

Einlesezeit

Für die Durchsicht der Klausur wird eine „Einlesezeit“ von **10 Minuten** gewährt. Während dieser Zeitdauer ist es Ihnen **nicht** gestattet, mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Dies bedeutet konkret, dass sich während der gesamten Dauer der Einlesezeit keinerlei Schreibgeräte (Stifte, Füller, etc.) auf dem Tisch befinden dürfen sowie die Nutzung von mitgeführten Unterlagen respektive (elektronischer) Wörterbücher bzw. tragbarer Translater strengstens untersagt ist. Nehmen Sie Ihre Schreibgeräte und Unterlagen erst zur Hand, wenn die Prüfungsaufsicht auf das Ende der Einlesezeit hingewiesen hat und füllen Sie zunächst das Deckblatt sowie Seite 3 **vollständig** aus.

Viel Erfolg!

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL-NR.	
TISCH-NR.	

Klausurunterlagen

Ich versichere hiermit, dass ich sämtliche für die Durchführung der Klausur vorgesehenen Unterlagen erhalten, und dass ich meine Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel und sonstiger unlauterer Mittel angefertigt habe. Ich weiß, dass ein Bekanntwerden solcher Umstände auch nachträglich zum Ausschluss von der Prüfung führt. Ich versichere weiter, dass ich sämtliche mir überlassenen Arbeitsunterlagen sowie meine Lösung vollständig zurück gegeben habe. Die Abgabe meiner Arbeit wurde in der Teilnehmerliste von Aufsichtsführenden schriftlich vermerkt.

Duisburg, den _____

(Unterschrift der/des Studierenden)

Falls Klausurunterlagen vorzeitig abgegeben: _____ Uhr

Bewertungstabelle

Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Aufgabe 3	
Gesamtpunktzahl	
Angehobene Punktzahl	
%	
Bewertung gem. PO in Ziffern	

(Datum und Unterschrift 1. Prüfer, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dirk Söffker)

(Datum und Unterschrift 2. Prüfer, Dr.-Ing. Yan Liu)

(Datum und Unterschrift des für die Prüfung verantwortlichen Prüfers, Söffker)

Fachnote gemäß Prüfungsordnung:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0
sehr gut		gut			befriedigend			ausreichend		mangelhaft

Bemerkung: _____

Hinweise

Achtung: Schreiben Sie Ihre Antwort für ALLE Aufgaben
direkt unter die entsprechende Aufgabe in den Aufgabenbogen!

Verwenden Sie KEINE Bleistifte oder roten Stifte für die
Beantwortung von Fragen oder für Zeichnungen! (Rote Stifte werden
bei der Korrektur verwendet.)

Diese Prüfung lege ich ab als

☐ Pflichtfach.

☐ Wahlfach.

☐ Auflage.

(Bitte ankreuzen.)

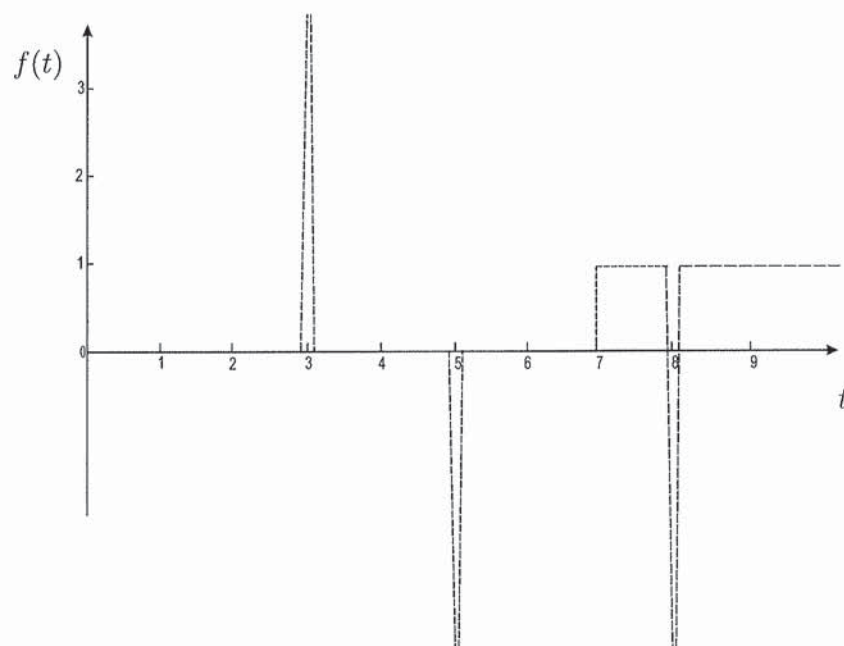
Maximal erreichbare Punktzahl:	60
Mindestprozentzahl für die Note 1,0:	95%
Mindestprozentzahl für die Note 4,0:	50%

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1a) (2 Punkte)

Zeichnen Sie den Funktionsverlauf $f(t)$ für die gegebene Laplacetransformierte

$$F(s) = e^{-3s} - e^{-5s} + \frac{e^{-7s}}{s} - e^{-8s}.$$

Antwort:Abbildung 1.1: Funktionsverlauf $f(t)$

1b) (2 Punkte)

Benennen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ unter Nutzung der Sprungantwort $h(t)$.**Antwort:**

$$G(s) = \mathcal{L}h(t)$$

1c) (4 Punkte)

Geben Sie das Ein-/Ausgangsverhalten eines PDT₂-Systems in Form einer Übertragungsfunktion an. Geben Sie hierbei zunächst allgemein alle Pole und Nullstellen an. Zeichnen Sie das zugehörige Bode-Diagramm für ein System mit den Parametern $k = 25$, $w_0 = 3$, $D = 0$ und $T_d = 1$ in das nachfolgende Diagramm ein. Zeichnen Sie hierzu zunächst das exakte (quantitative) approximierte Bode-Diagramm und anschließend den realen Verlauf ein (Hinweis $\log(25)=1,398$).

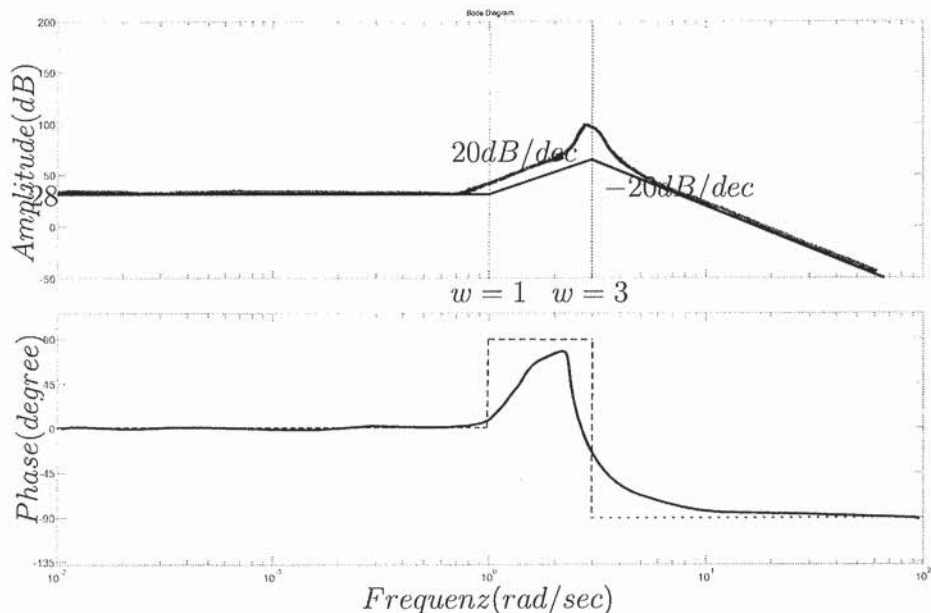
Antwort:

Übergangsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1 + T_d s)}{\frac{1}{w_0^2} s^2 + \frac{2D}{w_0} s + 1}$$

$$\text{Nullstelle} \Rightarrow s = -\frac{1}{T_d}$$

$$\text{Pole} \quad s_{1,2} = w_0(-D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$



1d) (3 Punkte)

Geben Sie die mathematische Form

- der vollständigen Zustandsraumdarstellung eines linearen SISO-Übertragungssystems und
- der entsprechenden Übertragungsfunktion eines Systems unter Nutzung der Matrizen und Vektoren der Zustandsraumdarstellung

an.

Bestimmen Sie für das System $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ die Zustandsstabilität des Systems.

Antwort:

- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
- $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
- Übertragungsfunktion
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$
- Das System ist grenzstabil.

1e) (4 Punkte)

Der nachstehende approximierte Verlauf des Bode-Diagramms (Abb. 1.1) ist zu analysieren. Auf das System wirke ein Eingang $u(t) = a \sin(\tilde{w}_2 t) + b \sin(\tilde{w}_4 t)$. Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ anhand der durch den approximated Verlauf gegebenen Übertragungseigenschaften des Systems (Abb. 1.1).

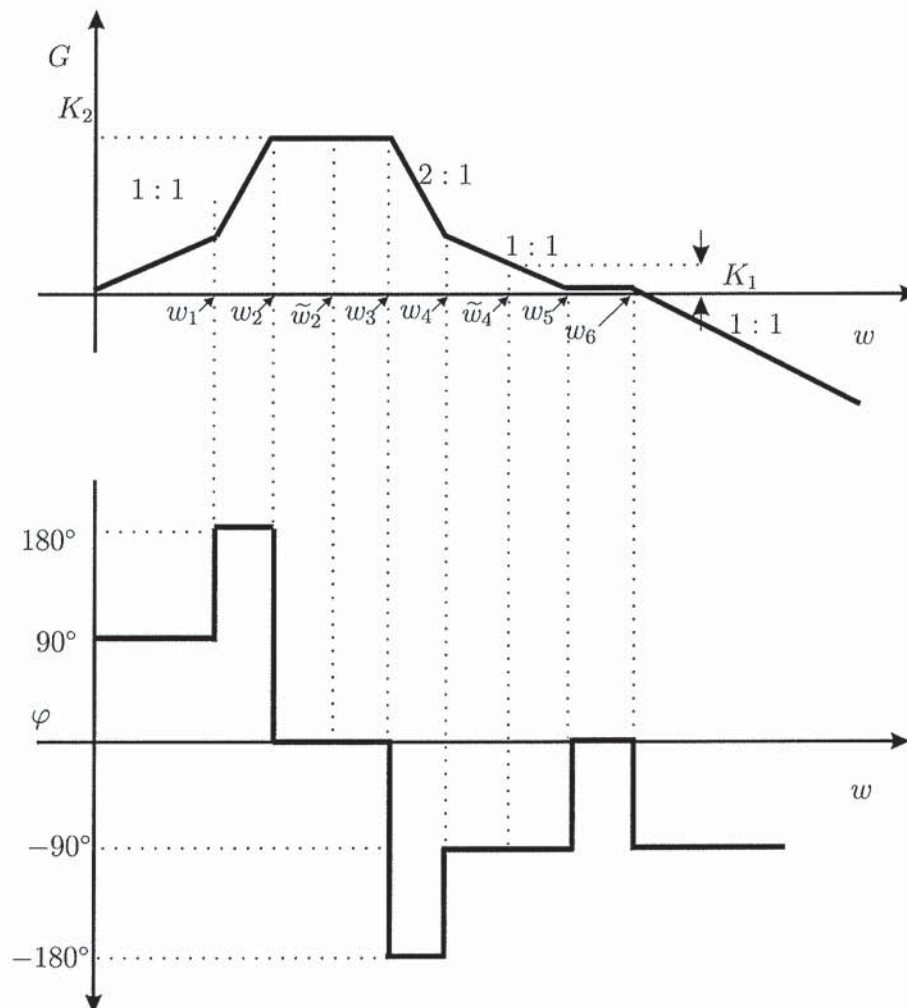


Abbildung 1.2: Approximiertes Bode-Diagramm

Handelt es sich bei dem gezeigten Verhalten um ein Minimalphasensystem? [Ja, Nein und Warum?].

Antwort:

$$y(t) = a * K_2 \sin(\tilde{w}_2 t) + b * K_1 \sin(\tilde{w}_4 t - 90)$$

Das System ist ein Minimalphasensystem, weil es keine positiven Pole oder Nullstellen (Realteile) sind.

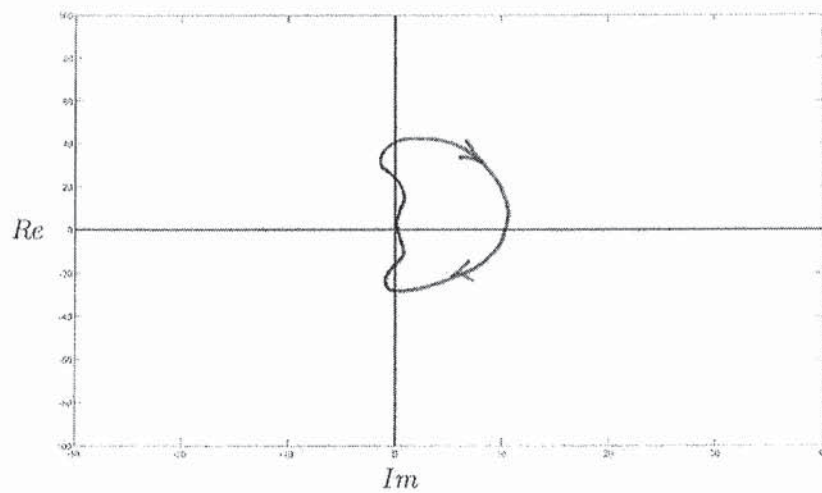


Abbildung 1.3: Approximierte Ortskurve

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Der in Abbildung 2.1 dargestellte Regelkreis besteht aus einem Regler $G_R(s)$, einer Strecke $G_S(s)$ und einem Übertragungselement $G_M(s)$, das die dynamischen Eigenschaften eines Messglieds beschreibt.

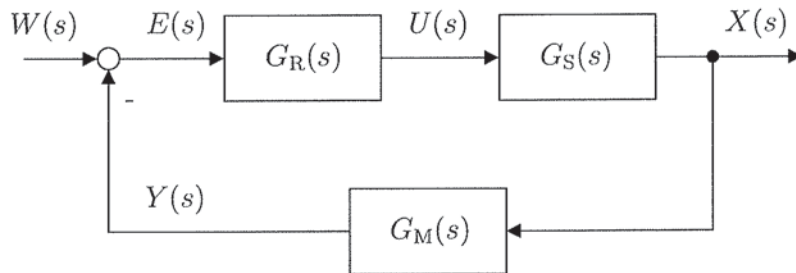


Abbildung 2.1: Blockschaltbild des Systems

Das Übertragungsverhalten der Strecke $G_S(s)$ wird durch die Differenzialgleichung

$$7\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 3x(t) = u(t) + \int u(t)dt \text{ mit } \dot{x}(0) = x(0) = 0$$

beschrieben.

Das Übertragungsverhalten des Übertragungselements $G_R(s)$ wird durch die Differenzialgleichung

$$u(t) = 2e(t) + 3\dot{e}(t)$$

beschrieben.

Das Übertragungsverhalten des Übertragungselements $G_M(s)$ wird durch die Differenzialgleichung

$$3y(t) + 2\dot{y}(t) = 2x(t) \text{ mit } y(0) = 0$$

beschrieben.

2a) (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen für die Strecke $G_S(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$, für den Regler $G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$ und für das Übertragungselement $G_M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

Antwort:

$$G_S(s) = \frac{s + 1}{s(7s^2 + 10s + 3)}$$

$$G_R(s) = 3s + 2$$

$$G_M(s) = \frac{2}{(3 + 2s)}$$

2b) (2 Punkte)

Wie lautet die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_o(s) = \frac{X(s)}{E(s)}$? Ist der offene Regelkreis $G_o(s)$ asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort:

$$G_o(s) = \frac{(s+1)(3s+2)}{s(7s^2+10s+3)}$$

$s_{P1} = 0 \Rightarrow$ Das System ist nicht asymptotisch stabil.

Das Übertragungsverhalten des offenen Regelkreises wird im Folgenden durch

$$G_o(s) = \frac{(3s+1)(2s+3)}{s(10s^2+7s+1)}$$

beschrieben.

2c) (5 Punkte)

Berechnen Sie die Phase und die Amplitude der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow +\infty$. Zeichnen Sie qualitativ das Bodediagramm und die Ortskurve des offenen Regelkreises. Beschriften Sie die relevanten Eckfrequenzen und Steigungen der Verläufe.

Antwort:

$$s_{N1} = -0,33 \text{ und } s_{N2} = -1,5$$

$$s_{P1} = 0, s_{P2} = -0,5 \text{ und } s_{P3} = -0,2$$

$$|G(j0)| = \infty, \varphi(j0) = -90^\circ$$

$$|G(j\infty)| = 0, \varphi(j\infty) = -90^\circ$$

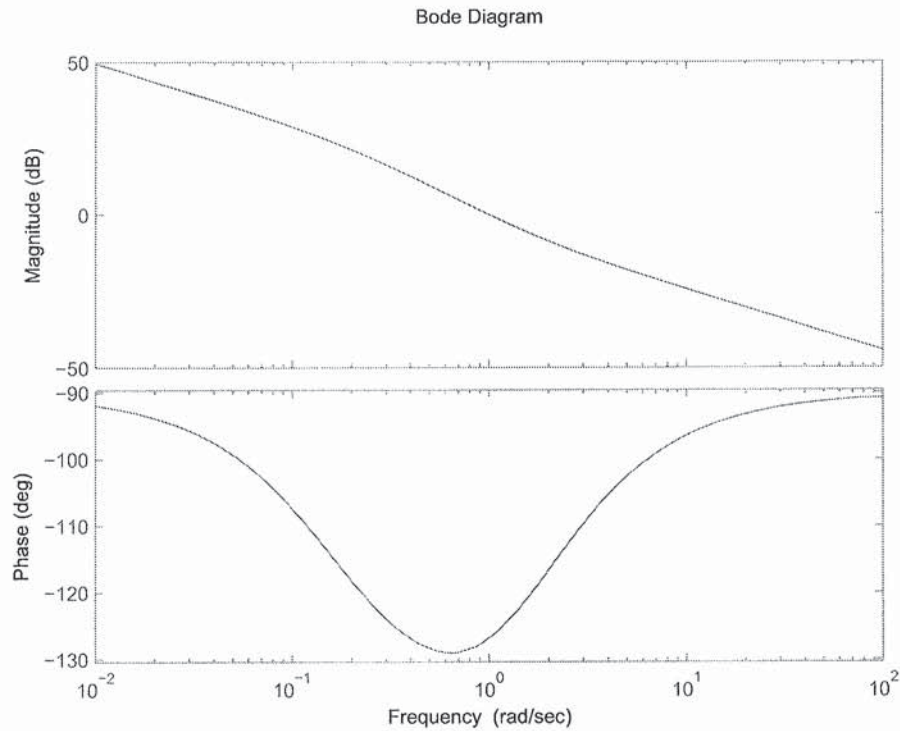


Abbildung 2.2: Bodediagramm

2d) (4 Punkte)

Das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Regelkreises soll Nutzung des unter c) angegebenen offenen Regelkreises mit negativer Rückkopplung mit Hilfe einer Wurzelortskurve (WOK) untersucht werden.

Geben Sie den qualitativen Verlauf der WOK an.

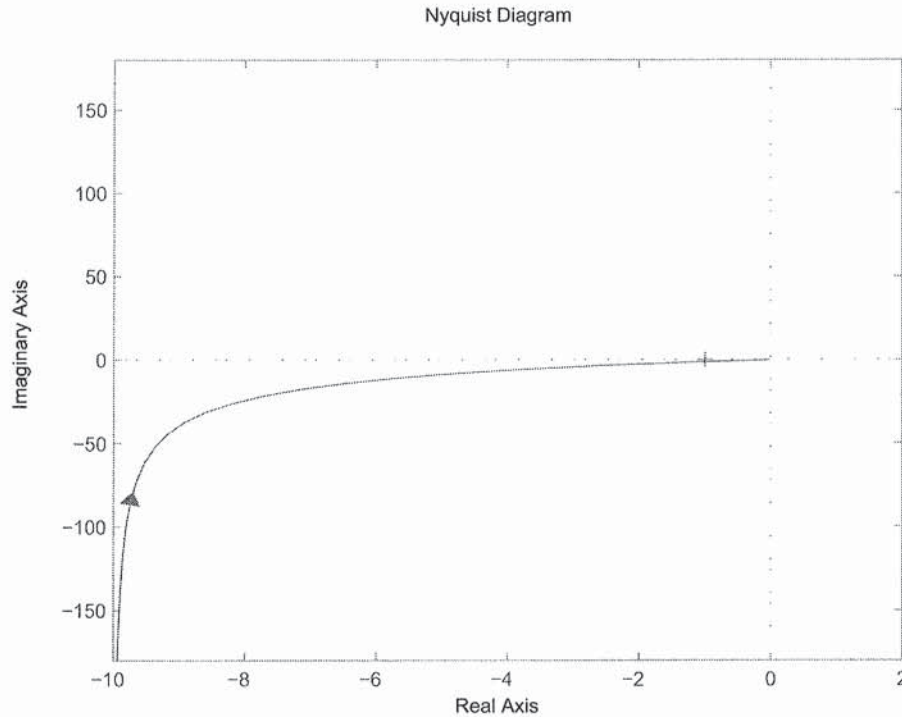


Abbildung 2.3: Ortskurve

2e) (2 Punkte)

Welche qualitative (klein, ..., sehr groß) Empfehlung können Sie für die Wahl der Gesamtverstärkung aussprechen, wenn das Systemverhalten eine maximale Dämpfung erhalten soll? Nutzen Sie hierbei als Begründung ggf. eine Bereichseinteilung der WOK unter 2d).

Antwort:

Die Gesamtverstärkung $\tilde{K}$ ist so zu wählen, dass die Wurzelorte auf den reellen Achsen liegen, d.h. $\tilde{K}$ klein oder sehr groß.

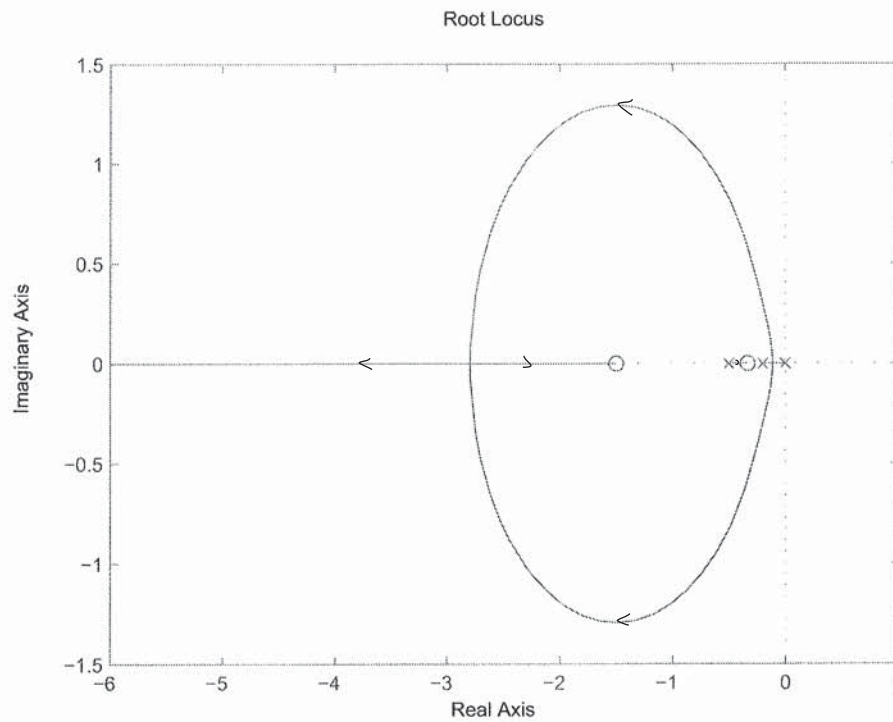


Abbildung 2.4: Wurzelortskurve

Nehmen Sie die folgende Führungsübertragungsfunktion eines Standardregelkreises

$$G_W(s) = \frac{K_P(3 + 2s)}{10s^3 + 7s^2 + \tilde{T}s + 1 + K_P}$$

mit $\tilde{T} > 0$ an.

2f) (4 Punkte)

Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Hurwitz-Kriteriums den zulässigen Wertebereich der Reglerverstärkung K_P in Abhängigkeit der Zeitkonstanten $\tilde{T}$, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Antwort:

$$H = \begin{bmatrix} 7 & 1 + K_P & 0 \\ 10 & \tilde{T} & 0 \\ 0 & 7 & 1 + K_P \end{bmatrix}$$

Der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil für $-1 < K_P < \frac{7}{10}\tilde{T} - 1$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Ein System wird unter Nutzung seiner Elemente $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$ beschrieben. Hierbei gelten für die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s+b)}$$

$$G_3(s) = K_R.$$

Die Verschaltung erfolgt gemäß Abbildung 3.1.

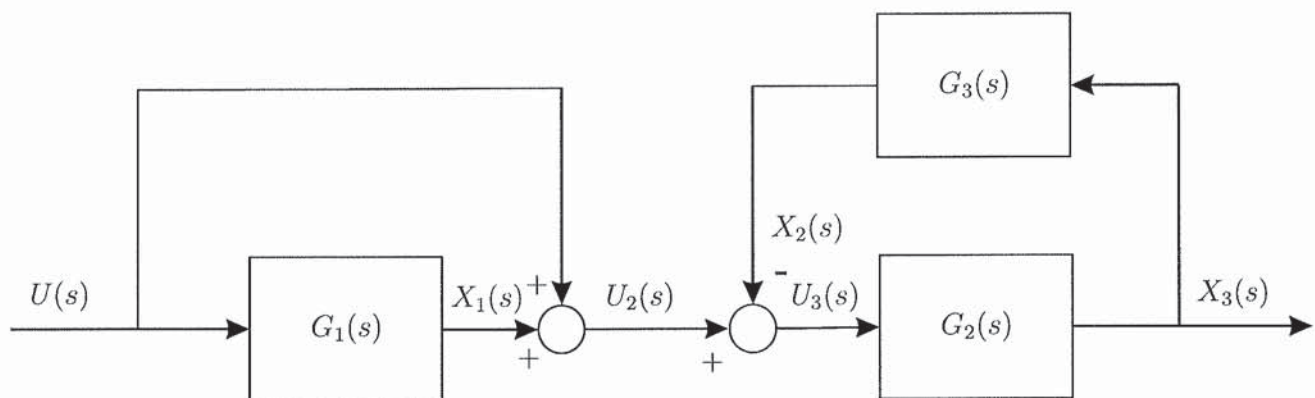


Abbildung 3.1: Blockschaltbild

- 3a) (6 Punkte) Geben Sie die Differenzialgleichungen der Übertragungselemente $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$ im Zeitbereich an und charakterisieren Sie den jeweiligen Typ des Einzelübertragungsverhaltens.

Antwort:

$$G_1(s) : \dot{x}_1 + ax_1 = u$$

$$G_2(s) : \dot{x}_3 + bx_3 = \int u_3(t) dt$$

$$G_3(s) : x_2 = K_R x_3$$

3b) (13 Punkte)

Stellen Sie die Übertragungsfunktion sowie das hieraus resultierende Zustandsraummodell für $G_{U \rightarrow X_3}(s)$ auf und bestimmen Sie die zugehörigen Pole und Nullstellen (Übertragungsfunktion) sowie die Eigenwerte (Systemmatrix). Wie groß ist die Ordnung des Systems? Handelt es sich um ein differenzierendes, integrierendes oder proportionales Gesamtsystemverhalten?

Antwort:

$$\frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{s + a + 1}{s + a}$$

$$\frac{X_3(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{s^2 + sb + K_S}$$

$$\frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{s + a + 1}{(s + a)(s^2 + sb + K_S)} = \frac{s + a + 1}{s^3 + (a + b)s^2 + (ab + K_S)s + aK_S}$$

Zustandsraummodell:

z. B.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -aK_S & -(ab + K_S) & -(a + b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} (a + 1) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Pole und Nullstellen:

$$s_{0,1} = -a - 1$$

$$s_1 = -a$$

$$s_{2,3} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - K_S}$$

Systemordnung:

$$n=3$$

Gesamtverhalten:

Differenzierend (PDT₃)

3c) (6 Punkte)

Für das Übertragungsverhalten $G_{U \rightarrow X_3}$ wird im Folgenden die vereinfachte Übertragungsfunktion

$$G_{U \rightarrow X_3}(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 5s^2 + 5s + 1}$$

angenommen.

Begründen Sie, ob das durch $G_{U \rightarrow X_3}(s)$ beschriebene System asymptotisch stabil sein kann. Diskutieren Sie mit Hilfe der Wurzelortskurve die Stabilität des geschlossenen Regelkreises (Gegenkopplung). Kennzeichnen Sie hierbei ggf. stabilitätsrelevante Parameter.

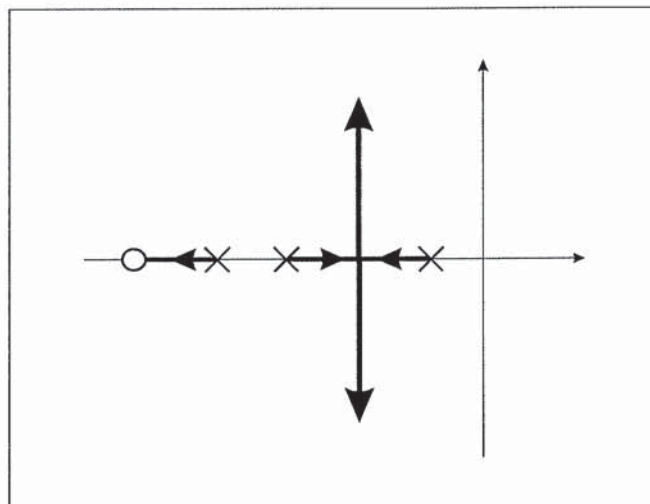
Antwort:

Offener Regelkreis:

Anwendung Stabilitätskriterium (z. B. Hurwitz): $\Rightarrow$ System ist asymptotisch stabil

Geschlossener Regelkreis:

Wurzelortskurve:



$\Rightarrow$ Stabil, unabhängig von k .