Einlesezeit

Für die Durchsicht der Klausur wird eine „Einlesezeit“ von **10 Minuten** gewährt. Während dieser Zeitdauer ist es Ihnen **nicht** gestattet, mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Dies bedeutet konkret, dass sich während der gesamten Dauer der Einlesezeit keinerlei Schreibgeräte (Stifte, Füller, etc.) auf dem Tisch befinden dürfen sowie die Nutzung von mitgeführten Unterlagen respektive (elektronischer) Wörterbücher bzw. tragbarer Translater strengstens untersagt ist. Nehmen Sie Ihre Schreibgeräte und Unterlagen erst zur Hand, wenn die Prüfungsaufsicht auf das Ende der Einlesezeit hingewiesen hat und füllen Sie zunächst das Deckblatt sowie Seite 3 **vollständig** aus.

Viel Erfolg!

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL-NR.	
TISCH-NR.	

Klausurunterlagen

Ich versichere hiermit, dass ich sämtliche für die Durchführung der Klausur vorgesehenen Unterlagen erhalten, und dass ich meine Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel und sonstiger unlauterer Mittel angefertigt habe. Ich weiß, dass ein Bekanntwerden solcher Umstände auch nachträglich zum Ausschluss von der Prüfung führt. Ich versichere weiter, dass ich sämtliche mir überlassenen Arbeitsunterlagen sowie meine Lösung vollständig zurück gegeben habe. Die Abgabe meiner Arbeit wurde in der Teilnehmerliste von Aufsichtsführenden schriftlich vermerkt.

Duisburg, den __________ ____________________________________
(Unterschrift der/des Studierenden)

Falls Klausurunterlagen vorzeitig abgegeben: _______________Uhr

Bewertungstabelle

Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Gesamtpunktzahl	
Angehobene Punktzahl	
%	
Bewertung gem. PO in Ziffern	

____
(Datum und Unterschrift 1. Prüfer, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dirk Söffker)

____
(Datum und Unterschrift 2. Prüfer, Dr.-Ing. Yan Liu)

____
(Datum und Unterschrift des für die Prüfung verantwortlichen Prüfers, Söffker)

Fachnote gemäß Prüfungsordnung:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0
sehr gut		gut			befriedigend			ausreichend		mangelhaft

Bemerkung: ____

Hinweise

Achtung: Schreiben Sie Ihre Antwort für ALLE Aufgaben direkt unter die entsprechende Aufgabe in den Aufgabenbogen!

Verwenden Sie KEINE Bleistifte oder roten Stifte für die Beantwortung von Fragen oder für Zeichnungen! (Rote Stifte werde bei der Korrektur verwendet.)

Diese Prüfung lege ich ab als
☐ Pflichtfach.
☐ Wahlfach.
☐ Auflage.
(Bitte ankreuzen.)

Maximal erreichbare Punktzahl:	**40**
Mindestprozentzahl für die Note 1,0:	**95%**
Mindestprozentzahl für die Note 4,0:	**50%**

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1a) (3 Punkte)
Linearisieren Sie durch Abbruch der Taylorreihenentwicklung nach dem ersten Element in Bezug auf den Arbeitspunkt $y_0 = 0°$ die durch die mathematische Gleichung

$$u = a^2 bsin(2y), \;\; y \in [-90°, +90°]$$

dargestellte Ein-/Ausgangsbeziehung.

Antwort:

Analytische Linearisierung durch Taylorreihenentwicklung:
Arbeitspunkt y_0

$$u = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y_0=0} (y - y_0)$$
$$u = 2a^2 bcos(2y_0)y, \quad (\cos\;\; 0° = 1)$$
$$u = 2a^2 by, \quad \text{am Arbeitspunkt} \quad y_0 = 0°$$

1b) (3 Punkte)
Gegeben sei der Regelkreis (Abbildung 1.1).

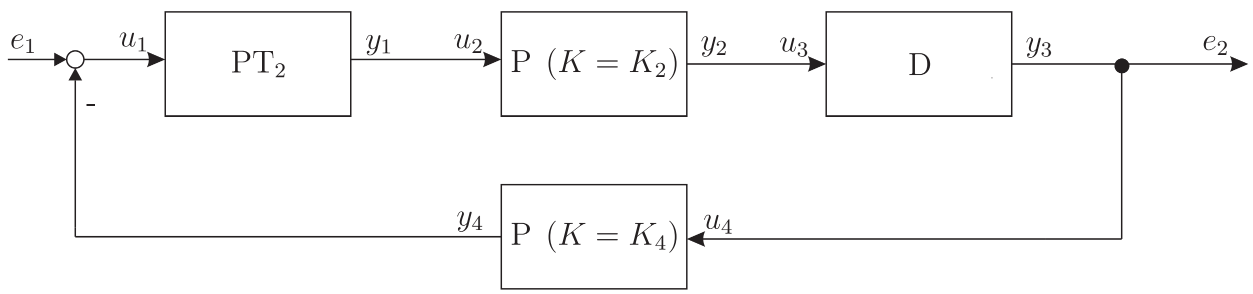

Abbildung 1.1: Blockschaltbild des Systems

mit den Kenngrößen
PT$_2$: $K_1 = 2,\ \omega_0 = 1,\ D = 1,$
P : $K_2 = 2,$
D : $T_D = 1$ sowie
P : $K_4 = 1.$

Geben Sie die Eigenfrequenz ω_0 sowie die Dämpfung D für das resultierende Übertragungssystem zwischen dem Eingang e_1 und dem Ausgang e_2 an.

Antwort:

$$PT_2 : \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y_1} + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y_1} + y_1 = K_1 u_1 \tag{1.1}$$

$$P_1 : y_2 = K_2 u_2 \tag{1.2}$$

$$D : y_3 = T_D \frac{du_3}{dt} \tag{1.3}$$

$$P_2 : y_4 = K_4 u_4 \tag{1.4}$$

$$u_2 = y_1; u_3 = y_2; u_4 = y_3 = e_2; u_1 = e_1 - y_4$$

$$Aus(1.3) \Rightarrow y_3 = T_D \frac{dy_2}{dt} = T_D \frac{d(K_2 u_2)}{dt} = T_D K_2 \frac{dy_1}{dt} \tag{1.5}$$

$$\Rightarrow y_3 = T_D K_2 \dot{y_1}$$

$$\Rightarrow \dot{y_1} = \frac{1}{T_D K_2} y_3 \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow \ddot{y_1} = \frac{1}{T_D K_2} \dot{y_3} \tag{1.7}$$

(1.6),(1.7) in (1.1)

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{T_D K_2}\dot{y_3} + \frac{2D}{\omega_0}\frac{1}{T_D K_2} y_3 + \int \frac{1}{T_D K_2} y_3 dt = K_1(e_1 - y_4) \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{T_D K_2}\dot{y_3} + \frac{2D}{\omega_0}\frac{1}{T_D K_2} y_3 + \int \frac{1}{T_D K_2} y_3 dt = K_1(e_1 - K_4 y_3) \tag{1.9}$$

$e_2 = y_3$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{T_D K_2}\ddot{e_2} + \left(\frac{2D}{\omega_0}\frac{1}{T_D K_2} + K_1 K_4\right)\dot{e_2} + \frac{1}{T_D K_2} e_2 = K_1 \dot{e_1} \tag{1.10}$$

Mit $PT_2(D = 1, \omega_0 = 1, K_1 = 2), P_1(K_2 = 2), D(T_\mathrm{D} = 1), P_2(K_4 = 1)$

$$\Rightarrow \ddot{e_2} + 6\dot{e_2} + e_2 = 4\dot{e_1} \tag{1.11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\omega_0^*)^2}\ddot{e_2} + \frac{2D^*}{\omega_0^*}\dot{e_2} + e_2 = 4\dot{e_1} \tag{1.12}$$

$\Rightarrow \frac{1}{(\omega_0^*)^2} = 1 \Rightarrow \omega_0^* = 1$
$\Rightarrow \frac{2D^*}{\omega_0^*} = 6 \Rightarrow D^* = \omega_0^* = 3$

1c) (3 Punkte)
Ein Maschinenelement, dessen dynamisches Verhalten sich durch ein PT_1-Systemverhalten abbilden lässt ($T_1 = 1$, $K_1 = 1$) wird durch einen P-Regler (K_2) mit negativer Rückführung (Abbildung 1.2) geregelt. Durch ein Versehen wird die negative Rückführung in eine positive Rückführung umgeschaltet. Begründen Sie an Hand einer analytischen Stabilitätsbetrachtung die Auswirkung der Umschaltung (K_2 ist immer positiv).

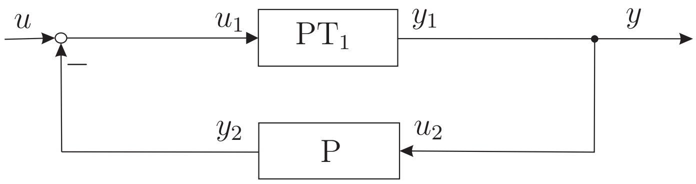

Abbildung 1.2: System

Antwort:

Mit negativer Rückführung:

$$PT_1 : T_1\dot{y}_1 + y = K_1u_1 \tag{1.13}$$

$$P : y_2 = K_2u_2 \tag{1.14}$$

$$u_1 = u - y_2 \tag{1.15}$$

$$u_2 = y_1 = y \tag{1.16}$$

(1.15),(1.16) und (1.13)

$$T_1\dot{y} + y = K_1(u - K_2y) \tag{1.17}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = -\left(\frac{1 + K_1K_2}{T_1}\right)y + \frac{K_1}{T_1}u \tag{1.18}$$

Charakteristische Gleichung:

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.19}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1 + K_1K_2}{T}, (PT_1 : T_1 = 1, K_1 = 1) \tag{1.20}$$

$$\Rightarrow \lambda = -(1 + K_2) \tag{1.21}$$

$K_2 > 0 \Rightarrow stabil$
Mit positiver Rückführung:

$$u_1 = u + y_2 \tag{1.22}$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = \frac{K_1K_2 - 1}{T_1}y + K_1u \tag{1.23}$$

$$\Leftrightarrow det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.24}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{K_1K_2 - 1}{T_1}, (PT_1 : T_1 = 1, K_1 = 1) \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow \lambda = K_2 - 1 \tag{1.26}$$

$\lambda > 0 \Rightarrow K_2 > 1 \Rightarrow$ instabil.
$\lambda \leq 0 \Rightarrow K_2 \leq 1 \Rightarrow$ stabil
Abhängig vom Wert von K_2 ändert sich die Stabilität des Regelkreises.

1d) (3 Punkte)
Ein System in Zustandsraumdarstellung mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = 0$$

wird mit einem P-Regler ($K = K_R$) in negativer Rückführung geregelt. Geben Sie den Parameterbereich für K_R für ein stabiles Systemverhalten des geregelten Systems an.
Antwort:

Zustandsgleichung:
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{1.27}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{1.28}$$

Mit einem P-Regler ($K = K_R$) in negativer Rückführung:

$$u = -K_R x, \tag{1.29}$$

(1.27) und (1.29)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-K_R.x) \tag{1.30}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - K_R & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

Charakteristische Gleichung:

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.32}$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - K_R & -1 \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{1.33}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + K_R - 1 = 0 \tag{1.34}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4K_R}}{2}$$

Für ein stabiles Systemverhalten des geregelten Systems

$$\lambda_{1,2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5 - 4.K_R}}{2} \leq 0 \Rightarrow K_R \geq 1$$

1e) (3 Punkte)
Zwei Systeme werden gemäß Abbildung 1.3 angeordnet. Bei geöffneter Schalterstellung ergibt sich das dynamische Verhalten zu

$$T_1\dot{y} + y = K_2 u \quad \text{sowie} \tag{1.35}$$

bei geschlossener Schalterstellung zu

$$T_1\dot{y} + y = (K_1 + K_2)u + T_1 K_2 \dot{u}. \tag{1.36}$$

Klassifizieren Sie die Übertragungseigenschaften der Komponenten.

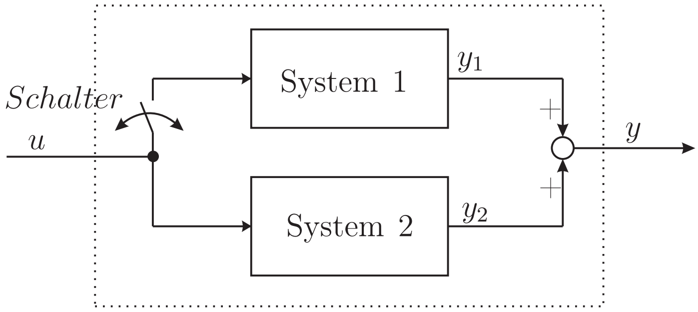

Abbildung 1.3: Blockschaltbild

Antwort:

System 2:

$$T_1\dot{y}_2 + y_2 = K_2 u \tag{1.37}$$

$$\Rightarrow PT_1$$

System 1:

$$y = y_1 + y_2$$

$$\Rightarrow y_2 = y - y_1$$

$$\Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{y} - \dot{y}_1$$

In (1.37)

$$T_1(\dot{y} - \dot{y}_1) + y - y_1 = K_2 u \tag{1.38}$$

$$T_1\dot{y} + y = T_1\dot{y}_1 + y_1 + K_2 u \tag{1.39}$$

Aus (1.36) und (1.39):

$$T_1\dot{y}_1 + y_1 = K_1 u + T_1 K_2 \dot{u} \tag{1.40}$$

$$\Rightarrow PDT_1$$

$\sum \square$

Aufgabe 2 (25 Punkte)
Gegeben ist das Blockschaltbild eines Systems von Übertragungselementen (siehe Abbildung 2.1).

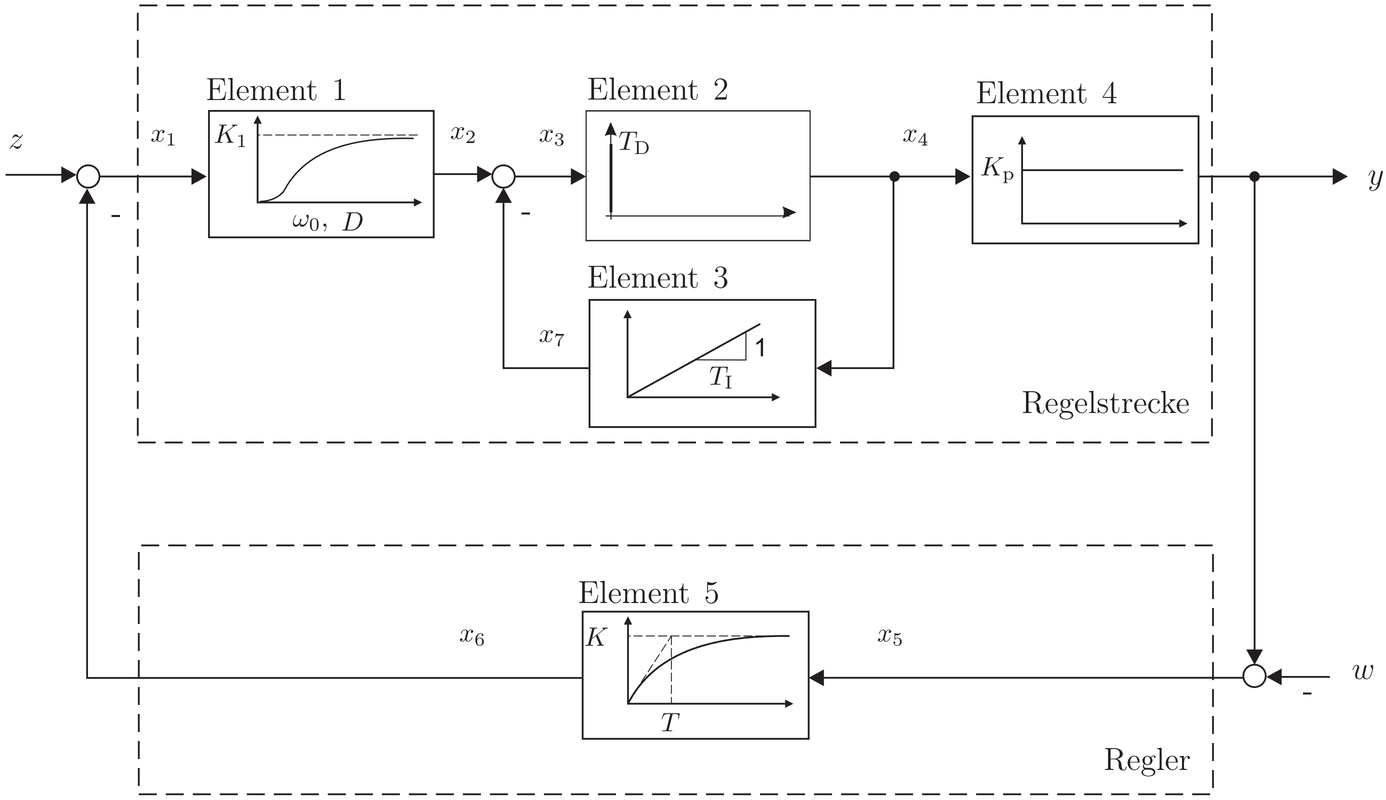

Abbildung 2.1: Blockschaltbild

2a) (2 Punkte)
Klassifizieren Sie die Übertragungsverhaltensweisen (Typ des Einzelübertragungsverhaltens) der Elemente 1 bis 4 und geben Sie jeweils die entsprechende Differenzialgleichung unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bezeichnungen in einer zur Klassifizierung geeigneten Form an.
Antwort:
E1: PT_2

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{x}_2 + \frac{2D}{\omega}\dot{x}_2 + x_2 = K_1 x_1$$

E2: D

$$x_4 = T_\mathrm{D}\dot{x}_3$$

E3: I

$$x_7 = \frac{1}{T_\mathrm{I}}\int x_4 dt$$

E4: P

$$y = K_\mathrm{p} x_4$$

2b) (3 Punkte)
Welches Übertragungsverhalten weist die Regelstrecke auf?

(Hinweis: bringen Sie die Differenzialgleichung in eine zur Klassifizierung geeignete Darstellung.)

Antwort:

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{y} + \frac{2D}{\omega}\dot{y} + y = \frac{K_1 K_p T_I T_D}{T_I + T_D}\dot{x}_1$$

DT_2

2c) (5 Punkte)
Die Dynamik der Regelstrecke sei im Folgenden durch das Verhalten

$$\tilde{T}_3\dot{y} + \tilde{T}_2 y + \tilde{T}_1 \int y = K_1 x_1$$

beschrieben.

Klassifizieren Sie das Führungsübertragungsverhalten des Gesamtsystems (mit $T = 0$ für den PT_1-Regler) und geben Sie die statische Verstärkung K_s an.

Die Reglerverstärkung K soll zwischen $0 < K \leq 15$ gewählt werden. Welches K würden Sie für eine minimale Reglerabweichung des transienten Übergangs wählen (Begründung erforderlich)?

Antwort:

$$\tilde{T}_3\ddot{y} + (\tilde{T}_2 + K_1 K)\dot{y} + \tilde{T}_1 y = K_1 K \dot{w}$$

DT_2

Statische Verstärkung:
$\ddot{y} = \dot{y} = \dot{w} = 0$

$K_\mathrm{s} = 0$

Minimale Reglerabweichung:

Aufgrund des $DT2$ Verhaltens ist die Reglerabweichung stationär identisch Null.
$\Rightarrow$ K hat stationär keinen Einfluß.
Größere K bewirken jedoch größere instationäre Abweichungen.
$\Rightarrow$ K sollte möglichst klein gewählt werden.

Für die folgenden Aufgabenteile wird die Differenzialgleichung eines Systems mit

$$-4\ddot{y} + 2\dot{y} = u$$

angenommen, wobei y den gemessenen Ausgang und u den Eingang beschreiben.

2d) (3 Punkte)
Geben Sie die Matrizen der Zustandsraumdarstellung des Systems an, wobei $x = [y\ \dot{y}]^T$ als Zustandsvektor zu verwenden ist. Hierbei nehmen Sie für die C-Matrix Koeffizienten identisch zu Eins an.
Antwort:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,25 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2e) (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und vervollständigen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = [1\; v_{12}]^T,\; v_2 = [1\; v_{22}]^T$ der Systemmatrix A. Nehmen Sie hierfür das modifizierte System bestehend aus

$$A = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & -0,2b \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ und } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

an. Für welchen Parameter b ist das System asymptotisch stabil?

Antwort:
Eigenwerte:
$\lambda_1 = b$ und $\lambda_2 = -0,2b$
Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,2b \end{bmatrix}$$

Das System ist für keinen Wert $b \in \Re$ asymptotisch stabil.

2f) (6 Punkte)
Die Systemmatrix eines dynamischen Systems wird durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ -1 & k_2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

beschrieben.
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ des Systems. Für welche Werte der Parameter k_1 und k_2 ist das System asymptotisch stabil? Verwenden Sie zur Berechnung das Hurwitz-Kriterium.

Antwort:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - k_2\lambda^2 + (k_1 - 1)\lambda + k_1 + k_2$$

$$H = \begin{bmatrix} -k_2 & k_2 + k_1 & 0 \\ 1 & k_1 - 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_1 \end{bmatrix}$$

Hurwitz-Kriterium:
$a_i > 0$
$a_3 = 1 > 0$
$a_2 = -k_2 > 0 \Rightarrow k_2 < 0$
$a_1 = k_1 - 1 > 0 \Rightarrow k_1 > 1$
$a_0 = k_1 + k_2 > 0 \Rightarrow k_1 > -k_2$

$H_1, H_2, H_3 > 0$
$H_1 = -k_2 > 0 \Rightarrow k_2 < 0$
$H_2 = -k_2(k_1 - 1) - k_2 + k_1 > 0 \Rightarrow k_2 < 1$
$H_3 = H_2 * (k_2 + k_1) > 0 \Rightarrow k_1 < -k_2$
Das System ist asymptotisch stabil für $k_1 > 1 \lor k_2 < 0 \lor k_1 > -k_2$