

Herleitung einer analytischen Darstellung für ein Fuzzy-System

T. Bertram

Forschungsbericht 13/92

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der Entwurf eines Fuzzy-Systems für komplexe, zeitvariante und/oder nicht-lineare Regelstrecken basiert im allgemeinen auf linguistischen Regeln (Produktionsregeln, Bedingungs-Aktionsregeln). Diese Regeln repräsentieren das Wissen über den Prozeß und die Erfahrung eines mit dem Prozeß beschäftigten Experten. Hierbei stellt die Wissensakquisition einen sehr zeitaufwendigen Prozeß dar, weil Experten typischerweise ihre Entscheidungsfindung nicht in irgendeiner formalen Art strukturieren. Sie haben große Schwierigkeiten, die Schlußfolgerungsschritte, die sie durchführen, zu isolieren und zu beschreiben. Einen Ansatz liefert die Darstellung der Algorithmen mit Hilfe von WENN...DANN...-Regeln. Dieser wissensbasierte Formalismus stellt auf der einen Seite eine leicht nachvollziehbare und übersichtliche Beschreibung der Wirkzusammenhänge dar. Jedoch entzieht sich diese Beschreibungsform auf der anderen Seite der Anwendung von bekannten analytischen Verfahren zur Analyse und Synthese von dynamischen Systemen. Im Rahmen dieses Forschungsberichts wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie aus einer regelbasierten Beschreibungsform eine analytische Darstellung für ein Fuzzy-System mit Ausnahme von wenigen Singularitäten für den gesamten Definitionsbereich gefunden werden kann.

Universität – GH – Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Off line und on line Regelarbeit	3
2.1 Off line Aggregation der Regelbasis	3
2.2 On line Aggregation der Regelbasis	4
3 Funktionale Beschreibung der logischen Verknüpfungsoperatoren	5
3.1 Analytische Darstellung des MINIMUM-Operators	5
3.2 Analytische Darstellung des MAXIMUM-Operators	6
3.3 Analytische Darstellung der Eingangsgrößenbeschränkung	6
4 Regelung des Abstandes von Fahrzeugen	9
4.1 Beschreibung der Regelstrecke	9
4.2 Beschreibung des Fuzzy-Reglers	10
4.3 Herleitung einer analytischen Eingangs-Ausgangsgrößenbeschreibungsform für ein Fuzzy-System	14
5 Zusammenfassung und Ausblick	19
6 Literaturverzeichnis	20

Nomenklatur

\mathbf{A}	scharfe / unscharfe Menge \mathbf{A}
$\mathbf{A} = \{x \dots\}$	\mathbf{A} ist die Menge aller x für die gilt ...
$a \in \mathbf{A}$	a ist ein Element der Menge \mathbf{A}
$a \notin \mathbf{A}$	a ist kein Element der Menge \mathbf{A}
$b(\cdot), f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot), q(\cdot)$	Funktionen
$e(t), e(k)$	Regelabweichung
$\Delta e(t), \Delta e(k)$	Zeitliche Änderung der Regelabweichung
$\int e(t) dt$	Integral der Regelabweichung
F	Flächeninhalt
$f_a(t)$	Antriebskraft
f_0	Nenn-Antriebskraft
$f_R(t)$	Reibkraft
K	Normierungsfaktor
k_R	Reibkraftbeiwert
k	Zeitargument (diskrete Betrachtung)
m	Fahrzeugmasse
\mathbf{N}	Fuzzy-Menge negativ
n	Anzahl der Eingangsgrößen
\mathbf{P}	Fuzzy-Menge positiv
s	Flächenschwerpunkt
T	Zeitkonstante
t	Zeitargument (kontinuierliche Betrachtung)
$v(t)$	Fahrzeuggeschwindigkeit in x -Richtung
$w(t), w(k)$	Führungsgröße
x	Variable
\check{x}	Variable mit beidseitig beschränktem Wertebereich
$y(t), y(k)$	Regelgröße
α	Erfülltheitsgrad einer Regel
μ_A	Zugehörigkeitsfunktion zur Menge \mathbf{A}
$\mu_A(x)$	Zugehörigkeitsgrad des Elementes x zur Menge \mathbf{A}
\mathcal{X}, \mathcal{Y}	Definitionsbereich, Wertebereich
\emptyset	leere Menge
$[0; 1]$	abgeschlossenes Einheitsintervall
$[-1; 1]$	abgeschlossener Wertebereich
$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mu_{A_i}(x_i) / x_i$	unscharfe Menge \mathbf{A}
$\bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu_{A_j}(x_i) / x_i$	Vereinigungsmenge der n Zugehörigkeitsfunktionen

$\forall x \in \mathbf{X} : \dots$	für jedes x aus der Menge \mathbf{X} gilt : ...
\Rightarrow	daraus folgt (einseitig); allgemeingültige Implikationsbeziehung
$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	Implikation (WENN...DANN...Regel)
$\min \{ \dots \}$	Funktion zur Bestimmung des Minimalwertes
$\max \{ \dots \}$	Funktion zur Bestimmung des Maximalwertes

Indizierung:

a	Antrieb
e	Regelabweichung
Δe	zeitliche Änderung der Regelabweichung
i, j	Laufindizes
N	Negativ
n	Normierte Größen
P	Positiv
R	Reibkraft
U	Stellgröße
0	Arbeitspunkt
$1, 2, 3$	Zählindizes

1 Einleitung

Der Entwurf eines Fuzzy-Reglers oder eines Fuzzy-Modells (Fuzzy-Systems) für komplexe, zeitvariante und/oder nichtlineare dynamische Systeme basiert im allgemeinen auf linguistisch formulierten Regeln (Produktionsregeln). Diese Regeln repräsentieren nur teilweise das Wissen über den Prozeß und die Erfahrung eines mit dem Prozeß beschäftigten Experten, der diesen nach heuristischen Gesichtspunkten erfolgreich steuert und angemessene Schlußfolgerungen zieht (Zadeh 1973). Produktionsregeln werden manchmal auch Bedingungs-Aktions-Regeln oder Situations-Aktions-Regeln genannt. Ihr Nutzen in der Systemtheorie liegt in der Möglichkeit, empirische Assoziationen zwischen Daten darzustellen und Aktionen, die das System als Konsequenz ausführen soll, zu beschreiben (Jackson 1987). Die Heuristik ist eine Methode, um bei unvollständiger Information neue Erkenntnisse zu gewinnen (Herden und Hein 1990). Mit der heuristischen Beschreibung über Produktionsregeln können Situationen, die vom mathematischen Standpunkt aus — Beschreibung über Differential- und/oder Differenzgleichungen — (axiomatische Systemanalyse, analytische Beschreibung) für eine geschlossene Lösung zu kompliziert sind oder für die noch keine geschlossene Lösung bekannt ist, übersichtlich erfaßt und beschrieben werden. Die qualitativen Informationen lassen sich durch linguistische Variablen und Regeln mathematisch beschreiben und stehen dann einer Auswertung mit Hilfe eines Prozessors zur Verfügung. Die Werte der linguistischen Variablen sind über Fuzzy-Mengen und entsprechende Zugehörigkeitsfunktionen definiert. Mit zunehmenden Informationen und notwendigen Erfahrungen über einen Prozeß, die für die Steuerung und Regelung verwendet werden, vergrößert sich ebenfalls die Regelbasis. Parallel zur Zunahme der Anzahl an linguistischen Regeln steigt die Detailkenntnis und die Rechenzeit für eine *on line* Abarbeitung der linguistischen Regelbasis zur Regelung oder Steuerung des Systems. Das Problem der Rechenzeit kann je nach Anwendungsfall durch eine *on line* Abarbeitung einer der Regelbasis äquivalenten einfacheren Struktur, einer *off line* Auswertung der Regelbasis oder durch eine Kombination beider Verfahren zur Stellgrößengenerierung gelöst werden.

Die Darstellung der Algorithmen für Fuzzy-Systeme mit Hilfe von linguistischen WENN... DANN...-Regeln stellt auf der einen Seite eine leicht nachvollziehbare und übersichtliche Beschreibung der Wirkzusammenhänge zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen dar. Diese Beschreibungsform wird *regelbasierte Darstellung* von funktionalen Abhängigkeiten genannt. Jedoch entzieht sich diese Darstellungsform auf der anderen Seite der Anwendung von bekannten analytischen Verfahren zur Analyse und Synthese von dynamischen Systemen, da die linguistischen Bedingungs-Aktions-Regeln nicht als geschlossene Beschreibung im Sinne einer funktionalen analytischen Eingangs-Ausgangsbeziehung mit analytischen Eigenschaften dargestellt werden können. Unter analytischen Verfahren sind Methoden zusammengefaßt, zu deren Anwendung und Auswertung auf analytische Funktionen (Bronstein und Semendjajew 1985: 370) zurückgegriffen wird. So erfolgt beispielsweise bei der analytischen Optimierung die Lösung des Extremwertproblems über die

Auswertung der notwendigen und der hinreichenden Bedingungen. Bei der analytischen Optimierung muß die Zielfunktion explizit als Funktion der Entwurfparameter vorliegen und darüber hinaus auch Bedingungen hinsichtlich ihrer Differenzierbarkeit und Stetigkeit erfüllen. Die analytische Funktion zur Beschreibung des linguistisch formulierten Fuzzy-Systems bietet einen Ansatz, um eine Brücke von Fuzzy-Systemen zu Analytischen Systemen (Schwarz 1991) zu schlagen. Unter einer *analytischen Darstellung* einer funktionalen Abhängigkeit zwischen Größen ist die Beschreibungsform zu verstehen, die die Größen durch Gleichungen einander zuordnen (Smirnow 1973). Die Größen werden in den Gleichungen verschiedenen mathematischen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Logarithmieren, ...) unterworfen. Kann eine analytische Darstellungsform für regelbasierte Fuzzy-Systeme gefunden werden, dann bietet diese die Möglichkeit, die für Analytische Systeme bekannten Analyse- (Untersuchung der Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit, ...) und Syntheseverfahren (Linearisierung durch Zustandsrückführung, Folgeregelung, Störsignalentkopplung, ...) auf Fuzzy-Systeme zu übertragen.

Im Rahmen dieses Forschungsberichts wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie aus einer Beschreibung eines Algorithmus mit WENN...DANN...-Regeln (linguistische Beschreibungsform) eine funktionale Darstellung für ein Fuzzy-System bestimmt werden kann, die bis auf einige Singularitäten eine analytische Funktion über dem Definitionsbereich ist. Zunächst wird in Abschnitt 2 der Unterschied zwischen einer *off line* und einer *on line* Regelarbeitung bezogen auf die Regelungsaufgabe und die damit verbundenen Schwierigkeiten für die Darstellung des Algorithmus in einer analytischen Form erläutert. Hervorzuheben sind hier die Minimum- und die Maximumoperation bei der Inferenzbildung nach Mamdani (Lee 1990). In Abschnitt 3 werden für den Minimum- und den Maximumoperator sowie für die Eingangsgrößenbeschränkung Funktionen hergeleitet, die in Abschnitt 4 an einem einfachen Beispiel ausgewertet werden. Die funktionalen Beschreibungsformen für den Minimum-, den Maximumoperator und die Eingangsgrößenbeschränkung ermöglichen die sequentielle Abarbeitung der Fuzzyfizierung, der Inferenzbildung und der Defuzzyfizierung durch einen mathematischen Ausdruck, der eine funktionale Beziehung zwischen den gemessenen Eingangsgrößen und der scharfen Stellgröße darstellt, zu ersetzen. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick in Abschnitt 5 schließen den Forschungsbericht.

2 Off line und on line Regelarbeitung

2.1 Off line Aggregation der Regelbasis

Den Rechenzeitproblemen bei der on line Auswertung der linguistischen Regelbasis eines Fuzzy-Systems kann durch eine off line Abarbeitung der linguistischen WENN...DANN...-Regeln, die ein Kennfeld für den Algorithmus liefert, begegnet werden. Bei der off line Auswertung werden die Definitionsbereiche der beschränkten Eingangsgrößen des Fuzzy-Systems in diskrete Intervalle unterteilt. Die Schrittweite der Diskretisierung orientiert sich an dem speziellen physikalischen Problem und darf nicht zu groß gewählt werden, um ein System mit zu stark quantisierten Stellaktionen zu vermeiden. So ist eine Diskretisierung mit sehr kleiner Schrittweite für die Definitionsbereiche der Eingangsgrößen um den Nullpunkt für eine Festwertregelung von Vorteil, dagegen spricht für eine Folgeregelung eine über dem gesamten Definitionsbereich gleichmäßige Diskretisierung. Damit kann gewährleistet werden, daß auf jede Regelabweichung eine individuelle Stellaktion folgt. Anschließend können für alle Kombinationen von diskreten Eingangsgrößen die Ausgangsgrößen des Fuzzy-Systems mit Hilfe der Fuzzyfizierung, der Inferenzbildung und der Defuzzyfizierung berechnet werden. Dazu sind die physikalischen Systemeingangsgrößen zunächst auf die linguistischen Variablen abzubilden (Fuzzyfizierung). Um die Meßgrößen auf die Fuzzy-Mengen zu transformieren, werden Zugehörigkeitsfunktionen definiert, die den Zugehörigkeitsgrad der physikalischen Größe zur unscharfen Menge der Fuzzy-Variablen angeben.

Über die Verknüpfung der Fuzzy-Mengen für die Eingangsgrößen beispielsweise nach der Methode nach Mamdani (Zadeh 1965, Zadeh 1973, Lee 1990, Bertram 1991, Preuß 1992a und 1992b) — Minimum-Operator für eine UND-Verknüpfung (Implikation) und Maximum-Operator für eine ODER-Verknüpfung (Komposition) — werden die linguistischen Werte für die Ausgangsgröße berechnet (Inferenzbildung). Die Aggregation der Regeln über die Implikation und die Komposition liefert für jede Ausgangsgröße mehrere, als Fuzzy-Mengen linguistisch definierte, Werte. Um jedoch ein physikalisches Stellglied ansteuern zu können, wird eine scharfe Stellgröße als Ausgangsgröße des Fuzzy-Systems benötigt, die die Gesamtzugehörigkeitsfunktion der unscharfen Ausgangsgröße am besten repräsentiert. Hierzu stehen verschiedene Defuzzyfizierungsmethoden (Bertram 1991) zur Verfügung.

Die Inferenzbildung und die Defuzzyfizierung stellen die rechenintensiven Schritte bei der Ausgangsgrößengenerierung mit Hilfe der Fuzzy-Logik dar. Die off line Abarbeitung der Bedingungs-Aktions-Regelbasis liefert für n Eingangsgrößen und ein Ausgangsgröße (MISO-System) ein Kennfeld im $(n + 1)$ -dimensionalen Raum für die Ausgangsgröße des unscharf formulierten Systems, so daß für die Regelung oder die Simulation eines dynamischen Systems mit Fuzzy-Logik nur noch das Kennfeld während der Automatisierungsaufgabe für die diskreten Eingangsgrößen zu jedem Zeitpunkt ausgelesen werden

muß. Um die Empfindlichkeit gegenüber veränderter Eingangsgrößen und damit die Güte bei der Regelung und der Simulation mit Hilfe eines Kennfeldes zu erhöhen, kann bei der Ausgangsgrößenbestimmung zwischen den Stützstellen des Kennfeldes linear oder beliebig nichtlinear interpoliert werden, um auch für diese Wertebereiche eine angepaßte Ausgangsgröße zu ermitteln. Aufgrund der Verwendung von nichtlinearen Operatoren bei der Inferenzbildung und der Defuzzifizierung kann aus heutiger Sicht nicht unmittelbar aus der Form der Zugehörigkeitsfunktionen auf einen geeigneten Interpolationsalgorithmus geschlossen werden.

2.2 On line Aggregation der Regelbasis

Bei der on line Bestimmung der Ausgangsgröße ist es nicht erforderlich, die Wertebereiche der Eingangsgrößen zu diskretisieren, da zu jedem Abtastzeitpunkt für alle Meßgrößen über die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangs- und der Ausgangsgrößen und über die linguistische Regelbasis die Ausgangsgröße generiert wird und die Zugehörigkeitsfunktionen für die Eingangsgrößen abschnittsweise monotone Funktionen über dem Definitionsbereich sind. Dadurch ist eine derartige Regelung im Vergleich zur Kennfeldregelung — trotz Interpolation zwischen den Kennfeldstützstellen — empfindlicher und kommt dem linguistisch formulierten Algorithmus näher, da jede geringfügige Änderung der Eingangsgrößen auch zu einer ebensolchen Änderung der Ausgangsgröße in Abhängigkeit von den linguistischen Regeln führt. Um die durch die Bedingungs-Aktions-Regeln bestimmte Ausgangsgröße mit Hilfe eines Kennfeldes zu berechnen, muß eine nichtlineare Interpolation höherer Ordnung gewählt werden. Eine Möglichkeit, die Rechenzeit auch in diesem Fall zu reduzieren, bietet die mathematische Auswertung eines geschlossenen Ausdruckes für die Ausgangsgrößenberechnung. Hier ist die geschlossene Darstellung als funktionale Eingangs-Ausgangsbeziehung zu verstehen. In dieser Beziehung sind bezogen auf die Regelungsaufgabe off line die möglichen Vereinfachungen durchgeführt worden, so daß die sequentielle Abarbeitung (Fuzzifizierung, Inferenzbildung und Defuzzifizierung) des linguistischen Algorithmus verloren geht. Die so entstehende funktionale Beziehung stellt einen analytischen Ausdruck in den Eingangsgrößen und der Ausgangsgröße mit Ausnahme von wenigen Singularitäten über dem Definitionsbereich dar. Die analytische Beschreibungsform zeigt eindeutig den Einfluß jeder physikalischen Eingangsgröße auf die Berechnung der physikalischen Ausgangsgröße. Diese stellt zudem eine Möglichkeit für weitergehende Strukturuntersuchungen und -verbesserungen dar (Anwendung von analytischen Verfahren zur Fuzzy-System-Optimierung, Adaption, ...). Probleme bei dem Aufstellen einer derartigen Funktion bereiten der Minimum- und der Maximum-Operator bei der Inferenzbildung nach Mamdani (Lee 1990). Die Verwendung von interaktiven Operatoren, wie die Produktbildung für die UND-Verknüpfung nach Larsen (Lee 1990) oder die Summenbildung für eine ODER-Verknüpfung nach Mizumoto (1991) führen nicht zu den genannten Problemen, so daß für diese Operatoren schon jetzt eine analytische Beschreibungsform in analoger Vorgehensweise zu der Darstellung in Abschnitt 4.3 für ein Fuzzy-System gefunden werden kann.

3 Funktionale Beschreibung der logischen Verknüpfungsoperatoren

In diesem Abschnitt werden erstmals analytische Beschreibungen für den Minimum- und den Maximum- Operator als Voraussetzung für eine analytische Darstellung des Fuzzy- Systems hergeleitet. Die Funktionen sind bis auf einige Singularitäten über dem gesamten Definitionsbereich analytisch.

3.1 Analytische Darstellung des MINIMUM-Operators

These:

$$\left. \begin{aligned} \min\{x_1; x_2\} &= 0,5 (-|x_1 - x_2| + x_1 + x_2) \quad \forall \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad i = 1, 2 \\ &= 0,5 (-\sqrt{(x_1 - x_2)^2} + x_1 + x_2) \\ &= f(x_1, x_2) \quad . \end{aligned} \right\} (3.1)$$

□

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Fall 1:} \quad x_1 < x_2 \\ \Rightarrow \quad \min\{x_1; x_2\} = x_1 \\ \quad \quad \quad f(x_1, x_2) = 0,5 (-\sqrt{(x_1 - x_2)^2} + x_1 + x_2) \\ \text{mit} \quad -\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = x_1 - x_2 \\ \text{folgt} \quad f(x_1, x_2) = 0,5 (x_1 - x_2 + x_1 + x_2) \\ \quad \quad \quad = x_1 \\ \quad \quad \quad = \min\{x_1; x_2\} \quad , \end{array} \right\} (3.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Fall 2:} \quad x_1 = x_2 \\ \Rightarrow \quad \min\{x_1; x_2\} = x_1 = x_2 \\ \quad \quad \quad f(x_1, x_2) = 0,5 (x_1 + x_2) \\ \quad \quad \quad = x_1 = x_2 \\ \quad \quad \quad = \min\{x_1; x_2\} \quad , \end{array} \right\} (3.3)$$

Fall 3: $x_1 > x_2$

Dieser Fall muß nicht gesondert betrachtet werden, da die Funktion für die Berechnung des Minimums symmetrisch ist. □

3.2 Analytische Darstellung des MAXIMUM-Operators

These:

$$\left. \begin{aligned} \max\{x_1; x_2\} &= 0,5 (|x_1 - x_2| + x_1 + x_2) \quad \forall \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad i = 1, 2 \\ &= 0,5 (\sqrt{(x_1 - x_2)^2} + x_1 + x_2) \\ &= g(x_1, x_2) \quad . \end{aligned} \right\} (3.4)$$

□

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Fall 1:} \quad x_1 < x_2 \\ \Rightarrow \quad \max\{x_1; x_2\} = x_2 \\ \quad \quad \quad g(x_1, x_2) = 0,5 (\sqrt{(x_1 - x_2)^2} + x_1 + x_2) \\ \text{mit} \quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = x_2 - x_1 \\ \text{folgt} \quad g(x_1, x_2) = 0,5 (x_2 - x_1 + x_1 + x_2) \\ \quad \quad \quad = x_2 \end{array} \right\} (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Fall 2:} \quad x_1 = x_2 \\ \Rightarrow \quad \max\{x_1; x_2\} = x_1 = x_2 \\ \quad \quad \quad g(x_1, x_2) = 0,5 (x_1 + x_2) \\ \quad \quad \quad = x_1 = x_2 \\ \quad \quad \quad = \max\{x_1; x_2\} \quad , \end{array} \right\} (3.6)$$

Fall 3: $x_1 > x_2$

Dieser Fall muß nicht gesondert betrachtet werden, da die Funktion für die Berechnung des Maximums symmetrisch ist. □

3.3 Analytische Darstellung der Eingangsgrößenbeschränkung

Die normierten Werte der physikalischen Eingangsgröße x_n werden für die Regelauswertung mit Hilfe der Fuzzy-Logik auf den Wertebereich $[-1; 1]$ beschränkt. Für die bezüglich des Definitionsbereichs beschränkte Eingangsgröße \check{x}_n des Fuzzy-Systems gilt:

$$\check{x}_n = \begin{cases} -1 & \forall & x_n \leq -1 \\ x_n & \forall & -1 < x_n < 1 \\ 1 & \forall & 1 \leq x_n \end{cases} \quad x_n \in \mathbb{R} \quad . \quad (3.7)$$

Eine analytische Funktion (mit Ausnahme von wenigen Singularitäten ist die Funktion analytisch für den Definitionsbereich) für die Beschränkung der Eingangsgröße kann wie folgt gefunden werden:

These:

$$\begin{aligned}
 \check{x}_n &= \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} \min\{\sqrt{x_n^2}; 1\} \quad \forall \quad x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 &= \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} \cdot 0,5 \left(-\sqrt{(\sqrt{x_n^2} - 1)^2} + \sqrt{x_n^2} + 1 \right) \\
 &= h(x_n) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \textbf{Fall 1: } & x_n \leq -1 \\
 \Rightarrow & \check{x}_n = -1 \\
 & h(x_n) = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} \min\{\sqrt{x_n^2}; 1\} \\
 \Rightarrow & \min\{\sqrt{x_n^2}; 1\} = 1 \\
 \text{und} & \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} = -1 \\
 \text{und} & h(x_n) = -1 = \check{x}_n \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{Fall 2: } & -1 < x_n < 1 \\
 \Rightarrow & \check{x}_n = x_n \\
 \text{und} & \min\{\sqrt{x_n^2}; 1\} = \sqrt{x_n^2} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{Fall 2a: } & -1 < x_n < 0 \\
 \Rightarrow & \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} = -1 \\
 \text{und} & h(x_n) = x_n = \check{x}_n \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{Fall 2b: } & 0 < x_n < 1 \\
 \Rightarrow & \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} = 1 \\
 \text{und} & h(x_n) = x_n = \check{x}_n \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{Fall 3: } & 1 \leq x_n \\
 \Rightarrow & \check{x}_n = 1 \\
 \text{und} & \min\{\sqrt{x_n^2}; 1\} = 1 \\
 \text{und} & \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2}} = 1 \\
 \text{und} & h(x_n) = 1 = x_n \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

□

Mit den analytischen Funktionen (mit Ausnahme von wenigen Singularitäten sind die

Funktionen analytisch für den normierten Definitionsbereich) für den Minimum-, den Maximum-Operator und die Eingangsgrößenbeschränkung soll im weiteren anhand eines Beispiels "Regelung des Abstandes von Fahrzeugen" im Abschnitt 4 gezeigt werden, wie sich zum einen der rechnerische Aufwand durch eine off line Vereinfachung des Algorithmus bei einer on line Abarbeitung der Bedingungs-Aktions-Regeln mit dem Digitalrechner reduziert und zum anderen die linguistische Beschreibung des Regelalgorithmus in eine geschlossene Funktion, die bis auf wenige Singularitäten für den normierten Definitionsbereich analytisch ist, für einen Fuzzy-Regler überführen läßt.

4 Regelung des Abstandes von Fahrzeugen

4.1 Beschreibung der Regelstrecke

Ein Konzept für die Sicherheit auf den Straßen sorgt für die Einhaltung eines Sicherheitsabstandes zwischen zwei Fahrzeugen. Ein Entfernungsmesser ermittelt nahezu verzögerungsfrei die Distanz zwischen zwei einander folgenden Fahrzeugen. Der Sicherheitsabstand und die Spurgeschwindigkeit des zweiten Fahrzeugs stehen als Eingangsgrößen dem Abstandsregler des zweiten Fahrzeugs zur Verfügung. Die Geschwindigkeit des zweiten Fahrzeugs wird durch einen Fahrtregler (Eingriff auf das Antriebsmoment des Fahrzeugs) so geregelt — Beschleunigung und Verzögerung —, daß der Abstand zum Vorderfahrzeug einen vorgegebenen Wert annimmt. Die Fuzzy-Logik bietet sich für die Erfassung dieser Problemstellung an, da sie die Einschätzung von Situationen, wie etwa (Rebs 1991):

- ...der Abstand ist *etwas zu groß* und wird *langsam größer*, also muß das Folgefahzeug *etwas beschleunigt* werden,

oder

- ...der Abstand ist zu *klein* und wird *schnell kleiner*, also muß das Folgefahzeug *ziemlich stark abgebremst* werden,

ermöglicht.

In Bild 4.1 ist eine mögliche Verkehrssituation gezeigt, bei der zwei spurgeführte und selbsttätig geregelte Fahrzeuge mit den Geschwindigkeiten v_1 beziehungsweise v_2 einander folgen. Der Antrieb des zweiten Fahrzeugs wird durch einen nichtlinearen Fahrtregler (**FPD**-Regler := **F**uzzy-**P**roportional-**D**ifferential-Regler) so gesteuert, daß der Abstand y zum Vorderfahrzeug einem vorgegebenen Wert w folgt. Die Geschwindigkeit v_1 des Führungsfahrzeugs kann als unabhängige Störgröße angenommen werden. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_1(t) - v_2(t) \quad . \quad (4.1)$$

Der Vortriebsregler des Folgefahrzeugs wirkt über die Antriebskraft $f_a > 0$ (Motor) oder $f_a < 0$ (Bremsen). Der Antrieb reagiert gemäß der Modellgleichung

$$T_2 \frac{df_a(t)}{dt} + f_a(t) = f_0 u(t) \quad (4.2)$$

verzögert auf eine Änderung der Motorstellgröße u . Dabei bezeichnet f_0 die sich bei der Stellgröße $u = 1$ einstellende Nenn-Antriebskraft. Die Bewegung des Folgefahrzeugs mit der Masse m_2 ist, abgesehen von der Vortriebskraft f_a , von einer linear mit der Geschwindigkeit zunehmenden Reibungskraft abhängig,

$$f_R(t) = k_R v_2(t) \quad (4.3)$$

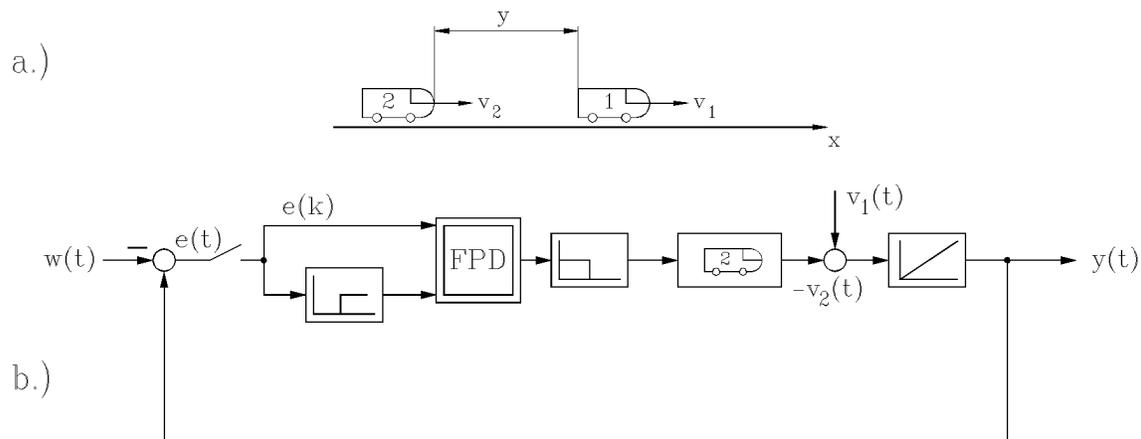


Bild 4.1: Regelung des Abstandes zweier spurgeführter Fahrzeuge
(a.) Verkehrssituation, b.) Blockschaltbild)

$$m_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = f_a(t) - k_R v_2(t) \quad ; \quad (4.4)$$

die quadratische Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Fahrzeuggeschwindigkeit bleibt unberücksichtigt und die Fahrbahn wird als eben betrachtet.

Der Entwurf eines Fuzzy-Reglers erfolgt im allgemeinen durch das Aufstellen der linguistischen WENN...DANN...-Regeln, die beispielsweise Informationen über die Eingangsgrößen, die Regelabweichung e und die zeitliche Änderung der Regelabweichung Δe oder auch das Integral der Regelabweichung $\int e dt$ verarbeiten sollen. Die Aufgabe besteht nun zunächst darin, geeignete Eingangsgrößen mit den zugehörigen Definitionsbereichen und ein System von Kontrollregeln zu wählen, die den Ausgangsgrößen entsprechende Werte zuweisen. Da die Simulation des Regelkreises auf einem Prozessor erfolgt, wird eine zeitdiskrete Untersuchung gewählt. Die Regelabweichung e zu einem bestimmten Abtastzeitpunkt k berechnet sich somit durch

$$e(k) = y(k) - w(k) \quad . \quad (4.5)$$

Für die zeitliche Änderung der Regelabweichung Δe gilt dementsprechend

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) \quad . \quad (4.6)$$

4.2 Beschreibung des Fuzzy-Reglers

Fuzzyfizierung

Als physikalische Eingangsgrößen für den Fuzzy-Regler sollen zunächst die Regelabweichung e und die zeitliche Änderung der Regelabweichung Δe verwendet werden. Dabei werden beide Größen durch eine Normierung und eine Wertebereichsbeschränkung auf das Intervall $[-1; 1]$ abgebildet. Normierte Werte außerhalb des Intervalls sind auf 1 (bei positiven Größen) beziehungsweise auf -1 (bei negativen Größen) beschränkt (Gleichung

(3.7)). Für die beiden normierten und beschränkten Größen, im folgenden als \check{e}_n und $\Delta\check{e}_n$ bezeichnet, erfolgt nun die Abbildung auf die beiden unscharfen Mengen \mathbf{P} (positiv) und \mathbf{N} (negativ). Der Verlauf der Zugehörigkeitsfunktionen ist in Bild 4.2 dargestellt. Für sie sind exemplarisch lineare Funktionen über den Wertebereich gewählt worden. Es sei angemerkt, daß für die Beschreibung der Fuzzy-Mengen jede aus analytischen Funktionen zusammengesetzte Funktion, gewählt werden kann. Zur Verdeutlichung wird im folgenden für die in Bild 4.3 aufgezeigte Zugehörigkeitsfunktion mit Hilfe des MINIMUM- und des MAXIMUM-Operators eine analytische Funktion hergeleitet. Die Zugehörigkeitsfunktion μ_1 setzt sich aus zwei linearen Funktionen b_1 und b_2 (Bild 4.3) zusammen:

$$\left. \begin{aligned} b_1(x) &= x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ b_2(x) &= -x + 1 \\ \mu_1(\check{x}_n) &= \max\{\min\{b_1(\check{x}_n); b_2(\check{x}_n)\}; 0\} \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Die aufgezeigte Idee soll an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden, da nur der Hinweis auf eine mögliche Kombination von Funktionen mittels Minimum- und/oder Maximumoperator zur Bildung von neuen Zugehörigkeitsfunktionen, die jedoch nicht mehr stetig differenzierbar sind, gegeben werden sollte. Der normierte Definitionsbereich wird jeweils auf das Einheitsintervall abgebildet (Verwendung von normierten Fuzzy-Mengen).

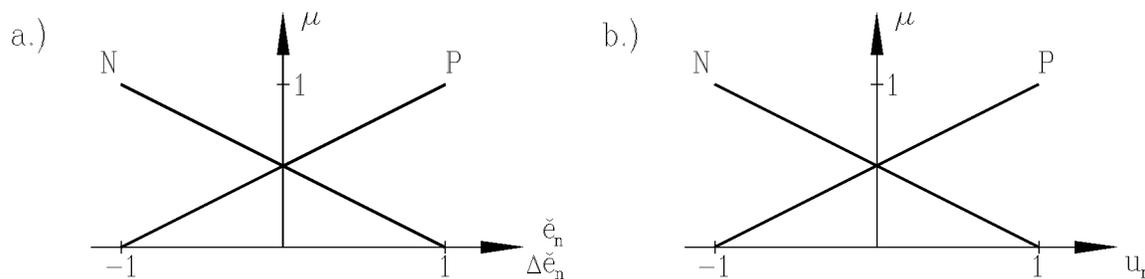


Bild 4.2: Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgrößen a.) und der Ausgangsgröße b.)

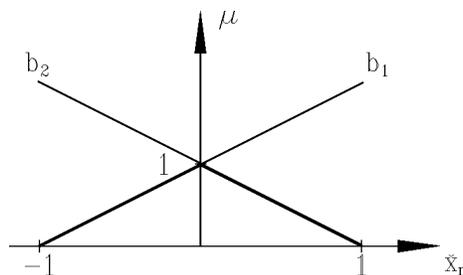


Bild 4.3: Herleitung einer analytischen Zugehörigkeitsfunktion

Die Zugehörigkeitsfunktionen des Beispiels (Bild 4.2) lauten für die normierte beschränkte Regelabweichung \check{e}_n :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{eP}(k) &= 0,5 \check{e}_n(k) + 0,5 \\ \mu_{eN}(k) &= -0,5 \check{e}_n(k) + 0,5 \\ &= 1 - \mu_{eP}(k) \end{aligned} \right\} (4.8)$$

und für die normierte beschränkte zeitliche Änderung der Regelabweichung $\Delta\check{e}_n$:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\Delta eP}(k) &= 0,5 \Delta\check{e}_n(k) + 0,5 \\ \mu_{\Delta eN}(k) &= -0,5 \Delta\check{e}_n(k) + 0,5 \\ &= 1 - \mu_{\Delta eP}(k) \quad . \end{aligned} \right\} (4.9)$$

Regelbasis

Bei der Entwicklung der linguistischen Beschreibung des Problems ist es hilfreich, sich in die Lage eines Autofahrers zu versetzen, der versucht, mit Hilfe eines Entfernungsmessers einen bestimmten Abstand zu einem vorausfahrenden Fahrzeug einzuhalten. Auf diese Art können beispielsweise die folgenden heuristischen Erfahrungen gefunden werden:

- WENN der Abstand zu *groß* ist UND noch *größer* wird,
DANN *beschleunigen* ;
- WENN der Abstand zu *groß* ist UND *schnell größer* wird,
DANN *stärker beschleunigen* ;
-

Entsprechendes gilt natürlich auch für zu geringe Abstände. Damit können die beiden folgenden Regeln zur grundsätzlichen Einhaltung des Sicherheitsabstandes von spurgeführten Fahrzeugen aufgestellt werden (linguistische Darstellung des Regelalgorithmus):

- **Regel 1:**
WENN $\check{e}_n = \mathbf{P}$ UND $\Delta\check{e}_n = \mathbf{P}$ DANN $u_n = \mathbf{P_U}$,

ODER

- **Regel 2:**
WENN $\check{e}_n = \mathbf{N}$ UND $\Delta\check{e}_n = \mathbf{N}$ DANN $u_n = \mathbf{N_U}$,

wobei $\mathbf{P_U}$ beziehungsweise $\mathbf{N_U}$ unscharfe Mengen für eine positive (Beschleunigung) beziehungsweise negative Stellgröße (Verzögerung) darstellen.

Aggregation der Stellgröße

Bei der Produkt–Inferenz–Methode nach Larsen (Lee 1990) (PRODUKT–Operator für eine UND–Verknüpfung und MAXIMUM–Operator für eine ODER–Verknüpfung) findet eine Gewichtung der einzelnen unscharfen Ausgangsgröße statt, da jede Regel einen Beitrag in Form von einer Fuzzy–Menge der Ausgangsgröße liefert. Als Gewichtungsfaktor wird der Erfülltheitsgrad (Bertram 1991) der jeweiligen Regel verwendet. Die Regelmengende beschreibt den Algorithmus zur Einhaltung des Sicherheitsabstandes in Form von zwei gleichberechtigten Relationen zwischen den Vorbedingungen (Prämissen) und den Schlußfolgerungen (Konklusionen). Die Inferenzbildung mit dem MAXIMUM–PRODUKT–Operator nach Larsen beschreibt die Bestimmung der Zugehörigkeitsfunktion für die Schlußfolgerung jeder Regel (Implikation) über den PRODUKT–Operator und das Zusammenfügen der unscharfen Ausgangsgrößen (Komposition) mit Hilfe des Maximum–Operators, dabei können die Partialprämissen über nichtinteraktive (Minimum, Maximum, ...) oder interaktive Operatoren (Produkt, algebraische Summe, ...) zum Erfülltheitsgrad der Prämisse bei Konjunktion oder Disjunktion verknüpft werden. In der überwiegenden Zahl von praktischen Anwendungen der genannten Inferenzen werden sowohl für die Auswertung der Partialprämissen bei Konjunktionen als auch für die Implikationen gleiche Operatoren verwendet. Entsprechendes gilt für die Auswertung der Partialprämissen bei Disjunktionen und dem Kompositionsoperator, die getroffene Vereinbarung ist jedoch nicht zwingend. Werden die unscharfen Mengen \mathbf{P}_U und \mathbf{N}_U der Ausgangsgröße graphisch dargestellt, dann spiegeln sich die Mengenverknüpfungen mit Hilfe der Fuzzy–Logik in verschiedenen Flächen für die unscharfe Ausgangsgröße wider. Mit der Berechnung des Schwerpunktes der Fläche, die zwischen der Gesamtzugehörigkeitsfunktion und der Abszisse liegt, und der anschließenden Projektion des Schwerpunktes auf die Abszisse wird eine scharfe Ausgangsgröße zur Ansteuerung eines physikalischen Stellgliedes berechnet, die die Gesamtfläche (unscharfe Ausgangsgröße) sinnvoll beschreibt. Die Defuzzifizierung verwendet im Rahmen des Beispiels die erweiterte Schwerpunktmethod als nichtlineare Defuzzifizierung (Bertram 1991). Bei den Algorithmen für die Defuzzifizierung wird zwischen den linearen

$$u_n(k) = \sum_{i=1}^m s_i F_i(k) \quad (4.10)$$

und den nichtlinearen Verfahren (Ying u. a. 1990)

$$u_n(k) = \frac{\sum_{i=1}^m s_i F_i(k)}{\sum_{i=1}^m F_i(k)} \quad (4.11)$$

unterschieden ($s_i :=$ Teilflächenschwerpunkte, $F_i :=$ Teilflächeninhalte). Zur Herleitung der analytischen Beschreibungsform für Fuzzy–Systeme wird an dieser Stelle nur das nichtlineare Verfahren zur Defuzzifizierung untersucht. Die daraus gewonnenen Ergebnisse gel-

ten dann auch für die lineare Defuzzifizierung, da diese implizit in der nichtlinearen Defuzzifizierung enthalten ist. Der Nachweis dieser Aussage ergibt sich aus der Betrachtung des Zählers für die nichtlineare Defuzzifizierung, dieser entspricht der linearen Defuzzifizierung.

4.3 Herleitung einer analytischen Eingangs–Ausgangsgrößenbeschreibungsform für ein Fuzzy–System

Die beschriebene sequentielle Abarbeitung eines Fuzzy–Systems (Fuzzifizierung, Reglaggregation und Defuzzifizierung) wird im weiteren auf einen analytischen Ausdruck zurückgeführt. Die Auswertung der Regelbasis mit der Methode nach Mamdani (Lee 1990) führt auf die folgende Minimumbildung bei der Auswertung der UND–Verknüpfungen im Rahmen der Bewertung der Prämissen und der anschließenden Implikation für die beiden Regeln unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.1) und (3.4):

- **Regel 1:**

$$\left. \begin{aligned} \mu_{PU}(k) &= \min\{\mu_{eP}(k); \mu_{\Delta eP}(k)\} \\ &= 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{eP}(k) - \mu_{\Delta eP}(k))^2} + \mu_{eP}(k) + \mu_{\Delta eP}(k) \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

- **Regel 2:**

$$\left. \begin{aligned} \mu_{NU}(k) &= \min\{\mu_{eN}(k); \mu_{\Delta eN}(k)\} \\ &= 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{eN}(k) - \mu_{\Delta eN}(k))^2} + \mu_{eN}(k) + \mu_{\Delta eN}(k) \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Mit den Zugehörigkeitsgraden für die Fuzzy–Mengen \mathbf{P}_U (positiv) und \mathbf{N}_U (negativ) der Ausgangsgröße lassen sich nun die Teilflächen für die erweiterte Schwerpunktmethod zur nichtlinearen Defuzzifizierung und darüber die scharfe normierte Ausgangsgröße u_n berechnen:

- Inferenzverfahren nach Mamdani und nichtlineare Defuzzifizierung

$$F_{NU}(k) = 2 \mu_{NU}(k) (2 - \mu_{NU}(k)) \quad (4.14)$$

$$F_{PU}(k) = 2 \mu_{PU}(k) (2 - \mu_{PU}(k)) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
u_n(k) &= \frac{\sum_{i=1}^2 s_i F_i(k)}{\sum_{i=1}^2 F_i(k)} \\
&= \frac{-F_{NU}(k) + F_{PU}(k)}{F_{NU}(k) + F_{PU}(k)} \\
&= \frac{-2\mu_{NU}(k)(2 - \mu_{NU}(k)) + 2\mu_{PU}(k)(2 - \mu_{PU}(k))}{2\mu_{NU}(k)(2 - \mu_{NU}(k)) + 2\mu_{PU}(k)(2 - \mu_{PU}(k))} \\
&= \frac{-\mu_{NU}(k)(2 - \mu_{NU}(k)) + \mu_{PU}(k)(2 - \mu_{PU}(k))}{\mu_{NU}(k)(2 - \mu_{NU}(k)) + \mu_{PU}(k)(2 - \mu_{PU}(k))}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

- Inferenzverfahren nach Larsen und nichtlineare Defuzzifizierung

$$F_{NU}(k) = 2\mu_{NU}(k) \tag{4.17}$$

$$F_{PU}(k) = 2\mu_{PU}(k) \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
u_n(k) &= \frac{-F_{NU}(k) + F_{PU}(k)}{F_{NU}(k) + F_{PU}(k)} \\
&= \frac{-2\mu_{NU}(k) + 2\mu_{PU}(k)}{2\mu_{NU}(k) + 2\mu_{PU}(k)} \\
&= \frac{-\mu_{NU}(k) + \mu_{PU}(k)}{\mu_{NU}(k) + \mu_{PU}(k)}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Die Berechnungen der Ausgangsgrößen nach Mamdani und Larsen zeigen, daß eine off line Auswertung der Inferenzbildung und der Defuzzifizierung *im Sinne einer Vereinfachung* (die Anzahl der algebraischen Operationen wird kleiner) durch mathematische Umformungen immer anzustreben ist. Hierdurch können unnötige mathematische Operationen während der sequentiellen Regelbearbeitung vermieden und die notwendige Rechenzeit für den Algorithmus verkleinert werden. Die Vereinfachung des Algorithmus sollte jedoch an letzter Stelle nach der Synthese des Fuzzy-Systems im Rahmen der Implementierung auf einem Prozessor erfolgen, da bei jeder erneuten Änderung im Bereich der Zugehörigkeitsfunktionen und der Regelbasis im Rahmen der Entwicklung des Fuzzy-Systems die off line Optimierung des Algorithmus wiederholt werden muß. Die Inferenzbildung nach Larsen und die anschließende nichtlineare Defuzzifizierung mit Hilfe der erweiterten Flächenschwerpunktbildung liefert für die normierte physikalische Stellgröße u_n den einfachsten analytischen Ausdruck. An dieser Stelle muß angemerkt werden, daß die sich ergebenden

Schnittflächen bei der Teilflächenschwerpunktbildung zur Berechnung des Gesamtflächen-
schwerpunkts doppelt berücksichtigt werden. Dies führt auf eine Auswertung mit gerin-
gerem numerischen Aufwand. Anhand der Funktion für die Stellgrößenberechnung nach
Larsen wird im folgenden aufgezeigt, wie durch weitere mathematische Umformungen ei-
ne Funktion, die die physikalische Ausgangsgröße in Abhängigkeit von den physikalischen
und damit gemessenen Eingangsgrößen berechnet und die bis auf einige Singularitäten für
den gesamten Definitionsbereich analytisch ist, entwickelt werden kann. Die Bestimmung
der analytischen Funktion für das Inferenzverfahren nach Mamdani kann in analoger Vor-
gehensweise durchgeführt werden. Mit den Gleichungen (4.12) und (4.20) zur Berechnung
der Zugehörigkeitsgrade μ_{PU} und μ_{NU} der Ausgangsgröße und den Beziehungen für die
Zugehörigkeitsgrade nach den Gleichungen (4.8) und (4.9) bestimmt sich die unscharfe
Ausgangsgröße wie folgt (das Argument der Zeit k (zeitdiskrete Betrachtung) wird aus
Gründen der Übersicht in den folgenden Gleichungen weggelassen):

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{-\mu_{NU} + \mu_{PU}}{\mu_{NU} + \mu_{PU}} & (4.20) \\
&= \frac{-0,5(-\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} + \mu_{eN} + \mu_{\Delta eN}) + 0,5(-\sqrt{(\mu_{eP} - \mu_{\Delta eP})^2} + \mu_{eP} + \mu_{\Delta eP})}{0,5(-\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} + \mu_{eN} + \mu_{\Delta eN}) + 0,5(-\sqrt{(\mu_{eP} - \mu_{\Delta eP})^2} + \mu_{eP} + \mu_{\Delta eP})} \\
&= \frac{\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} - \mu_{eN} - \mu_{\Delta eN} - \sqrt{(\mu_{eP} - \mu_{\Delta eP})^2} + \mu_{eP} + \mu_{\Delta eP}}{-\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} + \mu_{eN} + \mu_{\Delta eN} - \sqrt{(\mu_{eP} - \mu_{\Delta eP})^2} + \mu_{eP} + \mu_{\Delta eP}} \\
&= \frac{\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} - \mu_{eN} - \mu_{\Delta eN} - \sqrt{(1 - \mu_{eN} - 1 + \mu_{\Delta eN})^2} + 1 - \mu_{eN} + 1 - \mu_{\Delta eN}}{-\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} + \mu_{eN} + \mu_{\Delta eN} - \sqrt{(1 - \mu_{eN} - 1 + \mu_{\Delta eN})^2} + 1 - \mu_{eN} + 1 - \mu_{\Delta eN}} \\
&= \frac{-\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN} + 1}{-\sqrt{(\mu_{eN} - \mu_{\Delta eN})^2} + 1} . & (4.21)
\end{aligned}$$

In die Gleichung (4.21) können nun die Ausdrücke für die Zugehörigkeitsgrade in Abhängig-
keit von den physikalischen Meßgrößen — Gleichungen (4.8) und (4.9) — eingesetzt wer-
den:

$$\left. \begin{aligned}
u_n(k) &= \frac{-(-0,5 \check{e}_n(k) + 0,5) - (-0,5 \Delta \check{e}_n(k) + 0,5) + 1}{-\sqrt{((-0,5 \check{e}_n(k) + 0,5) - (-0,5 \Delta \check{e}_n(k) + 0,5))^2} + 1} \\
&= \frac{\check{e}_n(k) + \Delta \check{e}_n(k)}{2 - \sqrt{(-\check{e}_n(k) + \Delta \check{e}_n(k))^2}} \\
&= q(\check{e}_n(k), \Delta \check{e}_n(k)) .
\end{aligned} \right\} (4.22)$$

Die Änderung der Regelabweichung und die normierten Eingangsgrößen berechnen sich zum Zeitpunkt k wie folgt:

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) \quad (4.23)$$

$$\check{e}_n(k) = K_e e(k) \quad (4.24)$$

$$\Delta \check{e}_n(k) = K_{\Delta e} \Delta e(k) \quad . \quad (4.25)$$

Für den Fall, daß die normierten Eingangsgrößen schon im Einheitsintervall $[-1; 1]$ liegen, also die normierten und beschränkten Eingangsgrößen gleich sind:

$$\check{e}_n(k) = e_n(k) = K_e e(k) \quad (4.26)$$

$$\Delta \check{e}_n(k) = \Delta e_n(k) = K_{\Delta e} (e(k) - e(k-1)) \quad , \quad (4.27)$$

berechnet sich die scharfe Stellgröße zum Zeitpunkt k wie folgt

$$\left. \begin{aligned} u_n(k) &= \frac{e_n(k) + \Delta e_n(k)}{2 - \sqrt{(-e_n(k) + \Delta e_n(k))^2}} \\ &= \frac{K_e e(k) + K_{\Delta e} (e(k) - e(k-1))}{2 - \sqrt{(-K_e e(k) + K_{\Delta e} (e(k) - e(k-1)))^2}} \\ &= \frac{a_1 e(k) + a_2 e(k-1)}{2 - \sqrt{(b_1 e(k) + b_2 e(k-1))^2}} \\ &= q_1(e(k), e(k-1)) \end{aligned} \right\} (4.28)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= K_e + K_{\Delta e} \quad , \\ a_2 &= -K_{\Delta e} \quad , \\ b_1 &= -K_e + K_{\Delta e} \quad \text{und} \\ b_2 &= -K_{\Delta e} \quad . \end{aligned}$$

Es ist anzumerken, daß in der überwiegenden Zahl von Anwendungen die normierten Eingangsgrößen der Fuzzy-Systeme im offenen Intervall $] -1; 1 [$ liegen. Für den Fall, daß die normierten Eingangsgrößen durch die Wertebereichsbegrenzung auf die Intervallgrenzen abgebildet werden, kann die Stellgrößengenerierung nicht unmittelbar durch die Beziehung

$$u_n(k) = q_1(e(k), e(k-1)) \quad (4.29)$$

berechnet werden. Hierfür ist zusätzlich die analytische Funktion (3.8) aus Abschnitt 3.3 für die Eingangsgrößenbeschränkung anstelle der normierten und beschränkten Größen \check{e}_n und $\Delta \check{e}_n$ zu verwenden:

$$\check{e}_n(k) = \frac{0,5 e_n(k)}{\sqrt{(e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(e_n(k))^2} - 1)^2 + \sqrt{(e_n(k))^2} + 1} \right) \quad (4.30)$$

$$\Delta \check{e}_n(k) = \frac{0,5 \Delta e_n(k)}{\sqrt{(\Delta e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(\Delta e_n(k))^2} - 1)^2} + \sqrt{(\Delta e_n(k))^2 + 1} \right). \quad (4.31)$$

Daraus ergibt sich bis auf wenige Singularitäten die analytische Funktion über dem Definitionsbereich des Fuzzy-Reglers mit den beschränkten Eingangsgrößen Regelabweichung \check{e}_n und zeitliche Änderung der Regelabweichung $\Delta \check{e}_n$:

$$u_n(k) = \frac{\check{e}_n(k) + \Delta \check{e}_n(k)}{2 - \sqrt{(-\check{e}_n(k) + \Delta \check{e}_n(k))^2}} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} u_n(k) &= \left[\frac{0,5 e_n(k)}{\sqrt{(e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(e_n(k))^2} - 1)^2} + \sqrt{(e_n(k))^2 + 1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{0,5 \Delta e_n(k)}{\sqrt{(\Delta e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(\Delta e_n(k))^2} - 1)^2} + \sqrt{(\Delta e_n(k))^2 + 1} \right) \right] : \\ &: \left[2 - \left[\left(-\frac{0,5 e_n(k)}{\sqrt{(e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(e_n(k))^2} - 1)^2} + \sqrt{(e_n(k))^2 + 1} \right) + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{0,5 \Delta e_n(k)}{\sqrt{(\Delta e_n(k))^2}} \left(-\sqrt{(\sqrt{(\Delta e_n(k))^2} - 1)^2} + \sqrt{(\Delta e_n(k))^2 + 1} \right) \right) \right]^{0,5} \right] \\ &= q_2(e(k), e(k-1)) \quad . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Eine weitere Umformung der Funktion für beschränkte Eingangsgrößen zur Berechnung der funktionalen Eingangs–Ausgangsgrößenbeziehung soll an dieser Stelle nicht betrachtet werden, da zum einen durch die Wahl der Normierungsfaktoren sichergestellt werden kann, daß die normierten Eingangsgrößen auf das Intervall $] -1; 1 [$ abgebildet und damit die wesentlich einfachere Funktion q_1 aus Gleichung (4.28) zur Ausgangsgrößenberechnung verwendet werden kann. Zum anderen ist zu erkennen, daß auch die Gleichung (4.32) eine analytische Darstellung zur Ausgangsgrößenberechnung für die beschränkten Eingangsgrößen darstellt. Mit Hilfe der Funktionen für die Inferenzbildung nach Mamdani — Minimum– und Maximumbildung für die logischen Verknüpfungen— kann somit ebenfalls eine geschlossene Funktion für das Fuzzy–System gefunden werden. Damit sind die Voraussetzungen für weitergehende Strukturuntersuchungen, die auf analytische Methoden zurückgreifen und ein Ansatz für den Übergang zu den Analytischen Systemen hergeleitet worden.¹

¹Darüber hinaus zeigt ein Vergleich der Rechenzeiten für die Stellgrößenberechnung nach der bisherigen sequentiellen Vorgehensweise bei der linguistischen Regelbasisauswertung — Zugehörigkeitsgrade für die Eingangsgrößen berechnen, Regelauswertung über Minimum– und Maximumbildung und anschließende nichtlineare Defuzzifizierung mittels erweiterter Flächenschwerpunktberechnung — mit der Berechnung über die funktionale Beschreibungsform des Fuzzy–Systems eine Reduzierung der notwendigen Rechenzeit um 50 %.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Darstellung der Algorithmen für Fuzzy-Systeme mit Hilfe von linguistischen Bedingungs-Aktions-Regeln stellt eine leicht nachvollziehbare und übersichtliche Beschreibung der Wirkzusammenhänge zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen dar, die sich aus einer heuristischen Systembetrachtung ergeben. Diese Beschreibungsform entzieht sich jedoch einer systematischen Analyse und Synthese, die auf analytischen Verfahren der Systemtheorie beruhen. Die Herleitung einer analytischen Darstellung aus einer linguistischen Beschreibung des Fuzzy-Systems kann als Voraussetzung für den Übergang von den Fuzzy-Systemen zu den Analytischen Systemen gesehen werden. Die analytische Funktion zur Beschreibung des Eingangs-Ausgangsverhaltens beinhaltet die sequentiellen Schritte — Fuzzyfizierung, Inferenzbildung und Defuzzyfizierung — der linguistischen Regelbasisauswertung. Dazu sind für die Minimum-, die Maximumbildung und die Eingangsgrößenbeschränkung ebenfalls bis auf wenige Singularitäten analytische Funktionen über dem Definitionsbereich der Eingangsgrößen hergeleitet worden.

Aus der analytischen Darstellung des Algorithmus für das Fuzzy-System kann nicht mehr auf die Regelbasis, die Zugehörigkeitsfunktionen und die verwendeten Operationen für die Inferenzbildung geschlossen werden. Eine Modifikation und/oder Erweiterung der Bestandteile des Fuzzy-Systems führt zwangsläufig zu einer neuen Berechnung der analytischen Funktion. Diese kann jedoch off line durchgeführt werden und ist eindeutig nachvollziehbar. Anhand des Beispiels "Regelung des Abstandes von spurgeführten Fahrzeugen" ist die Vorgehensweise bei der Transformation eines linguistischen Fuzzy-Konzeptes (Fuzzyfizierung, Inferenzbildung und Defuzzyfizierung) in eine analytische Beschreibungsform für den Definitionsbereich der Eingangsgrößen aufgezeigt worden. Im weiteren muß noch untersucht werden, in wie weit sich diese Darstellung auch für umfangreichere Regelbasen eignet. Eine Möglichkeit bietet die Aufteilung der Regelbasis in Untergruppen, wobei für diese dann die analytischen Darstellungen aufgestellt und diese dann parallel und/oder hierarchisch ausgewertet werden können (hierarchische Strukturen mit parallelen Subsystemen).

6 Literaturverzeichnis

- Bertram, T.** 1991. *Einführung in die Fuzzy-Regelung*. Forschungsbericht 04/91 Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Universität -GH- Duisburg.
- Bronstein, I. W. und K. A. Semendjajew** 1985. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main, Thun: Harri Deutsch.
- Herden, W. und H.-W. Hein** 1990. *Kurzlexion Wissenbasierte Systeme*. München, Wien: Oldenburg.
- Jackson, P.** 1987. *Expertensysteme — Eine Einführung*. Bonn: Addison-Wesley Publishing Company.
- Lee, C. C.** 1990. Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC* 2, 404-418 und 419-435.
- Mizumoto, M.** 1991. Min-Max-Gravity method versus Product-Sum-Gravity method for fuzzy controls. *Proceedings of the 4. IFSA World Congress*, 07.07. – 12.07.91, Brüssel/Belgien. Engineering, 127-130.
- Preuß, H.-P.** 1992a. Fuzzy-Control — heuristische Regelung mittels unscharfer Logik. *Automatisierungstechnische Praxis atp* 4, 176-184.
- Preuß, H.-P.** 1992b. Fuzzy-Control — heuristische Regelung mittels unscharfer Logik. *Automatisierungstechnische Praxis atp* 5, 239-246.
- Rebs, H.** 1991. *Entwicklung eines Fuzzy-Reglers zur Regelung des Sicherheitsabstandes von spurgeführten Fahrzeugen*. Studienarbeit Fachbereich Elektrotechnik, Fachgebiet Meß- und Regelungstechnik, Universität -GH- Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: systemtheoretische Grundlagen*. München, Wien: Oldenbourg.
- Smirnow, W. I.** 1973. *Lehrgang der höheren Mathematik. Teil I*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Ying, H., W. Siler and J. J. Buckley** 1990. Fuzzy-Control Theory: A Nonlinear Case. *Automatica* 26, 513-520.
- Zadeh, L. A.** 1965. Fuzzy sets. *Information and Control* 9, 338-353.
- Zadeh, L. A.** 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC* 3, 28-44.