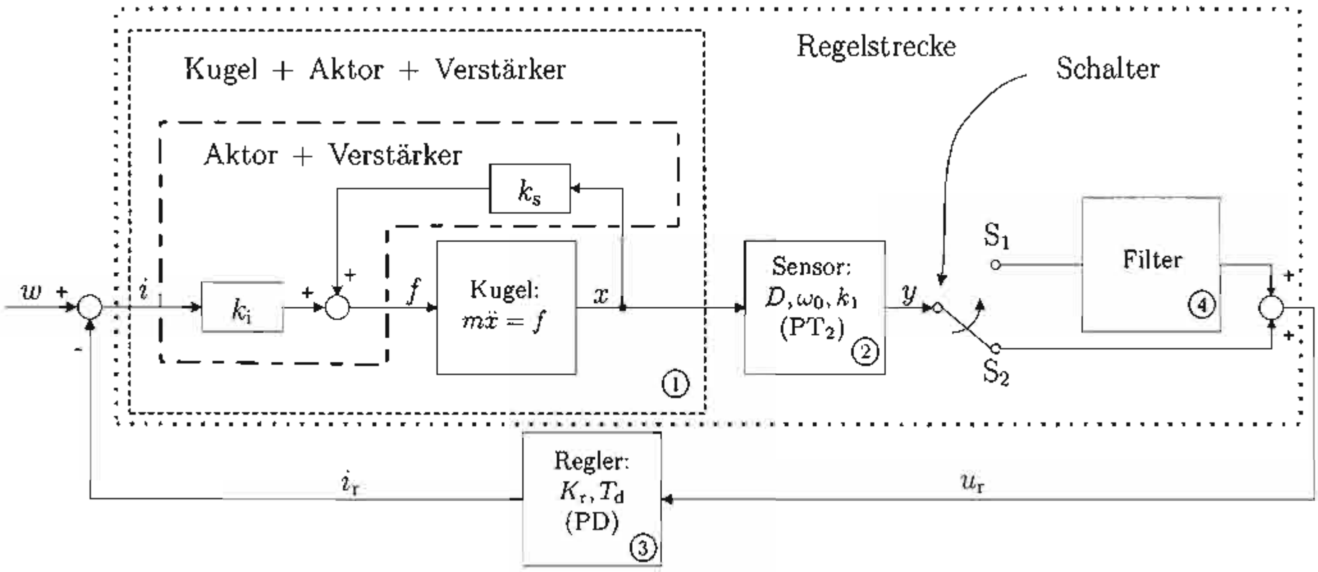


Abbildung 2.2: Blockschaltbild der schwebenden Kugel

a) (5 Punkte)
In Abb. 2.2 wird für die Aktordynamik ein lineares Übertragungsverhalten angenommen. Messungen ergeben jedoch die Beziehung

$$f = k_0 \left(\frac{(i_b + i)^2}{(s_0 - x)^2} - \frac{(i_b - i)^2}{(s_0 + x)^2} \right),$$

wobei gelten:
- k_0 : Systemkonstante,
- i_b : Vormagnetisierungsstrom (konstant),
- s_0 : Luftspalt (konstant),
- i : Spulenstrom (Stellgröße) und
- x : Kugelauslenkung.

Geben Sie die Parameter k_i und k_s der linearisierten Beziehung

$$f(i, x) = k_i i + k_s x$$

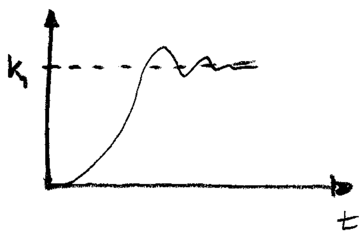
in Bezug auf den Arbeitspunkt ($i_0 = 0$, $x_0 = 0$) an.

$$f = f(0,0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{i=0\\x=0}} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{\substack{i=0\\x=0}} \Delta i$$

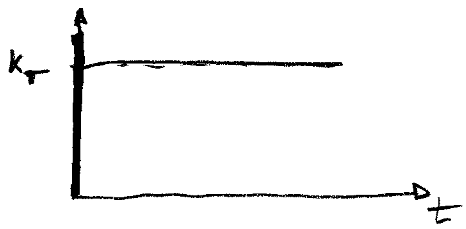
$$= \underbrace{\frac{4 k_0 i_b^2}{s_0^3}}_{k_s} \Delta x + \underbrace{\frac{4 k_0 i_b}{s_0^2}}_{k_i} \Delta i$$

b) (5 Punkte)
Skizzieren Sie qualitativ die Übergangsfunktionen der Elemente ② und ③. Geben Sie die Differenzialgleichungen der Elemente ①, ② und ③ an.

②: Sensor (sensor)



③: Regler (controller)



②: $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y} + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y} + y = k_1 x$

③: $i_r = k_r \left(u_r + T_d \dot{u}_r \right)$

①: $m\ddot{x} = k_i i + k_s x$

c) (3 Punkte)
Klassifizieren Sie das Übertragungsverhalten der Regelstrecke ohne Filter (Schalterstellung S_2).

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y} + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y} + y = k_1 x \\ m\ddot{x} = k_i i + k_s x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} y^{(4)} + \frac{2D}{\omega_0} y^{(3)} + \left(1 - \frac{k_s}{m\omega_0^2}\right)\ddot{y} - \frac{2k_s D}{m\omega_0}\dot{y} - \frac{k_s}{m} y = \frac{k_1 k_i}{m} i$$

$\Rightarrow PT_4$

d) (3 Punkte)
Nehmen Sie nachfolgend für den Sensor die Differenzialgleichung

$$10^{-8}\ddot{y} + 10^{-4}\dot{y} + y = x$$

an. Was kann über die Stabilität der Regelstrecke ohne Filter (Schalterstellung S_2) ausgesagt werden ($m, k_s > 0$)? Begründen Sie Ihre Antwort.

charakteristische Gleichung (characteristic equation) $m\lambda^2 - k_s = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k_s}{m}}$

$\Rightarrow$ Ein Eigenwert ist positiv (one of the eigenvalues is positive) $\Rightarrow$ Strecke instabil. (plant unstable)

e) (2 Punkte)
Für die Signalaufbereitung kann optional ein Filter (Element ④) zugeschaltet werden (Schalterstellung S_1). Die Übergangsfunktion des Filters wurde gemessen und ist in Abb. 2.3 dargestellt.

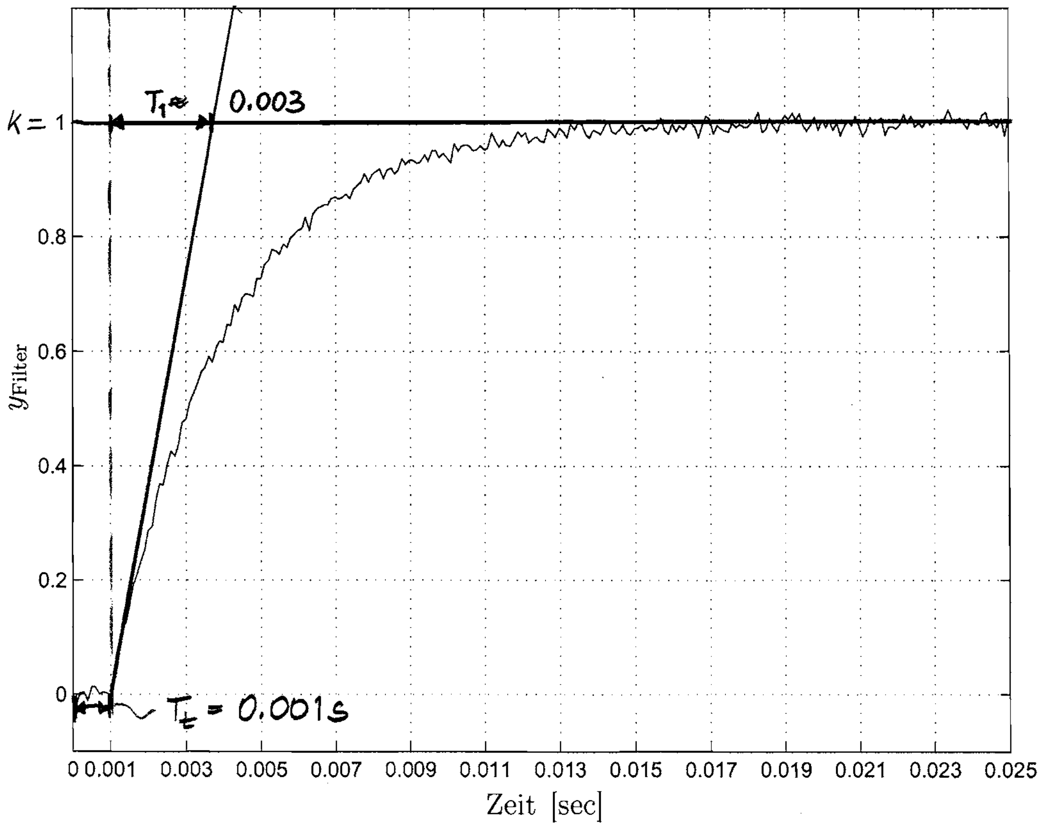


Abbildung 2.3: Experimentell bestimmte Übergangsfunktion des Filters

Klassifizieren Sie das Übertragungsverhalten des Filters unter Vernachlässigung des Messrauschens und bestimmen Sie die, aus der Zeichnung ablesbaren, Parameter der beschreibenden Differenzialgleichung.

$PT_1 T_t$ - Element : $k \approx 1$, $T_t \approx 0.001$, $T_1 \approx 0.003$

f) (7 Punkte)
Zur Auslegung des Reglers wird für den Sensor vereinfachend ein Proportionalelement ($k_1 = 1$) verwendet. Zudem wird das Filter (Element ④) vernachlässigt (Schalterstellung S_2).

Der Regler soll ein PD-Übertragungsverhalten (K_r, T_d) aufweisen. Das Gesamtsystem kann als Feder-Masse-Dämpfer-System, beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0,$$

betrachtet werden. Dabei sollen die Anforderungen erfüllt werden:

1. Die Beruhigungszeit sei $T_\epsilon = 0{,}004$ (Hinweis: $T_\epsilon = \frac{4}{D\omega_0}$, D: Dämpfungsgrad).
2. Das System soll nicht schwingfähig sein.
3. Das System soll so schnell wie möglich reagieren.

Welche Parameter K_r und T_d des Reglers erfüllen die gegebenen Anforderungen? Nutzen Sie hierfür die Parameter

$$m = 3,$$
$$k_s = 1000000 \quad \text{und}$$
$$k_i = 400.$$

Anforderungen (requirements) 2,3 $\Rightarrow$ $D = 1$.

$$T_\varepsilon = \frac{4}{D\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{4}{DT_\varepsilon} = 1000$$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow k = m\omega_0^2 = 3\,000\,000$$
$$d = 2D\omega_0 m = 6\,000$$

$$m\ddot{x} - k_s x = k_i\, i = k_i(-k_r(x + T_d\dot{x}))$$

$$\Rightarrow k = k_i k_r - k_s \Leftrightarrow k_r = 10\,000$$
$$d = k_i k_r T_d \Leftrightarrow T_d = 1.5e^{-3}$$

$\square$

$\sum \square$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

a) (3 Punkte)
Berechnen Sie die inverse Laplacetransformierte $u(t)$ der Funktion

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+2s+1)}.$$

$$1 = s^2(s+1)\left(\frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s^2}\right)$$

$$1 = s^2 A_1 + s(s+1) A_2 + (s+1) A_3$$

Koeffizentenvergleich (comparization of coefficients):

$$\Rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = e^{-t} - 1 + t$$

b) (4 Punkte)
Ein PIDT$_1$T$_t$-System wird durch die Differenzialgleichung

$$T_1\dot{y} + y = K\left[u(t-T_t) + T_D\dot{u}(t-T_t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t u(\tau - T_t)d\tau\right]$$

beschrieben. Geben Sie das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems in Form einer Übertragungsfunktion an. Bestimmen Sie, abhängig von den Parametern K, T_1, T_I, T_D und T_t, die Eckfrequenzen unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$K, T_1, T_D, T_I, T_t > 0, \quad T_I < 4T_D \quad \text{und} \quad \frac{1}{T_1} > \frac{1}{\sqrt{T_D T_I}}.$$

Skizzieren Sie qualitativ das sich ergebene Bodediagramm und kennzeichnen Sie die Steigungen sowie die Eckfrequenzen des approximierten Verlaufes.

$$G(s) = \frac{K(T_I s + T_D T_I s^2 + 1)}{T_I s\,(1 + T_1 s)}\, e^{-sT_t}$$

Nullstellen (zeros): $s_{01,02} = \dfrac{-T_I \pm \sqrt{T_I^2 - 4T_D T_I}}{2T_D T_I}$

$T_I > 0,\ T_I < 4T_D \Rightarrow T_I^2 - 4T_D T_I < 0$

$\Rightarrow s_{01,02}$ konjugiert-komplexe Nullstelle
(complex conjugate zeros)

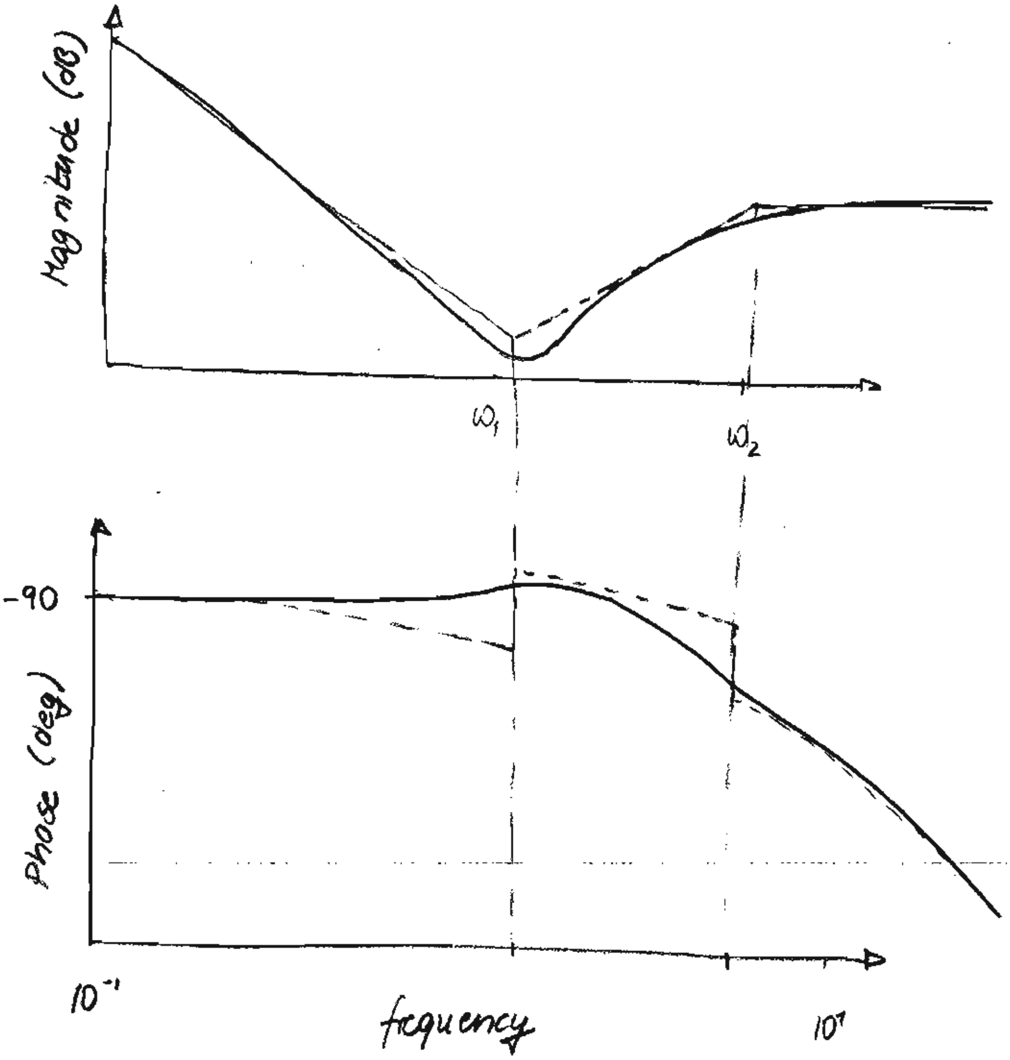
Eckfrequenz
(cut-off frequency) $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{T_D T_I}}$

Polstellen (poles): $s_1 = 0,\ s_2 = -\dfrac{1}{T_1}$

$\omega_2 = \dfrac{1}{T_1}$

$\dfrac{1}{T_1} > \dfrac{1}{\sqrt{T_D T_I}} \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$

Bode diagram



c) (2 Punkte)
Ein Übertragungselement mit PDT_1-Verhalten werde mit einem Übertragungselement mit PI-Verhalten als Regler in Mitkopplung (positive Rückführung) geschaltet.

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_0(s)$.

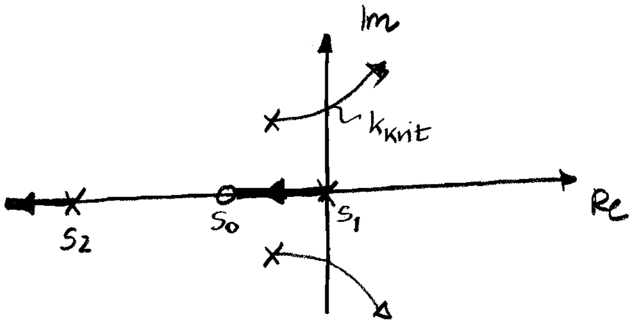
$$G_{PI} = k_1 \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

$$G_{PDT_1} = k_2 \frac{1 + T_D s}{1 + T_1 s}$$

$$G_0 = k_1 k_2 \frac{(1 + T_D s)\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)}{1 + T_1 s}$$

d) (3 Punkte)
Ein Regelungssystem mit Gegenkopplung (negative Rückführung) soll untersucht werden. Es besteht aus einem stabilen PT_2-System mit einem konjugiert-komplexen Polpaar sowie einem Regler mit PIT_1-Verhalten.

Begründen Sie an Hand der qualitativ gezeichneten Wurzelortskurve des Systems, dass das System für große Reglerverstärkungen instabil wird.



$$G_{PIT_1} = \frac{k(T_I s + 1)}{T_I s (T s + 1)}$$

2 Pole (poles): $s_1 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{T}$

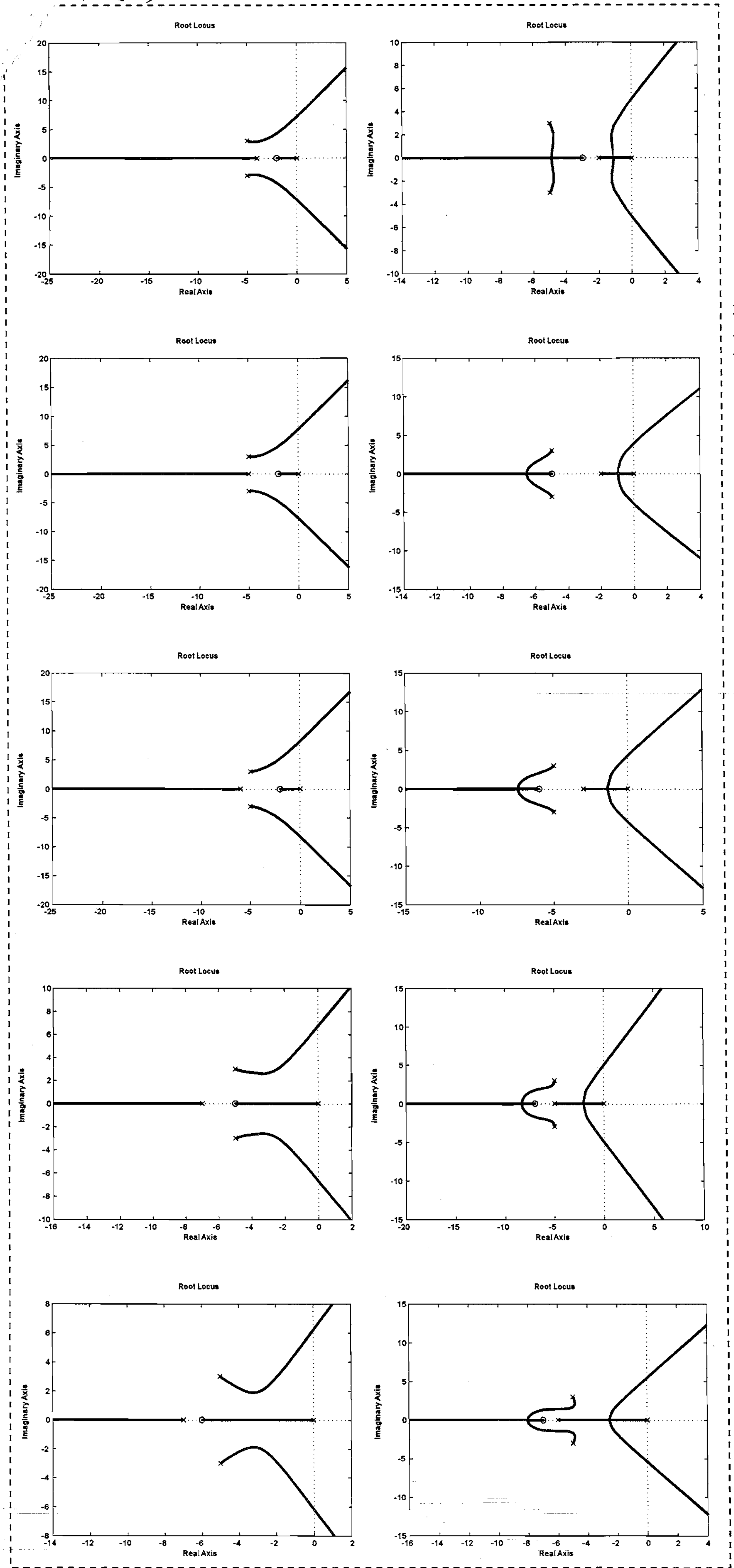
Nullstelle (zero): $s_0 = -\frac{1}{T_I}$

PT_2-system: Polpaar p_1, p_2 (pair of poles)

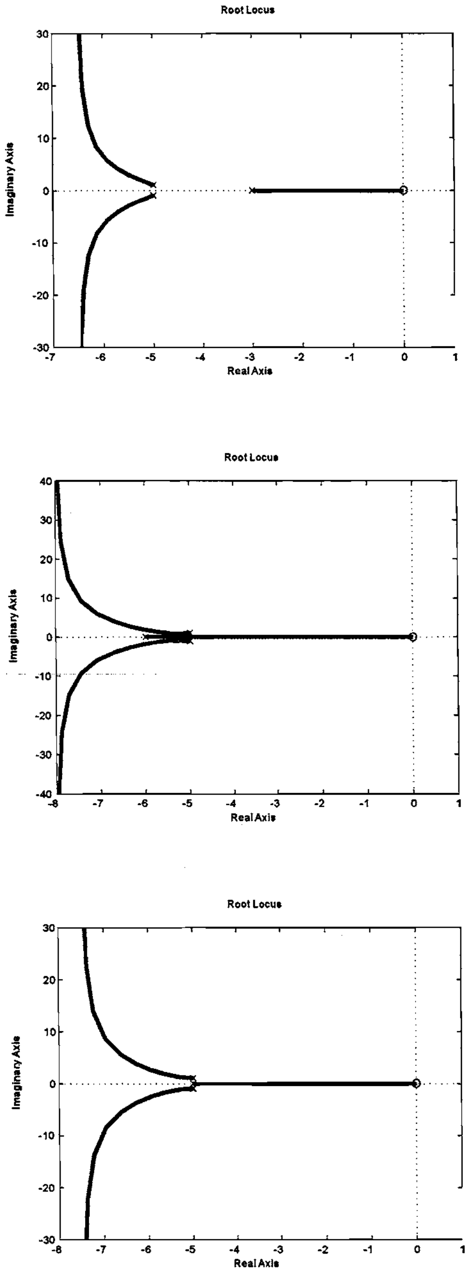
Wenn $k_S > k_{rit}$ ist der Regelkreis instabil (WOK verläuft in der rechten s-Halbebene)

If $k_S > k_{krit}$ the system is unstable (root locus plot is located in the right s-half plane)

A3_d)

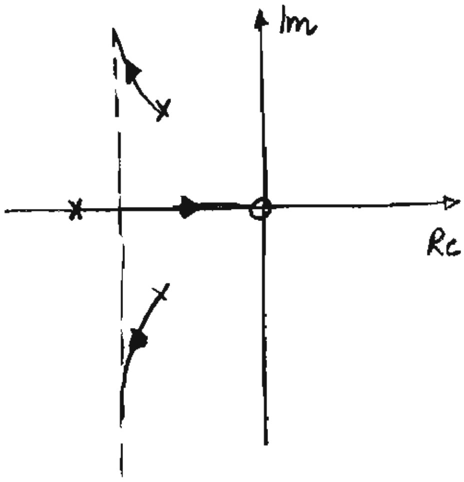

Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis

A3_e


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis

e) (3 Punkte)
Ein Regelungssystem in Gegenkopplung (negative Rückführung) bestehend aus einem stabilen PT_2-System mit einem konjugiert-komplexen Polpaar sowie einem Regler mit DT_1-Verhalten soll untersucht werden.

Begründen Sie an Hand der qualitativ gezeichneten Wurzelortskurve des Systems welches Stabilitätsverhalten (instabil, grenzstabil, asymptotisch stabil) das geregelte System für sehr große Reglerverstärkungen aufweist.



PT_2-system:

Polpaar p_1, p_2
(pair of poles)

$$G_{DT_1} = \frac{K_D s}{T_1 s + 1}$$

Pole (poles): $s_1 = -\frac{1}{T_1}$

Nullstellen (zeros): $s_0 = 0$

Wenn $K \to \infty$ verläuft WOK an Im-Achse
$\Rightarrow$ grenzstabil

(If $K \to \infty$ the root locus plot is on the Im-axis
$\Rightarrow$ boundary stable)

$\sum$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Für einen Elektromotor soll eine Regelung für die Position φ des Rotors entworfen werden. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ des Rotors kann in Abhängigkeit der anliegenden Klemmenspannung $u(t)$ näherungsweise durch

$$T_2 \iint \omega(t)\ dt\ dt + T_1 \int \omega(t)\ dt + \omega(t) = k_1 \int u(t)\ dt + k_2 \iint u(t)\ dt\ dt$$

angegeben werden.
Die Positionsregelung soll mit Hilfe eines Reglers mit dem Übertragungsverhalten

$$\frac{1}{T_\mathrm{I}} \int u(t)\ dt = k_\mathrm{R}\ \varphi(t)$$

realisiert werden. Der Regler wird in Gegenkopplung (negative Rückführung) zum Elektromotor verschaltet.

a) (6 Punkte)
Klassifizieren Sie das Übertragungsverhalten $G_\mathrm{S}(s) = \frac{\varphi(s)}{u(s)}$ und $G_\mathrm{R}(s) = \frac{u(s)}{\varphi(s)}$ von Strecke und Regler. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_\mathrm{O}(s)$ des offenen Regelkreises an und klassifizieren Sie das resultierende Übertragungsverhalten.

$$T_2 \varphi + T_1 \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} = k_1 u + k_2 \int u \quad \Rightarrow \quad PIT_2$$

$$\frac{1}{T_I} u = k_R \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad D$$

$$G_S(s) = \frac{\varphi(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{s}k_2 + k_1}{T_2 + T_1 s + s^2}$$

$$G_R(s) = \frac{u(s)}{\varphi(s)} = k_R T_I s$$

$$G_O(s) = \frac{(k_1 s + k_2)\ T_I k_R}{s^2 + T_1 s + T_2} \quad \Rightarrow \quad PDT_2$$

☐

b) (2 Punkte)
Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ für das Gesamtsystem (Elektromotor mit Positionsregelung in Gegenkopplung (negative Rückführung)) an und klassifizieren Sie das Übertragungsverhalten.

$$G(s) = \frac{T_I k_R (k_1 s + k_2)}{s^2 + (T_1 + k_1 T_1 k_R) s + (T_2 + k_2 T_I k_R)}$$

$\Rightarrow$ PDT_2

c) (6 Punkte)
Drei Systeme werden jeweils mit einem P-Regler in Gegenkopplung (negative Rückführung) geschaltet. Für die Übertragungsfunktionen der offenen Regelkreise wurden folgende Pole und Nullstellen bestimmt:

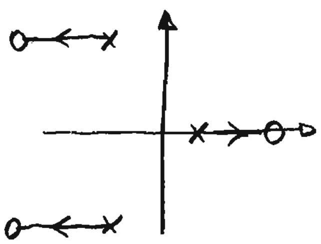
System 1:
Nullstellen: $s_{01} = -3 + i$; $s_{02} = -3 - i$; $s_{03} = 2$
Polstellen: $s_1 = -1 + i$; $s_2 = -1 - i$; $s_3 = 0,1$

System 2:
Nullstellen: $s_{01} = -2 + 2i$; $s_{02} = -2 - 2i$
Polstellen: $s_1 = 1 + i$; $s_2 = 1 - i$; $s_3 = -0,1$; $s_4 = -1$

System 3:
Nullstellen: $s_{01} = -2$; $s_{02} = -1$
Polstellen: $s_1 = 2 + i$; $s_2 = 2 - i$

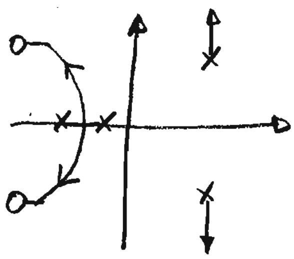
Begründen Sie an Hand von qualitativ gezeichneten Wurzelortskurven, welches dieser Systeme im Hinblick auf Stabilität und Dämpfungsmaximierung zu bevorzugen ist und stellen Sie für das entsprechende System die Übertragungsfunktion $G(s)$ auf.

System 1:



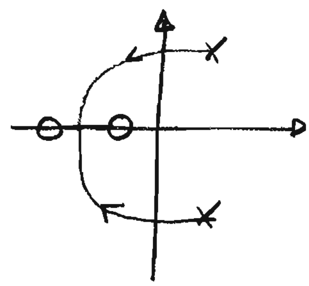
instabil

System 2:



instabil

System 3:



System kann stabilisiert werden
(system can be stabilized.)

$$G(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2-4s+5}$$

d) (6 Punkte)
Eine Regelstrecke $G_S(s)$ mit dem dynamischen Übertragungsverhalten

$$G_S(s) = \frac{4 + \frac{1}{s}}{s^2 + 3s + 2}$$

soll mit einem Regler mit der gegebenen Übertragungsfunktion

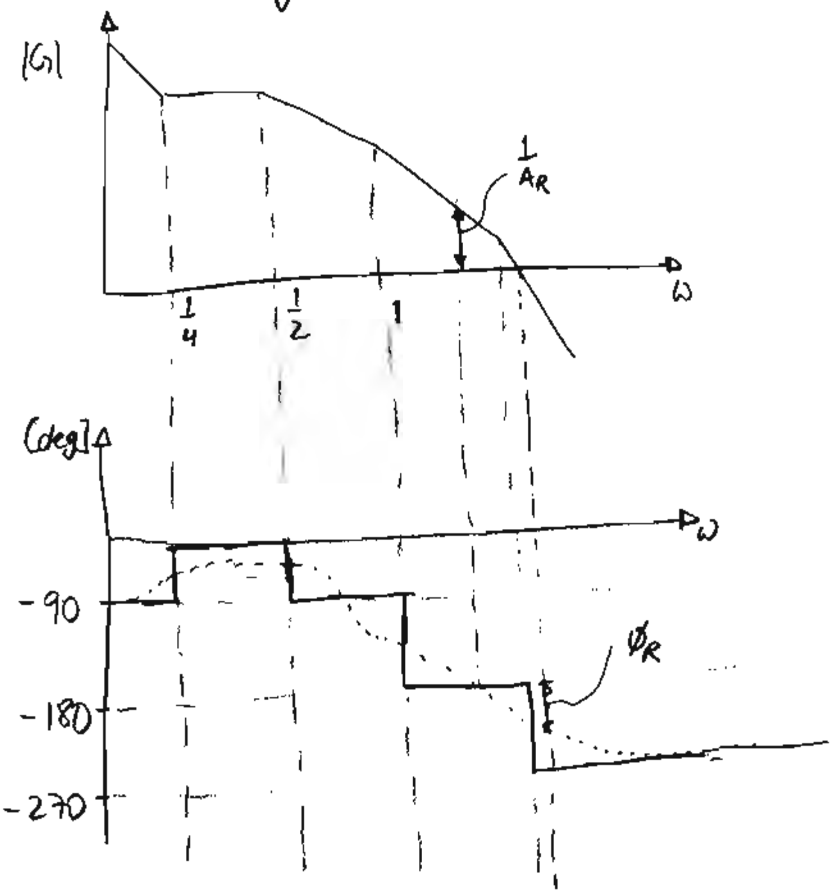
$$G_R(s) = \frac{4}{2s + 1}$$

durch negative Rückführung geregelt werden. Bestimmen Sie für das resultierende offene System die Übertragungsfunktion und geben Sie die zugehörigen Null- und Polstellen sowie qualitativ das Bodediagramm und die dazugehörige Ortskurve an. Bestimmen Sie im Bodediagramm grafisch den Phasen- und Amplitudenrand für das gegebene System.

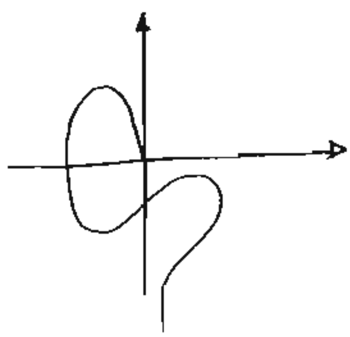
$$G(s) = \frac{4 + 16s}{2s^4 + 7s^3 + 7s^2 + 2s}$$

$s_{01} = -\frac{1}{4}$, $s_1 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{2}$, $s_3 = -1$, $s_4 = -2$

Bode diagram(m):



Ortskurve (root locus):



□

$\sum$

Aufgabe 5 (25 Punkte)
Ein Hydraulikmotor wird mit einer Verstärkereinheit in Reihe geschaltet (siehe Abb. 5.1).

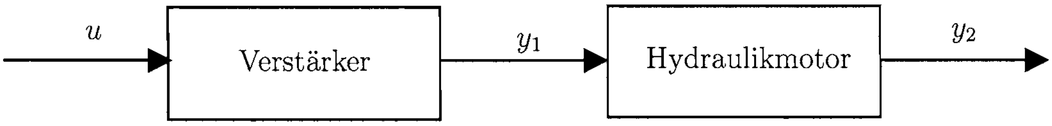


Abbildung 5.1: System

Das Verhalten des Hydraulikmotors kann näherungsweise durch

$$G_{\mathrm{H}}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{2s^2 + 4s + 2}$$

beschrieben werden.
Das Übertragungsverhalten des Verstärkers kann durch

$$G_{\mathrm{V}}(s) = \frac{10 + 2s}{s^2 + 2s + 1}$$

beschrieben werden.

a) (9 Punkte)
Geben Sie für das resultierende Gesamtsystem die Zustandsraumdarstellung sowie die Eigenwerte und mindestens zwei Eigenvektoren an.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \\ x^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

char. poly.: $\lambda(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für die folgenden Betrachtungen wird eine vereinfachte Beschreibung der gegebenen Regelstrecke

$$G(s) = \frac{10 + \frac{1}{T_I s}}{s^3 + 4s^2 + T_1 s + 2}$$

angenommen.
Zur Regelung der Regelstrecke soll nun ein Regler in Gegenkopplung (negative Rückführung) mit dem Übertragungsverhalten

$$G_R(s) = K_R(s+2)$$

verwendet werden.

b) (4 Punkte)
Geben Sie für $K_R = 0,2$ und $T_1 = 3$ die Hurwitz-Matrix für das geschlossene System an.

$$G_c(s) = \frac{2s^2 + \left(4 + \frac{0.2}{T_I}\right)s + \frac{0.4}{T_I}}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + \left(6 + \frac{0.2}{T_I}\right)s + \frac{0.4}{T_I}}$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 6 + \frac{0.2}{T_I} & 0 & 0 \\ 1 & 5 & \frac{0.4}{T_I} & 0 \\ 0 & 4 & 6 + \frac{0.2}{T_I} & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{0.4}{T_I} \end{bmatrix}$$

Nehmen Sie für das Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises im Folgenden die vereinfachte allgemeine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s + 1}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + T_1 s + 1}$$

an.

c) (4 Punkte)
Geben Sie an, für welche Werte für T_1 der geschlossene Kreis stabil ist. (Hinweis: $9 < \sqrt{84} < 10$)

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$T_1 > 0$

$|H_1| > 0$: $a_3 = 4 > 0$

$|H_2| > 0$: $20 - T_1 > 0 \Rightarrow T_1 < 20$

$|H_3| > 0$: $10 - \sqrt{84} < T_1 < 10 + \sqrt{84}$

$|H_4| = |H_3|$

$\Rightarrow$ stabil, wenn $10 - \sqrt{84} < T_1 < 10 + \sqrt{84}$
(stable ~~for~~)

d) (8 Punkte)
Der in b) beschriebene offene Regelkreis soll durch einen zusätzlichen P-Regler mit der Reglerverstärkung K_{Regler} in negativer Rückkopplung geregelt werden. Für die Systemparameter gilt $T_1 = 5$, $T_I = 0,1$ und $K_R = 0,1$. Zeichnen Sie für das resultierende System die Wurzelortskurve und bestimmen Sie

i) für welchen Wertebereich für K_{Regler} die Stabilität des geschlossenen Kreises garantiert werden kann und

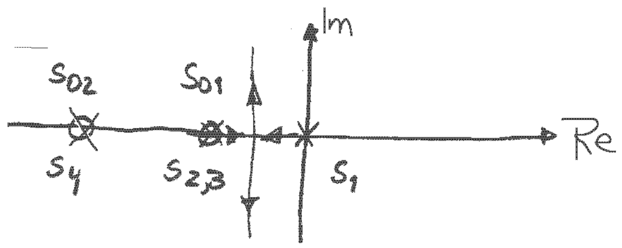
ii) für welchen Wertebereich für K_{Regler} der geschlossene Kreis die maximale Systemdämpfung besitzt.

$$G(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^4+4s^3+5s^2+2s}$$

$s_{01} = -1$, $s_{02} = -2$

$s_1 = 0$, $s_{2,3} = -1$, $s_4 = -2$

WOK (root locus)



i) $K_{regler} > 0$
($K_{controller} > 0$)

ii) Verzweigungspunkt: $a = -0.5$
(breakaway point)

$K_{regler}(-0.5) = \frac{1}{4} \Rightarrow K_{regler} \leq \frac{1}{4}$
($K_{controller}$) ($K_{controller}$)

$\sum \square$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben sei das folgende Blockschaltbild eines Gleichstromantriebes mit den Parametern $K_1 = 50$, $T_1 = 0,005$ sowie $K_2 = 2$, $T_2 = 0,02$ und $T_I = 2$, die im Folgenden zu verwenden sind.

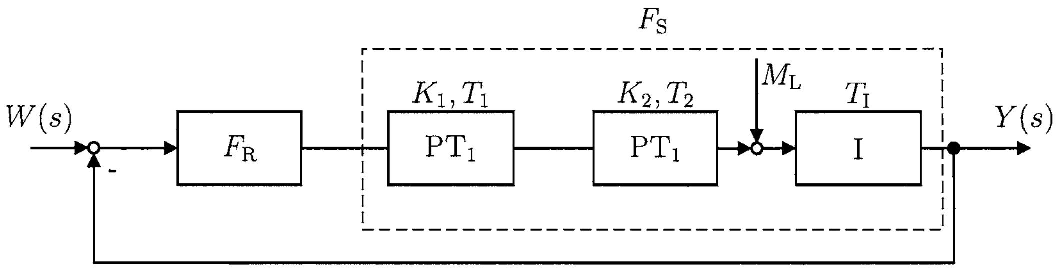


Abbildung 6.1: Blockschaltbild eines Gleichstromantriebes

a) (3 Punkte)
Geben Sie das Übertragungsverhalten der Regelstrecke $F_S(s)$ an ($M_L = 0$) und berechnen Sie die Pol- und Nullstellen.

$$F_s = \frac{K_1}{1+T_1 s} \; \frac{K_2}{1+T_2 s} \; \frac{1}{T_I\, s}$$

$$F_s = \frac{50}{(1+0,005s)(1+0,02s)\,s}$$

Nullstellen (zeros): keine (none)

Pole (poles): $s_1 = -200$, $s_2 = -50$, $s_3 = 0$

b) (3 Punkte)

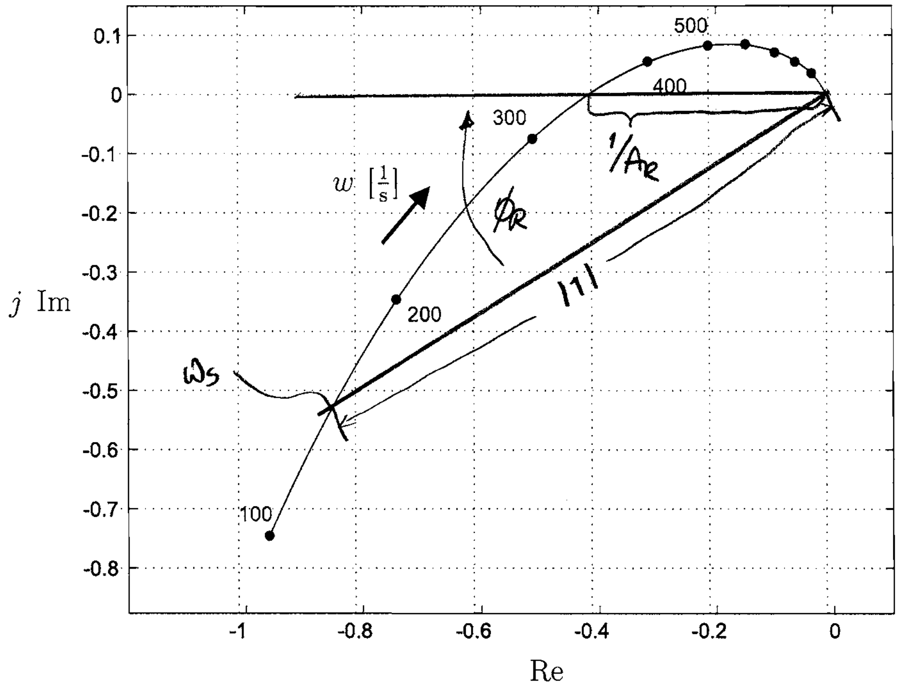


Abbildung 6.2: Ortskurve des offenen Systems

Als Regler F_R für das System in a) wird ein Element mit P-Übertragungsverhalten mit $K_R = 4$ eingesetzt. Bestimmen Sie grafisch (durch Einzeichnen) aus der in Abb. 6.2 gegebenen Ortskurve des offenen Systems die Amplitudenreserve A_R, die Phasenreserve ϕ_R sowie die Schnittfrequenz ω_S. Geben Sie die jeweilig zugehörigen Werte an.

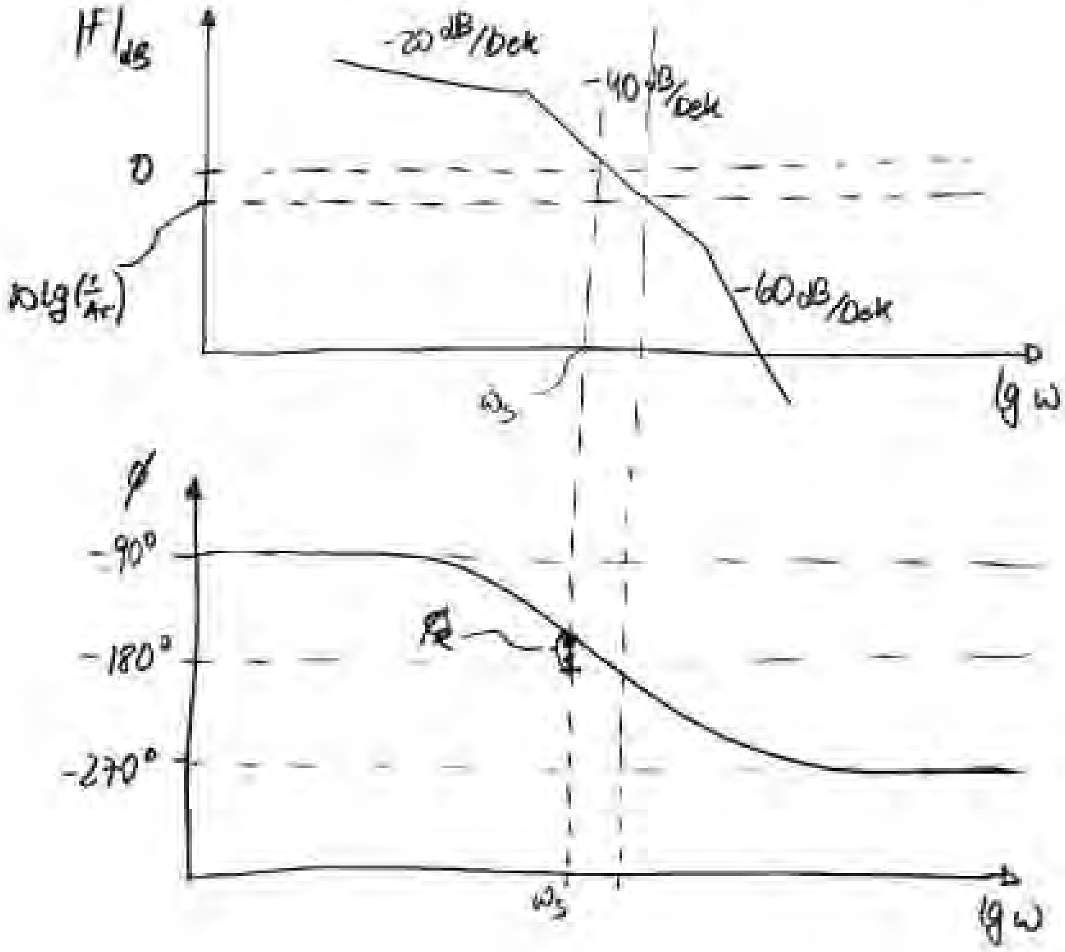
$\phi_R \approx 30^\circ$

$\frac{1}{A_R} \approx 0{,}4 \Rightarrow A_R \approx 2{,}5$

$\omega_S = 150$

□

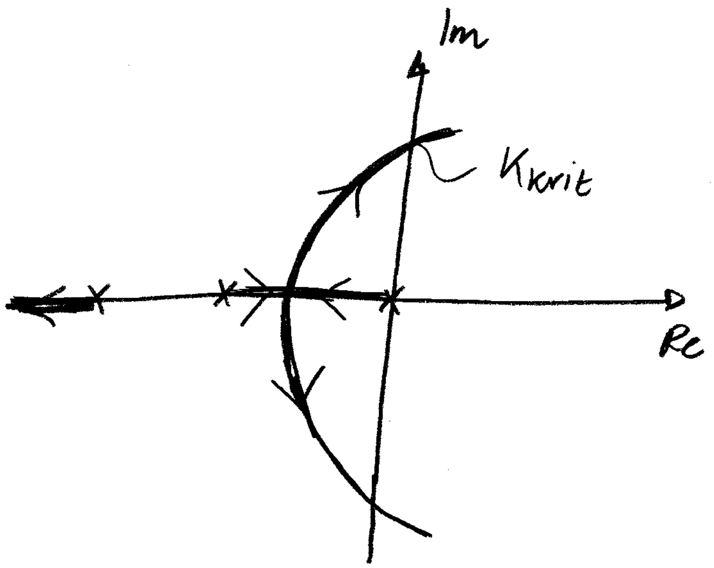
c) (4 Punkte)
Zeichnen Sie qualitativ das Bodediagramm des in a) bis b) gegebenen Systems und kennzeichnen Sie hierin die Amplitudenreserve A_R und die Phasenreserve ϕ_R sowie die Schnittfrequenz ω_S. Geben Sie zusätzlich die Steigungen des Amplitudenganges entsprechend der Abschnitte an.



d) (5 Punkte)
Die Strecke F_S aus a) soll nun mit einem Element mit PDT_1 Übertragungsverhalten mit $T_D = 0,02$ sowie $T = 0,001$ und K in Gegenkopplung (negative Rückführung) geregelt werden. Geben Sie die Übertragungsfunktionen für den Regler sowie für den offen Regelkreis an. Skizzieren Sie qualitativ die Wurzelortskurve für das Gesamtsystem und zeichnen Sie K_{krit} ein.

$$PDT_1: \quad F_R = K \frac{1+T_D s}{1+Ts} = K \frac{1+0{,}02s}{1+0.001s}$$

$$F_0 = F_S F_R = \frac{50K}{(1+0{,}005s)(1+0{,}001s)s}$$



e) (5 Punkte)
Nehmen Sie für das Übertragungsverhalten des offenen Kreises im Folgenden die vereinfachte allgemeine Übertragungsfunktion

$$F_0(s) = \frac{10K}{(1+0,005s)(1+0,001s)0,2s}$$

an und bestimmen Sie K_{krit} mit Hilfe der Hurwitz-Matrix.

$$F_0 + 1 = 0 \Rightarrow s^3 + 12e^2\, s^2 + 2e^5\, s + 1e^7 K = 0$$

$$H_1 = |12e^2| > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 12e^2 & 1e^7K \\ 1 & 2e^5 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 24e^7 - 1e^7K > 0$$

$$\Leftrightarrow K < 24$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 12e^2 & 1e^7K & 0 \\ 1 & 2e^5 & 0 \\ 0 & 12e^2 & 1e^7K \end{vmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow 1e^7K\, |H_2| > 0$$

$$\Leftrightarrow |H_2| > 0 \quad \wedge \quad 1e^7K > 0$$

$$\Rightarrow 0 < K < 24 \Rightarrow K_{krit} = 24$$

$\sum$