

Helmut Schwarz Forschungsbericht Nr. 12/94 Es wird dargestellt, daß die Nulldynamik bilinearer Systeme (BLS) und der Systeme mit quadratischer Zustandsabhängigkeit linear ist. Die Koeffizienten des diese Nulldynamik charakterisierenden Polynoms lassen sich unmittelbar dem kanonischen Zustandsmodell entnehmen. Ist die Nulldynamik nicht stabil, das System also „nichtminimalphasig“, kann in einfacher Weise ein lineares System derart parallel geschaltet werden, daß das Gesamtsystem minimalphasig ist.

1 Einleitung

Die Nulldynamik eines analytischen Systems mit linearer Steuerung ist der dynamische Systemteil, der für den Systemausgang unbeobachtbar gemacht werden kann. Bei einem linearen Eingrößensystem mit der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} &= K \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \\ &= K_1 \frac{\prod_{i=1}^m (s - N_i)}{\prod_{j=1}^n (s - P_j)} = \mathbf{c}^T [\mathbf{I}_s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.1)$$

korrespondiert die Nulldynamik mit den Nullstellen N_i des Systems. Diese Nullstellen sind zwar invariant gegenüber Systemrückführungen (Kailath 1980), doch können die Eigenwerte λ_j bzw. Pole P_j durch Zustandsrückführungen so geändert werden, daß sie die Werte der Nullstellen N_i annehmen und damit in $F(s)$ eine Pol-/Nullstellen-Kürzung eintritt. Es können also genau m Eigenbewegungen am Systemausgang unbeobachtbar gemacht werden. Zwischen Zähler- und Nennergrad besteht der Differenzengrad

$$d = n - m , \quad (1.2)$$

der auch eine wesentliche Bedeutung bei der Verallgemeinerung des Begriffes „Nulldynamik“ auf Klassen von nichtlinearen Systemen hat. In diesem Bericht wird die Nulldynamik für zwei einfache Unterklassen der ALS näher untersucht.

Ist das System (1.1) stabil – alle Eigenwerte (Pole) haben negative Realteile – und haben auch alle Nullstellen negative Realteile – $Z(s)$ und $N(s)$ sind Hurwitz–Polynome –, dann heißt das System ein Phasenminimumssystem. Dieser Name röhrt bekanntlich daher, daß der Frequenzgang des Systems (1.1) mit $F(jw) = F(s)|_{s=jw}$ bei vorgegebenen Zahlen n und m der Pole und Nullstellen eine maximale Phasennacheilung hat, die dann minimal bezüglich n und m ist, wenn $Z(s)$ und $N(s)$ Hurwitz–Polynome sind. Bei Phasenminimumssystemen besteht darüberhinaus ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasengang derart, daß, wenn einer von beiden (analytisch) gegeben ist, der andere daraus berechnet werden kann. Ferner zeichnen sich lineare Phasenminimumssysteme dadurch aus, daß das invertierte System $F^{-1}(s)$ stabil ist. Neben der Systeminvertierbarkeit gibt es eine Vielzahl von Regelungstechniken, bei denen die stabile Nulldynamik der Regelstrecke zwingend ist, nicht nur bei linearen, sondern auch bei nichtlinearen Systemen. Von (Hahn und Unbehauen 1982, Hahn u. a. 1983) wurde vorgeschlagen, instabile Nullstellen linearer Regelstrecken durch Parallelschalten geeigneter linearer Kompensatoren so zu modifizieren, daß das Gesamtsystem nur stabile Nullstellen hat. Dies brachte den Erfolg, daß z. B. adaptive Regelgesetze ein stabiles Verhalten bezüglich des kompensierten Systems haben. In diesem Beitrag wird dargestellt, daß die Nulldynamikkompensation auch eine Methode für nichtlineare Systeme darstellt.

In Abschnitt 2 werden die wichtigen Begriffe „Differenzengrad“, „Nulldynamik“ sowie „Isidori–Normalform“ für nichtlineare Systeme des Typs ALS knapp zusammengefaßt. Die entsprechenden Eigenschaften werden dann in Abschnitt 3 für BLS und QLS in spezieller Struktur dargestellt. Schließlich wird in Abschnitt 4 die vorstehend skizzierte Möglichkeit der Modifizierung der Nulldynamik durch Parallelkompensation bei nichtlinearen Systemen ausführlicher beschrieben.

2 Differenzengrad, Nulldynamik und Isidori–Normalform

In diesem Abschnitt werden Systeme der Form Eingrößen–ALS

$$\begin{aligned}\Sigma_{ALS} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ y(t) &= c^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

vorausgesetzt.

Definition 2.1 (Isidori 1989, Schwarz 1991)

Das Analytisch–Lineare–System (2.1) hat den Differenzengrad oder relativen Grad d in einer Umgebung \mathcal{U} um \mathbf{x}_0 , wenn gilt:

$$\text{i}) \quad L_b L_a^k c(\mathbf{x}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \text{ in der Nähe von } \mathbf{x}_0 \text{ und } \forall k < d - 1\tag{2.2}$$

$$\text{ii}) \quad L_b L_a^{d-1} c(\mathbf{x}) \neq 0 \quad .\tag{2.3}$$

□

Zunächst einmal gibt d genau die Anzahl der benötigten zeitlichen Ableitungen des Systemausganges $y(t)$ an, bis zu der das Eingangssignal $u(t)$ explizit auftritt. Es wird wieder eine Umgebung \mathcal{U} um \mathbf{x}_0 betrachtet. Mit

$$\left. \begin{aligned}y(t_0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 \\ \text{und (2.1)} \quad \dot{y}(t) &= L_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{a} \mathbf{x}(t) \\ &\vdots \\ y^{(d)}(t) &= \frac{d^d y(t)}{dt^d} = L_a^d \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + L_b L_a^{d-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) u(t)\end{aligned}\right\} .\tag{2.4}$$

Wurde der Differenzengrad d ermittelt, ist hiermit auch die Dimension m der Nulldynamik bestimmt:

Satz 2.1 (Isidori 1989)

- i) Die Nulldynamik eines Analytisch–Linearen Systems (2.1) in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 ist eine (gegenüber Zustandstransformationen) invariante SystemkenngroÙe und hat die Dimension $\mu = n - d$, worin d der Differenzengrad des Systems für \mathbf{x}_0 ist.
- ii) Der Systemzustand $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in zwei Teilzustände aufspalten

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

mit $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, wobei \mathbf{x}_2 der Nulldynamik zugeordnet ist.

- iii) Anwendung des Regelgesetzes

$$u^*(t) = u(t) = -\frac{L_a^d c(\mathbf{x})}{L_b L_a^{d-1} c(\mathbf{x})} \quad . \quad (2.6)$$

bewirkt Ausgangssignalnullung für alle Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2(t_0) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

mit $\mathbf{x}_2(t_0) \in \mathbb{R}^{n-d}$.

- iv) Das durch (2.6) geregelte System ist ein lineares „integratorenkoppeltes“ System mit d in Reihe geschalteter Integratoren und einem $(n - d)$ -dimensionalen nicht beobachtbaren (nichtlinearen) Teilsystem (Bild 2.1). \square

Ein ALS (2.1) kann durch eine geeignete Koordinatentransformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

in einem anderen Koordinatensystem des Zustandes dargestellt werden. Geeignet ist eine Koordinatentransformation (2.8), wenn

- i) die Jacobimatrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.9)$$

nicht singulär ist: Rang $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = n$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

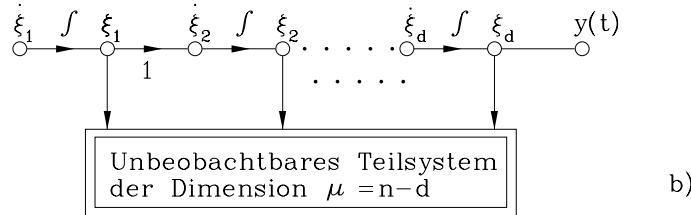
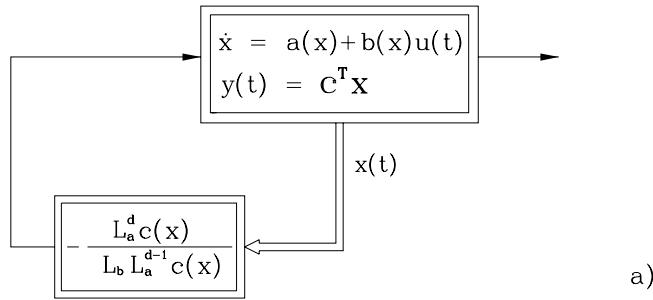


Bild 2.1: Struktur des Ausgangsnullungsproblems a) Regelungsstruktur b) äquivalentes System

ii) die inverse Transformation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}(t)) \quad (2.10)$$

existiert.

Von Isidori (1989) wird eine spezielle nichtlineare Koordinatentransformation angegeben, die ein ALS auf eine spezielle Normalform transformiert, die für eine Reihe von Problemen der Regelung nichtlinearer Systeme außerordentlich nützlich ist. Diese Transformation wird hier in Form eines Satzes eingeführt.

Durch diese Koordinatentransformation wird ein *zustandsäquivalentes* System erzeugt. Darauf wird dann eine Zustandsrückführung angewendet, die dann eine Klasse *zustandsrückführäquivalenter* Systeme liefert. Durch geeignete Wahl dieser Zustandsrückführung können wichtige Probleme wie lokale Linearisierung, lokale Stabilisierung oder auch Störsignalunterdrückung in übersichtlicher Weise angegangen werden.

Satz 2.2 (Isidori 1989)

Ein System (2.1) habe den Differenzengrad $d \leq n$.

- i) Man wähle für eine Koordinatentransformation (2.8)

$$\left. \begin{aligned} t_1(\mathbf{x}) &= c(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ t_2(\mathbf{x}) &= L_a c(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ t_d(\mathbf{x}) &= L_a^{d-1} c(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\}. \quad (2.11)$$

Ist $d < n$, dann ist es immer möglich, $n - d$ weitere Funktionen $t_{d+1}(\mathbf{x}) \dots t_n(\mathbf{x})$ derart zu finden, daß die Abbildung (Zustandstransformation):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} t_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ t_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

eine Jacobimatrix hat, die nichtsingulär für \mathbf{x}_0 ist. Damit ist $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ für eine lokale Koordinatentransformation geeignet.

- ii) Der Wert der Funktionen $t_{d+1}(\mathbf{x}), \dots, t_n(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ kann beliebig festgelegt werden.
- iii) Darüber hinaus ist es möglich, die $t_{d+1}(\mathbf{x}), \dots, t_n(\mathbf{x})$ so zu wählen, daß:

$$\left. \begin{aligned} L_b t_i(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für alle } d + 1 \leq i \leq n \\ &&& \text{und alle } \mathbf{x} \text{ in einer Umgebung von } \mathbf{x}_0 \text{ ist.} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

□

Der vorstehende Satz beschreibt eine lokale Koordinatentransformation, bei der alle $t_i(\mathbf{x})$ linear unabhängig sind, also eine Basis in \mathbb{R}^n bilden. Darüber hinaus bewirkt diese Transformation eine Darstellung des Systems in einer ausgezeichneten Normalform, die hier *Isidori-Normalform* heiße:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{d-1}(t) &= z_d(t) \\ \dot{z}_d(t) &= a^*(\mathbf{z}(t)) + b^*(\mathbf{z}(t))u(t) \\ \dot{z}_{d+1}(t) &= q_{d+1}(\mathbf{z}(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= q_n(\mathbf{z}(t)) \\ y(t) &= z_1(t) \end{aligned} \right\}. \quad (2.14)$$

In (2.14) sind die skalaren Vektorfunktionen $a^*(\mathbf{z})$ und $b^*(\mathbf{z})$ gegeben zu:

$$\left. \begin{aligned} a^*(\mathbf{z}) &= L_{\mathbf{a}}^d c(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})} \\ b^*(\mathbf{z}) &= L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{d-1} c(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})} \end{aligned} \right\}. \quad (2.15)$$

In (2.14) läßt sich der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ in zwei Teilvektoren aufspalten:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_1(t) &= \boldsymbol{\xi}(t) = [z_1(t), \dots, z_d(t)]^T \\ \mathbf{z}_2(t) &= \boldsymbol{\eta}(t) = [z_{d+1}(t), \dots, z_n(t)]^T \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

Der Teilvektor $\boldsymbol{\eta}(x)$ ist der Zustand der *Nulldynamik*, so daß (2.14) auch in dieser kompakteren Form geschrieben werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{d-1}(t) &= z_d(t) \\ z_d(t) &= a^*(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) + b^*(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t))u(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$

3 LS, BLS und QLS in Steuerungsnormalform

Es ist bekannt, daß in der regelungskanonischen und in der beobachterkanonischen Form der Zustandsmodelle linearer Eingrößensysteme die Koeffizienten des Zähler- und des Nennerpolynoms der zugehörigen Übertragungsfunktion direkt ablesbar sind (Schwarz 1969, 1994b). Damit ist bei diesen linearen Systemen (LS) die Nulldynamik und ihre Dimension eindeutig bestimmt, ohne die Systeme zunächst auf Isidori–Normalform zu transformieren. Es wird gezeigt werden, daß bilineare Systeme (BLS) und Systeme mit quadratischer Zustandsabhängigkeit und linearer Steuerung (QLS) in Regelungsnormalform eine lineare Nulldynamik haben, und auch hier die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Nulldynamik im Zustandsmodell zu finden sind.

3.1 Lineare Systeme

Zunächst wird einführend, um die Verhältnisse zu klären, Isidori (1989) folgend ein lineares Eingrößensystem in Isidori–Normalform transformiert. Der Übertragungsfunktion

$$F(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (3.1)$$

ist ein Zustandsmodell in Regelungsnormalform zuzuordnen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{m-1} \ 1 \ 0 \ \dots] \mathbf{x}(t) ,$$

das in Bild 3.1 als Blockschaltbild dargestellt ist.

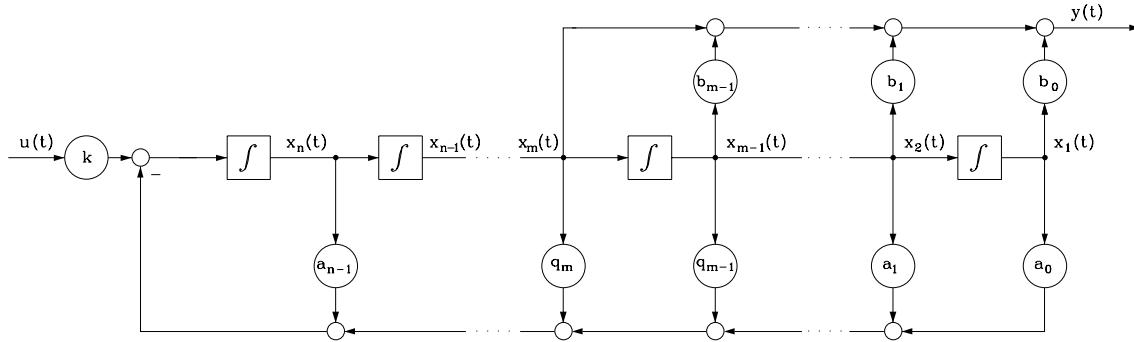


Bild 3.1: Blockschaltbild eines linearen Systems in Regelungsnormalform

Mit (2.11) sind die Koordinaten der Isidorinormalform zu bestimmen:

$$z_i(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{x}(t) ; \quad i = 1, 2, \dots, d = n - m \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1(t) = t_1(\mathbf{x}) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{m-1} x_m + x_{m+1} \\ z_2(t) = t_2(\mathbf{x}) = b_0 x_2 + \dots + b_{m-1} x_{m+1} + x_{m+2} \\ \vdots \\ z_d(t) = t_d(\mathbf{x}) = b_0 x_d + b_1 x_{d+1} + \dots + b_{m-1} x_{n-1} + x_n \end{array} \right\} . \quad (3.4)$$

Für die frei ergänzbaren Koordinaten z_i für $i = d + 1, \dots, n$ ist im Falle des vorliegenden linearen Systems diese Wahl naheliegend:

$$\left. \begin{array}{l} z_{d+1}^{(t)} = x_1(t) \\ z_{d+2}^{(t)} = x_2(t) \\ \vdots \\ z_n^{(t)} = x_m(t) = x_{(n-d)}(t) \end{array} \right\} . \quad (3.5)$$

Es ist leicht zu überprüfen, daß die Jacobimatrix

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_m & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_0 & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & 0 & & \\ 0 & & & & 1 & & & \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

nichtsingulär ist. Mit den so bestimmten Koordinaten hat das System (3.1) bzw. (3.2) diese Isidorinormalform entsprechend (2.14):

$$\left. \begin{array}{lcl} \dot{z}_1(t) & = & z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) & = & z_3(t) \\ \vdots & & \\ \dot{z}_{d-1}(t) & = & z_d(t) \\ \dot{z}_d(t) & = & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^d(\mathbf{x}(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{b} u(t) \\ & = & a^*(\mathbf{z}) + K u(t) = \mathbf{a}_1^T z(t) + K u(t) \\ \dot{z}_{d+1}(t) & = & \dot{x}_1 = x_2 = z_{d+2}(t) \\ \vdots & & \\ \dot{z}_{n-1}(t) & = & z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) & = & -b_0 z_{d+1}(t) - b_1 z_{d+2}(t) - \dots - b_{m-1} z_n(t) + z_1(t) \\ y(t) & = & z_1(t) \end{array} \right\}. \quad (3.7)$$

Die Struktur dieses Systems entsprechend (2.17) lässt sich für das untersuchte lineare System expliziter angeben:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\xi}(t) = \dot{z}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{r}^T & & & \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{s}^T \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{P} \xi(t) + \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}(t) \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

Die die Nulldynamik bestimmende Matrix \mathbf{Q} hat diese Besetzung:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & & & -b_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Beispiel 3.1

Das System mit $n = 3, m = 1$ und damit $d = 2$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

soll vor allem verdeutlichen, wie die inverse Transformation $\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})$, die in (3.7) bzw. (2.17) benötigt wird, zu bestimmen ist. Mit (3.3) und (3.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} z_1(t) &= b_0 x_1 + x_2 \\ z_2(t) &= b_0 x_2 + x_3 \\ z_3(t) &= x_1 \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}(t)) = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_1 - b_0 z_3 \\ z_2 - b_0 z_1 + b_0^2 z_3 \end{bmatrix}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= [a_2 b_0 - a_1 - b_0^2 : b_0 - a_2 : b_0 a_1 + b_0^3 - a_0 - a_2 b_0^2] \mathbf{z}(t) + K u(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_1 - b_0 z_3 \quad . \end{aligned}$$

Mit (3.8) und (3.9) ist die Nulldynamik bestimmt:

$$\dot{\mu}(t) = -c_0 \mu(t) \quad ; \quad \lambda_\mu = N = -b_0 \quad .$$

Es wird nun noch die Ausgangsnullung in Originalkoordinaten bestimmt. Aus (2.6) folgt

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^d \mathbf{x}(t)}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{b}} + w(t) \\ &= -\frac{[-a_0 : -a_1 : b_0 - a_2] \mathbf{x}(t)}{K} + w(t) \end{aligned}$$

und damit für das rückgeführte („genullte“) System:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= [b_0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

□

3.2 Bilineare Systeme

Bilinearen Systemen kann diese Regelungsnormalform zugeordnet werden (Schwarz 1994a):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & \cdots & n_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t) \quad (3.10) \\ y(t) &= [c_0 \ c_1 \ \cdots \ c_{m-1} \ 1 \ \mathbf{0}] \boldsymbol{x}(t)\end{aligned},$$

die durch Bild 3.2 verdeutlicht ist.

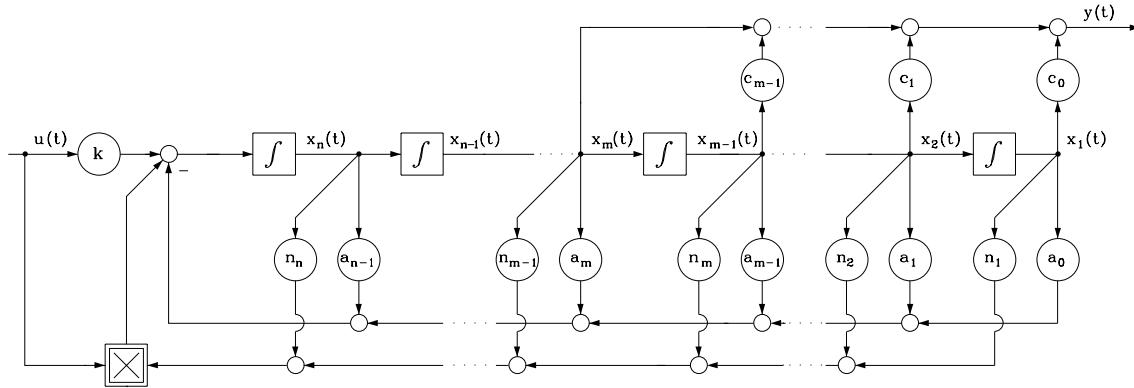


Bild 3.2: Blockschaltbild des BLS in Regelungsnormalform

Wird das System (3.10) auf Isidori–Normalform transformiert

$$\left. \begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{d-1}(t) &= z_d(t) \\ \dot{z}_d(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^d \boldsymbol{x}(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} [\mathbf{N} \boldsymbol{x}(t) + \mathbf{b}] u(t) \\ \dot{z}_{d+1}(t) &= \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{z}_n(t) &= x_{m+1}(t)\end{aligned}\right\}, \quad (3.11)$$

so zeigt ein Vergleich mit (3.7), daß der homogene Systemteil identisch mit dem des linearen Systems ist. Für $\dot{z}_d(t)$ ist nun aber

$$L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{d-1} \mathbf{b}(\boldsymbol{x}) u(t) = \{[n_1, n_2, \dots, n_n] \boldsymbol{x}(t) + \mathbf{K}\} u(t). \quad (3.12)$$

Die BLS in Regelungsnormalform haben damit diese interessante Eigenschaft:

Satz 3.1

Ein BLS nach Gl. (3.10) in nichtlinearer Regelungsnormalform hat

- i) eine lineare Nulldynamik.
- ii) Die Nullstellen sind die Nullstellen des Polynoms der (linearen) Fehlerdynamik.
- iii) Die Elemente der Ausgangsmatrix \mathbf{c}^T sind die Koeffizienten des Nullstellenpolynoms. \square

Beispiel 3.2

In Anlehnung an Beispiel 3.1 wird das bilineare System in Regelungsnormalform mit $n = 3, m = 1$ und $d = 2$ betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \ 1 \ 0] \quad .$$

Die zugehörige Isidori–Normalform lautet:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \dot{z}_d(t) \\ &= [-a_0 z_3 - a_1(z_2 - b_0 z_3) + (b_0 - a_2)(z_2 - b_0 z_1 - b_0^2 z_3)] + \\ &\quad + [n_1 z_3 + n_2(z_2 - b_0 z_3) + n_3(z_2 - b_0 z_1 - b_0^2 z_3) + K]u(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_1 - b_0 z_3 \quad , \end{aligned}$$

also hat das System die endliche Nullstelle $N = -b_0$.

Es wird nun die Rückführung in Originalkoordinaten bestimmt, die die Ausgangsnullung bewirkt. Mit (2.6) gilt:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{L_{\mathbf{a}}^d c(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{d-1} c(\mathbf{x})} + w(t) = -\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}}{\mathbf{c}^T \mathbf{A} (\mathbf{N} \mathbf{x} + \mathbf{b})} + w(t) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(t) &= [-a_1 : -a_2 : b_0 - a_2] \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} (\mathbf{N} \mathbf{x} + \mathbf{b}) &= [n_1 : n_2 : n_3] \mathbf{x}(t) + K \end{aligned}$$

Das rückgekoppelte System hat mit $u^*(t)$ diese Form:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= [b_0 \ 1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

\square

3.3 QLS in Regelungsnormalform

Die in (Schwarz 1994b) definierte Regelungsnormalform für Systeme mit quadratischer Zustandsabhängigkeit und linearer Steuerung (QLS) haben dieses Zustandsmodell, das in Bild 3.3 als Blockschaltbild dargestellt ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) + \\
 &\quad \left[\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) \right] u(t) \quad (3.13) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) + \\
 &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)}(t) u(t) \\
 y(t) &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \mathbf{x}(t)
 \end{aligned}$$

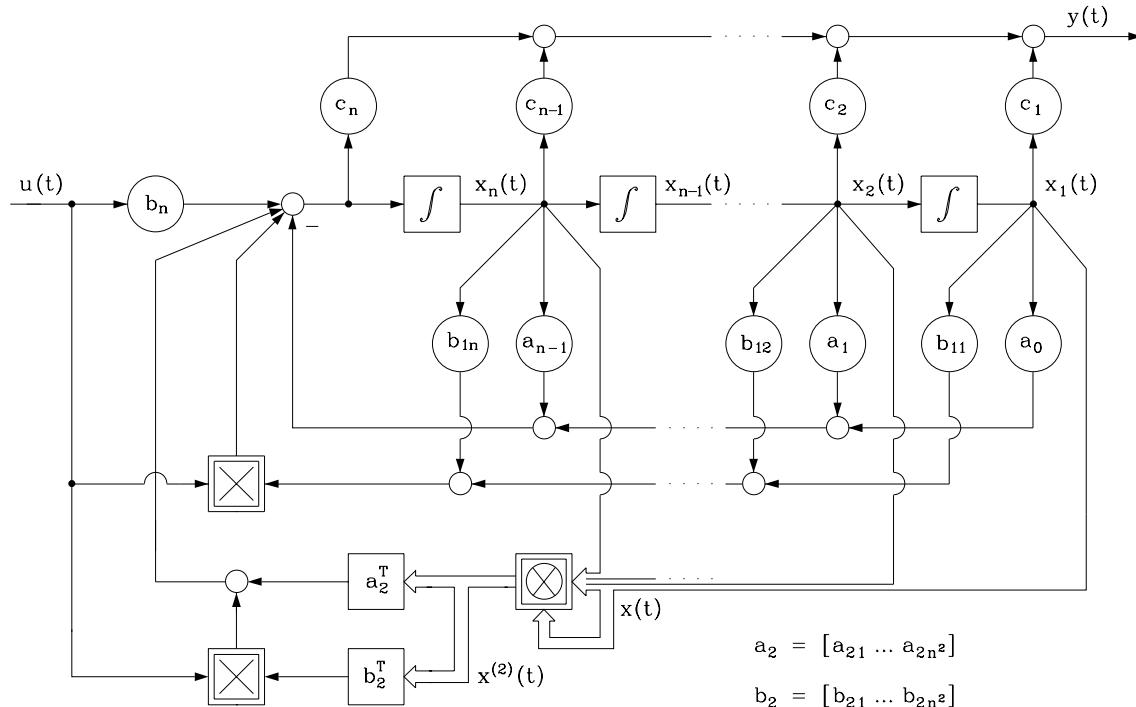


Bild 3.3: QLS in Regelungsnormalform

In (3.13) wurde das „reduzierte“ Kroneckerprodukt verwendet mit

$$\mathbf{x}^{[2]} = [x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, \dots, x_2x_n, \dots, x_n^2]^T \in \mathbb{R}^r \quad (3.14)$$

mit

$$r = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n . \quad (3.15)$$

Damit haben dann auch die Zeilenvektoren \mathbf{a}_2^T und \mathbf{b}_2^T jeweils r Komponenten.

Im folgenden sind in Analogie zu den in den Abschnitten 3.1 für LS und 3.2 für BLS angegebenen Beziehungen die Beobachtungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, 1, \mathbf{0}] \mathbf{x}(t) \\ \text{sowie } b_n &= K \end{aligned} \right\} (3.16)$$

eingeführt. Es wird nun für das QLS in (3.12) mit (3.16) der Differenzengrad bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ \dot{y}(t) &= L_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = c^T [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^{[2]}(t)] = \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ &\vdots \\ y^{(d-1)} &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{x}(t) \\ y^{(d)} &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^d \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{x}^{[2]}(t) + [K + \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}^{[2]}(t)] u(t) \end{aligned} \right\} . \quad (3.17)$$

Für die QLS in Regelungsnormalform ist also wie bei den LS und BLS die Dimension m der Nulldynamik $m = n - d$ genau gleich der Zahl m der Koeffizienten in der (linearen) Beobachtungsmatrix \mathbf{c}^T in (3.16).

Mit der Transformation auf Isidori–Normalform

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) &= \gamma_0 x_1 + \gamma_1 x_2 + \dots + \gamma_{m-1} x_m + x_{m+1} \\ z_2(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= \gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_3 + \dots & x_{m+1} \\ &\vdots \\ z_d(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{x}(t) &= \gamma_0 x_d + \gamma_1 x_{d+1} + \dots + \gamma_{m-1} x_{n-1} + x_n \\ z_{d+1}(t) &= x_1(t) \\ z_{d+2}(t) &= x_2(t) \\ &\vdots \\ z_n(t) &= x_m(t) = x_{n-d}(t) \end{aligned} \right\} (3.18)$$

erhalten wir das System (3.12) in Normalform:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{d-1}(t) &= z_d(t) \\ \dot{z}_d(t) &= \mathbf{c}^T A^d \mathbf{x}(t) |_{\mathbf{x}=t^{-1}(\mathbf{z})} + \mathbf{a}_2^T \mathbf{x}^{[2]} |_{\mathbf{x}=t^{-1}(\mathbf{z})} + K u(t) + \\ &\quad + \mathbf{b}_1^T x(t) |_{\mathbf{x}=t^{-1}(\mathbf{z})} + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}^{[2]} |_{\mathbf{x}=t^{-1}(\mathbf{z})} \\ \dot{z}_{d+1}(t) &= z_{d+2}(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) &= x_{m+1}(t) = z_1(t) - \gamma_0 z_{d+1}(t) - \gamma_{m-1} z_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Diesem transformierten System ist das interessante Ergebnis zu entnehmen:

Satz 3.2

Ein QLS in Regelungsnormalform nach Gl. (3.12) hat

- i) eine lineare Nulldynamik der Dimension $m = n - d$.
- ii) Die Nullstellen sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der (linearen) Fehlerdynamik.
- iii) Die Elemente der Ausgangsmatrix \mathbf{c}^T in (3.16) sind die Koeffizienten des Nullstellenpolynoms.

□

Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ a_{21} & \dots & a_{26} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K \end{bmatrix} u(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} & \dots & b_{26} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) u(t) \\ y(t) &= [c_0 \ c_1 \ 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

a) Bestimmung des Differenzengrades:

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [c_0 \ c_1 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= [-a_0 c_0 - a_1 c_1 - a_2] \mathbf{x}(t) + [a_{11} \ \dots \ a_{16}] \mathbf{x}^{[2]}(t) + K u(t) + \\ &+ \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}(t) u(t) + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}^{[2]}(t) , \end{aligned}$$

er ist also mit Definition 2.1:

$$d = 1 \quad \text{bzw.} \quad m = 2 \quad .$$

b) Koordinatentransformation:

$$z_1(t) = t_1(\mathbf{x}) = c_0 x_1(t) + c_1 x_2(t) + x_3(t) = z_d(t)$$

$$z_2(t) = x_1(t)$$

$$z_3(t) = x_2(t)$$

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_1(t) = L_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + L_b L_a^0 \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

$$= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{x}^{[2]}(t) + [K + \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}^{[2]}(t)] u(t)$$

$$\dot{z}_2(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t) = z_3(t)$$

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_2(t) = x_3(t) = z_1(t) - c_0 z_2(t) - c_1 z_3(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}(t)) : \quad x_1(t) = z_2(t) \\ &\quad x_2(t) = z_3(t) \\ &\quad x_3(t) = z_1(t) - c_0 z_2(t) - c_1 z_3(t) \end{aligned}$$

c) Ausgangsnullung

$$u^*(t) = -\frac{L_a^d \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)}{L_b L_a^{d-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)} = -\frac{L_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)}{\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))}$$

$$L_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = [-a_0 : c_0 - a_1 : c_1 - a_2] \mathbf{x}(t) + [a_{21}, \dots, a_{26}]^T \mathbf{x}^{[2]}(t)$$

$$L_b \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{K} + [b_1 : b_2 : b_3] \mathbf{x}(t) + [b_{21}, \dots, b_{26}]^T \mathbf{x}^{[2]}(t)$$

Damit erhält das rückgekoppelte System diese Form:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_0 & -c_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ y(t) &= [c_0 \ c_1 \ 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

□

4 Nullstellenverschiebung durch Kompensation

Für eine Reihe von Regelungstrategien – auch Zustandsregelungen linearer Systeme – ist eine wesentliche Voraussetzung für das stabile Verhalten des geregelten Systems, daß die Regelstrecke minimalphasig ist, ihre Nulldynamik also stabil ist. Bei der Untersuchung adaptiver Regelungskonzepte für lineare Systeme konnten (Hahn und Unbehauen 1982, Hahn u. a. 1983, Torres 1990) zeigen, daß die gegebenenfalls vorhandenen Nullstellen der Regelstrecke in der rechten s-Halbebene durch Parallelschalten eines geeignet ausgelegten linearen Systems kompensiert werden können derart, daß ein Ersatzsystem mit stabiler Nulldynamik entsteht. Der Gesamtregler setzt sich dann aus dem Kompensator und dem für das Ersatzsystem konzipierten Regler zusammen.

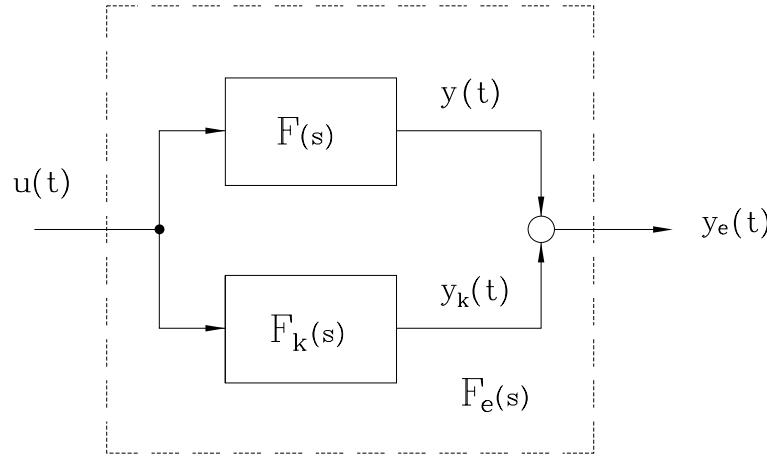


Bild 4.1: Zur Nullstellenverschiebung durch Parallelkompensation

In Bild 4.1 ist eine lineare Regelstrecke mit parallelgeschaltetem linearem Kompensator als Blockschaltbild dargestellt. Das gegebene System habe die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z^+(s) \cdot Z^-(s)}{N^+(s) \cdot N^-(s)} , \\ \delta\{Z(s)\} &= m = m^+ + m^- \\ \delta\{N(s)\} &= n = n^+ + n^- , \quad m < n , \end{aligned} \tag{4.1}$$

worin $Z^+(s)$ und $N^+(s)$ Hurwitzpolynome seien, während für $Z^-(s)$ und $N^-(s)$ gelte:

$$\left. \begin{aligned} Z^-(s) &= (s - N_1^-) \dots (s - N_{m^-}) ; \quad R_e\{N_i^-\} \geq 0 \\ N^-(s) &= (s - P_1^-) \dots (s - P_{n^-}) ; \quad R_e\{P_i\} \geq 0 \end{aligned} \right\}. \tag{4.2}$$

Der stabile Kompensator habe eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion und wird so angesetzt:

$$F_k(s) = \frac{Z_k(s)}{N_k(s)} = \frac{Z^+(s)Z_{k_1}(s)}{N^+(s)N_{k_1}(s)} , \tag{4.3}$$

daß die stabilen Zähler- und Nennerteilpolynome des gegebenen Systems übernommen werden. Für das Ersatzsystem gilt mit (4.1) und (4.3):

$$\begin{aligned} F_e(s) &= F(s) + F_k(s) = \frac{Z_e(s)}{N_e(s)} = \frac{Z^+(s) \cdot Z_{e_1}(s)}{N^+(s)N^-(s)N_{k_1}(s)} \\ &= \frac{Z^+(s)[Z^-(s)N_{k_1}(s) + Z_{k_1}(s)N^-(s)]}{N^+(s)N^-(s)N_{k_1}(s)} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

War das gegebene System instabil, dann muß auch das Ersatzsystem durch Rückführung stabilisiert werden. Die noch frei wählbaren Polynome $Z_{k_1}(s)$, $N_{k_1}(s)$ in (4.3) sind so zu bestimmen, daß für $F_k(s)$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} \delta\{Z_k(s)\} &= m_k \\ &\quad m_k \leq n_k \\ \delta\{N_k(s)\} &= n_k \end{aligned} \right\} . \quad (4.5)$$

In der Anwendung kann dabei $m_k = n_k$, also $F_k(s)$ ist keine echt gebrochen rationale Funktion, zugelassen werden, da der Kompensator als Algorithmus zusammen mit dem überlagerten Regelungsalgorithmus realisiert wird. Darüberhinaus ist das Hauptauslegungskriterium, daß in (4.4) das Zählerpolynom nur Nullstellen mit negativen Realteilen hat. Insbesondere Torres (1990) beschreibt Methoden zur Auslegung geeigneter Kompen-satoren.

Um die Übersichtlichkeit für das folgende zu erhöhen, wird nun vorausgesetzt, daß $F(s)$ stabil sei, also gelte:

$$N(s) = N^+(s) \quad \text{und} \quad N^-(s) = 1 . \quad (4.6)$$

Damit vereinfacht sich der Kompensator mit:

$$N_k(s) = N(s) \quad (4.7)$$

zu:

$$F_k(s) = \frac{Z^+(s)[Z^-(s) + Z_{k_1}(s)]}{N(s)} \quad (4.8)$$

und damit gilt für das Ersatzsystem:

$$F_e(s) = \frac{Z^+(s)[Z^-(s) + Z_{k_1}(s)]}{N(s)} = \frac{Z^+(s)Z_{e_1}(s)}{N(s)} . \quad (4.9)$$

Zur Erzeugung eines Ersatzsystems mit stabiler Nulldynamik durch „Nullstellenverschiebung“ mittels Parallelkompensation muß also das gewünschte Zählerpolynom $Z_{e_1}(s)$ vor-gegeben werden und dann $Z_{k_1}(s)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} Z_{e_1}(s) &= Z^-(s) + Z_{k_1}(s) \\ \text{oder} \quad Z_{k_1}(s) &= Z_{e_1}(s) - Z^-(s) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mit } Z_{e_1}(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{m^-} s^{m^-} \\ Z^-(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{m^-} s^{m^-} \\ Z_{k_1}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{m^-} s^{m^-} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

ist eine einfache Auslegung auch für den Fall möglich, daß das gegebene System in Form eines Zustandsmodells vorliegt. Hat dieses Zustandsmodell Regelungs- oder Beobachternormalform, dann lassen sich wie in Abschnitt 3 für das lineare System in Regelungsnormalform ausgeführt, die Zählerpolynom-Koeffizienten direkt aus dem Zustandsmodell entnehmen. Es ist dabei nur zu beachten, daß für die Gesamtzählerpolynome gilt:

$$\left. \begin{array}{l} Z(s) = z^+(s)z^-(s) = K[\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{m^-} s^{m^-} + s^m] \\ Z_e(s) = z^+(s)z_{e_1}(s) = K[\gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{m^-} s^{m^-} + s^m] \\ Z_K(s) = z^+(s)z_{K_1}(s) = K[\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{m^-} s^{m^-} + s^m] \end{array} \right\} m = m^+ + m^- \quad (4.12)$$

Wird die Regelstrecke mit einem Kompensator parallel geschaltet, erhält man ein Zustandsmodell des Ersatzsystems mit Gl. (3.2)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} y(t) \quad (4.13)$$

$$y(t) = [\gamma_0 \ \gamma_1 \ \dots \ \gamma_{m^-} \ 1 \ \mathbf{0}] \mathbf{x}(t)$$

$$\text{mit } \gamma_i = \alpha_i + \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, m-1 , \quad (4.14)$$

auf das nun das überlagerte Regelungsgesetz anzuwenden ist.

Faßt man die Ergebnisse aus Abschnitt 3 mit den vorstehenden dieses Abschnitts zusammen, so wird erhalten:

Satz 4.1

Die Nulldynamik linearer Systeme sowie von BLS und QLS in Regelungsnormalform läßt sich durch Parallelschalten eines linearen Kompensators in Regelungsnormalform so verändern, daß das entstandene Ersatzsystem eine global gültige lineare Nulldynamik mit beliebig vergebaren „stabilen“ Nullstellen hat. \square

Bemerkung:

Für beliebige ALS lassen sich zu Satz 4.1 analoge Ergebnisse für eine lokale Umgebung in einer Gleichgewichtslage finden, wenn die Nulldynamik des ALS in Isidori-Normalform in die betrachtete Gleichgewichtslage linearisiert wird. \square