

# **Zur Modellbildung, Simulation und Regelung eines elastischen Manipulatorarmes**

Mingli Bai

Forschungsbericht Nr. 14/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Der Forschungsbericht berichtet über die Modellbildung, Simulation und Regelung eines elastischen Manipulatorarmes als einfacher Fall eines elastischen Handhabungssystems. Ein Zustandsmodell des Systems sowie die Gewichtsfunktionen des offenen Regelkreises werden vorgestellt. Der elastische Manipulatorarm wird durch eine Zustandsrückführung geregelt und dazu ein reduzierter Beobachter entwickelt. Die Simulationsergebnisse und die Animation des Systems werden dargestellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Modellbildung eines elastischen Manipulatorarmes</b>	<b>3</b>
2.1 Beschreibung des elastischen Armes . . . . .	3
2.2 Zustandsmodell . . . . .	6
2.3 Gewichtsfunktionen des offenen Regelkreises . . . . .	6
<b>3 Analyse, Synthese und Simulation des Systems</b>	<b>10</b>
3.1 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	10
3.2 Entwurf eines Zustandsreglers . . . . .	10
3.3 Entwurf eines reduzierten Beobachters . . . . .	11
3.4 Simulationsergebnisse und Animation . . . . .	14
<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>17</b>
<b>5 Literaturverzeichnis</b>	<b>18</b>

# Nomenklatur

<b>A</b>	Systemmatrix
<b>b</b>	Eingangsvektor
<b>C</b>	Ausgangsmatrix
<i>EI</i>	Biegesteifigkeit
<i>E<sub>k</sub></i>	kinetische Energie
<i>E<sub>p</sub></i>	potentielle Energie
<b>F</b>	Systemmatrix des Beobachters
<b>I</b>	Einheitsmatrix
<i>I<sub>w</sub></i>	Trägheitsmoment der Welle
<i>k</i>	Parameter der Eigenfunktionen
<b>K<sub>1</sub></b>	Verstärkungsmatrix des Beobachters
<i>l</i>	Länge
<i>q(t)</i>	verallgemeinerte Koordinaten
<b>r</b>	Zustandsrückführungsvektor
$\mathbb{R}^f$	Menge der $f \times 1$ -Vektoren
$\mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$	Menge der $f \times f$ -Matrizen
<i>t</i>	Zeit
<b>u(t)</b>	Steuervektor
<i>w<sub>s</sub>(t)</i>	Sollwert
<i>w(x, t)</i>	elastische Deformation
<b>x(t)</b>	Zustandsgröße
<b>y(t)</b>	Ausgang
<i>y(x, t)</i>	absolute Verschiebung
<b>0</b>	Nullmatrix
<i>ρ</i>	gleichmäßig verteilte Masse
<i>θ(t)</i>	Winkel des Motors
<i>ϕ(x)</i>	Eigenfunktion
<i>λ</i>	Parameter der Eigenfunktionen
<i>ω</i>	Eigenfrequenz

# 1 Einleitung

Anfang der siebziger Jahre begannen die Untersuchungen von Handhabungssystemen mit elastischen Gliedern (Gevarter 1970). Seitdem sind viele Untersuchungen über die Regelung elastischer Handhabungssysteme durchgeführt worden (Bayo 1987, Cetinkunt und Yu 1991, Cetinkunt und Wu 1992, Chapnik u.a. 1991, Feliu u.a. 1993, Wang und Vi-dyasagar 1991, 1992, Yuan u.a. 1993). Bei vielen Aufgabenstellungen, insbesondere in der Raumfahrt, ist eine Gewichtsreduktion der Handhabungssysteme gefordert. Um hohe Geschwindigkeiten zu erreichen und die Energieverluste zu verringen, werden elastische Arme, die als Systeme mit verteilten Parametern betrachtet werden, eingesetzt. Die Regelung der elastischen Handhabungssysteme hat nicht nur die Aufgabe, eine vorgegebene Bahn zu verfolgen, sondern soll auch die wegen der Elastizität auftretenden Schwingungen unterdrücken. Im Hinblick auf die Regelung muß zuerst ein geeignetes Modell bestimmt werden.

Die Deformation eines elastischen Armes ist im Raum kontinuierlich, wobei die Dynamik solcher Systeme durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird. Diese Gleichungen können mit Lagrange-, Hamilton- oder Euler–Newton–Verfahren aufgestellt werden. Man nimmt üblicherweise an, daß

1. der elastische Arm sich in einer Ebene bewegt,
2. der Arm nach der Euler–Bernoulli–Balkentheorie einem schlanken Balken entspricht sowie eine kleine Deformation besitzt und
3. die Masse des Armes gleichförmig verteilt ist.

Bei der Auflösung der partiellen Differentialgleichungen können nur selten exakte Lösungen gefunden werden, wenn das System komplex ist. Deswegen versucht man, solche Systeme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen darzustellen, d. h. die elastische Deformation wird durch unendlichdimensionale, gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Dazu werden die Rayleigh–Ritz Methode (assumed-mode method) oder Finite–Elemente–Methoden angewendet (Cordes 1992). Um einen Regler zu entwerfen, ist das System näherungsweise durch eine endliche Zahl von Eigenfunktionen zu beschreiben. Die restlichen Eigenfunktionen werden vernachlässigt. Es werden meistens Eigenfunktionen vom einseitig gelenkigen Balken (pinned-free mode) und vom einseitig eingespannten Balken (clamped-free mode) verwendet, wobei nur einige Eigenfunktionen (meist zwei oder drei) berücksichtigt werden.

Es sollte ein konstanter, robuster Regler oder ein adaptiver, zeitveränderlicher Regler gewählt werden, um die wegen der Parameteränderungen (z. B. verschiedene Zusatzmassen am Balkenende) unerwünschten Schwingungen zu unterdrücken. Oakley und Cannon (1989) sowie Yuan u.a. (1993) wenden PID-Regler an, während ein adaptiver Regler von

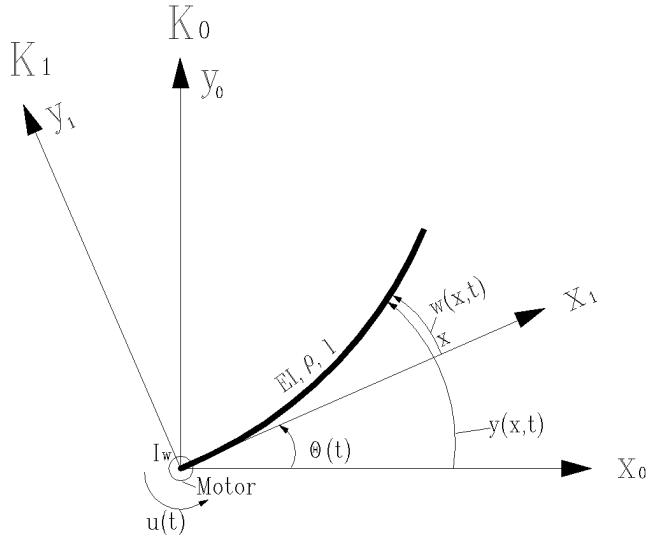
Cetinkunt und Wu (1992) entworfen wurde. Ein Regelungskonzept mit Hilfe der passiven Regelungstheorie ist von Wang und Vidyasagar (1992) durchgeführt worden. Der vorliegende Bericht stellt einen Regler mit Hilfe der Zustandsrückführung vor, wobei nur eine elastische Eigenfunktion weiterverwendet wird. Ein reduzierter Beobachter 2. Ordnung, der Schätzwerte für die nicht gemessenen Zustände liefert, wurde entwickelt.

Für die Simulation bzw. die Darstellung der Systembewegung wird die Animation des Systems durchgeführt. Für die Animation unter MATLAB werden einige Vorschläge gegeben, um die Animationsdauer zu verkürzen. Im folgenden Abschnitt wird zunächst die Modellbildung eines elastischen Armes vorgestellt. In Abschnitt 3 werden Analyse, Synthese und Simulation des Systems dargestellt. Eine Zusammenfassung mit anschließendem Ausblick beendet diesen Bericht.

## 2 Modellbildung eines elastischen Manipulatorarmes

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen, das Zustandsmodell sowie die Gewichtsfunktionen eines elastischen Manipulatorarmes vorgestellt.

### 2.1 Beschreibung des elastischen Armes



**Bild 2.1:** Ein elastischer Arm

Als ein einfaches Beispiel elastischer Handhabungssysteme wird ein direkt von einem Gleichstrommotor angetriebener, unbelasteter und elastischer Arm der Länge  $l$  (Bild 2.1) betrachtet. Die Biegesteifigkeit und die gleichmäßig verteilten Masse werden durch  $EI$  und  $\rho$  beschrieben, das Stellmoment des Motors durch  $u(t)$ . Der Arm dreht in einer horizontalen Ebene. Die Referenzsysteme sind hier willkürlich mit  $K_0$  und  $K_1$  bezeichnet, wobei  $\theta(t)$  dem Winkel des Motors entspricht. Die elastische Deformation wird durch  $w(x, t)$  bezeichnet, während für die absolute Verschiebung eines beliebigen Punktes  $x$

$$y(x, t) = \theta(t)x + w(x, t) \quad (2.1)$$

gilt. Die Deformation  $w(x, t)$  kann nach der Rayleigh-Ritz Methode diskretisiert werden (Meirovitch 1967) :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad .$$

Dabei entspricht die  $q_i(t)$  den verallgemeinerten Koordinaten und  $\phi_i(x)$  die Eigenfunktionen. Wenn die Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balkens verwendet werden, dann können die  $\phi_i(x)$  durch

$$\phi_i(x) = l (\cosh(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - k_i (\sinh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x))) \quad (2.2)$$

beschrieben werden (Fraser und Daniel 1991) mit

$$k_i = \frac{\cos(\lambda_i l) + \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) + \sinh(\lambda_i l)}, \quad (2.3)$$

und  $\lambda_i$  den Wurzeln der Gleichung

$$1 + \cos(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l) = 0. \quad (2.4)$$

Die Eigenfunktionen erfüllen die folgenden orthogonalen Bedingungen:

$$\int_0^l \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \rho l^3 \delta_{ij} \quad (2.5)$$

$$\int_0^l EI \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} dx = \rho l^3 \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (2.6)$$

$$\int_0^l \rho x \phi_i(x) dx = \frac{2\rho l^3}{\lambda_i^2}, \quad (2.7)$$

wobei die Eigenfrequenzen

$$\omega_i^2 = \frac{EI}{\rho} \lambda_i^4 \quad (2.8)$$

sind. Für das Kroneckerdelta gilt

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } i \neq j \\ 1 & , \text{ wenn } i = j \end{cases}. \quad (2.9)$$

Nach der Euler–Bernoulli–Balkentheorie wird angenommen, daß die Deformation klein und der Arm schlank ist. Dann werden die gesamte kinetische Energie und die potentielle Energie berechnet zu

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} I_w \left( \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left( \dot{\theta}(t) x + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \phi_i(x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}(t)^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (2.5) bis (2.7) können  $E_k$  und  $E_p$  in

$$E_k = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\rho l^3}{3} + I_w \right) \dot{\theta}(t)^2 + 4\rho l^3 \dot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_i(t)}{\lambda_i^2} + \rho l^3 \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t)^2 \right) \text{ und} \quad (2.12)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho l^3 \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)^2 \omega_i^2 \quad (2.13)$$

umgeschrieben werden. Es gelten die Lagrange–Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)} = u(t) \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} L &= E_k - E_p \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\rho l^3}{3} + I_w \right) \dot{\theta}(t)^2 + 4\rho l^3 \dot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_i(t)}{\lambda_i^2} + \rho l^3 \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho l^3 \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)^2 \omega_i^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es folgen die unendlichdimensionalen Bewegungsgleichungen

$$\left( \frac{\rho l^3}{3} + I_w \right) \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\rho l^3}{\lambda_i^2} \ddot{q}_i(t) = u(t) \quad , \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\rho l^3}{\lambda_i^2} \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho l^3 \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho l^3 \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Werden nur die ersten  $n$  Eigenfunktionen weiterverwendet und der Rest vernachlässigt, dann können die Gleichungen in der Matrixform

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (2.19)$$

dargestellt werden. Die Matrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  und die Vektoren  $\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  des Modells sind definiert als

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\rho l^3}{3} + I_w \right) & \frac{2\rho l^3}{\lambda_1^2} & \cdots & \frac{2\rho l^3}{\lambda_n^2} \\ \frac{2\rho l^3}{\lambda_1^2} & \rho l^3 & \mathbf{0} & \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \\ \frac{2\rho l^3}{\lambda_n^2} & & & \rho l^3 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} , \quad (2.20)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \rho l^3 \omega_1^2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \rho l^3 \omega_n^2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.21)$$

## 2.2 Zustandsmodell

Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$  des Systems wird aus  $\mathbf{q}(t)$  und seiner ersten zeitlichen Ableitung  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  gebildet:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Durch Auflösen von Gleichung (2.19) nach  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  kann der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  bestimmt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{K}\mathbf{q}(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Dann gilt für das Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t) \quad (2.25)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [0 \ \dots \ 0 \ m_{1,1} \ \dots \ m_{n,1} \ m_{n+1,1}]^T. \quad (2.26)$$

Hierbei ist  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  die Einheitsmatrix. Die letzten  $n+1$  Elemente des Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$  stellen die erste Spalte von  $\mathbf{M}^{-1}$  dar. Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist von den gewählten Ausgangsgrößen abhängig. Hier werden der Winkel  $\theta(t)$  und die absolute Verschiebung des Endpunktes  $y(l, t)$  betrachtet. Dann gilt  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} \times \mathbb{R}^2$  und

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ l & \phi_1(l) & \dots & \phi_n(l) & \dots & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.27)$$

## 2.3 Gewichtsfunktionen des offenen Regelkreises

Der in Bild 2.1 dargestellte elastische Arm wurde mit den in Tabelle 2.1 gegebenen Parametern des Systems simuliert.

Länge $l$ (m)	1,0
Biegesteifigkeit $EI$ ( $\text{Nm}^2$ )	1,0
gleichmäßig verteilte Masse $\rho$ ( $\text{kgm}^{-1}$ )	0,8
Trägheitsmoment der Welle $I_w$ ( $\text{kgm}^2$ )	0,9

Tabelle 2.1: Parameter des Systems

Es wird nur die erste Eigenfunktion  $\phi_1(x)$  weiterverwendet, und die restlichen Eigenfunktionen werden vernachlässigt. Dann folgt für das System ein Zustandsmodell vierter

Ordnung. Für den einseitig eingespannten Balken ist  $\lambda_1 l = 1,87510$  (Bishop und Johnson 1979) und deswegen  $\lambda_1 = 1,87510$ . Nach der Gleichung (2.8) kann die Eigenfrequenz berechnet werden zu

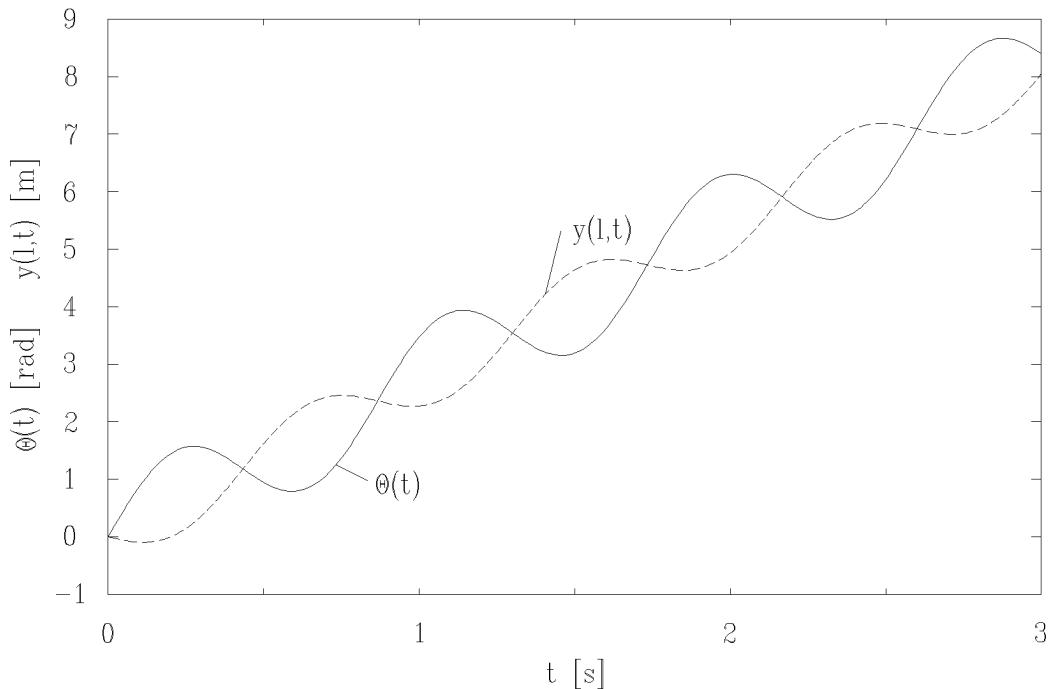
$$\omega_1 \approx 3,93 \text{ rad/s} \quad . \quad (2.28)$$

Analog ergeben sich für das System mit zwei Eigenfunktionen ( $\phi_1(x), \phi_2(x)$ ) und mit drei Eigenfunktionen ( $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$ ) die in Tabelle 2.2 dargestellten Werte.

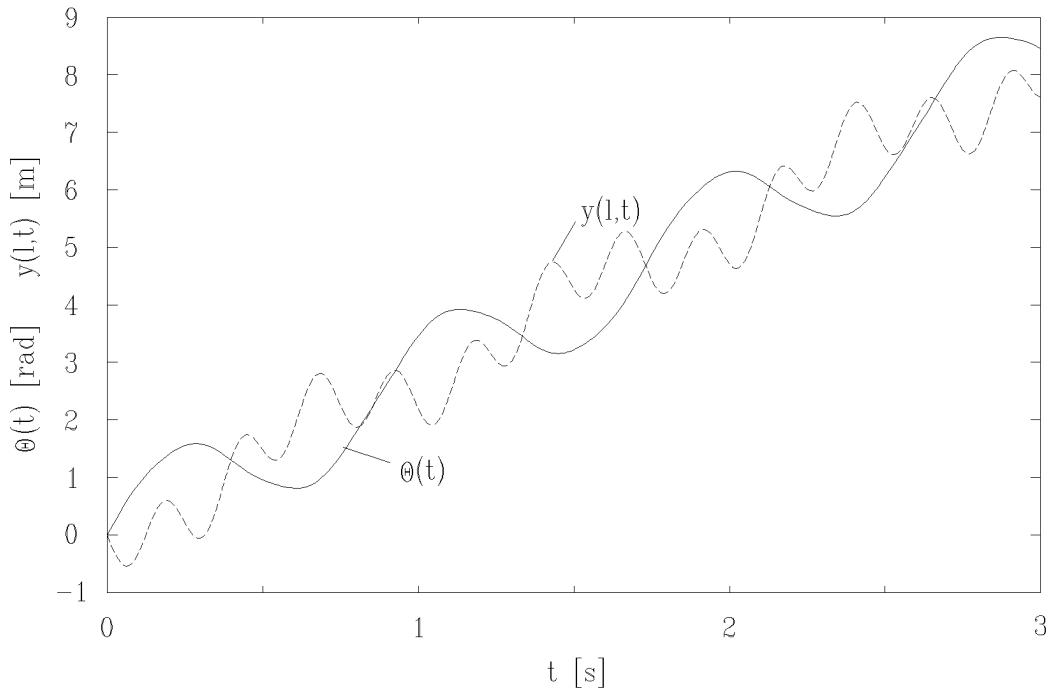
i	$\lambda_i l$	$\omega_i$ (rad/s)	Ordnung des Zustandsmodells
1	1,87510	3,93	4
2	4,69409	24,64	6
3	7,85476	68,98	8

**Tabelle 2.2:** Eigenfrequenzen verschiedener Eigenfunktionen

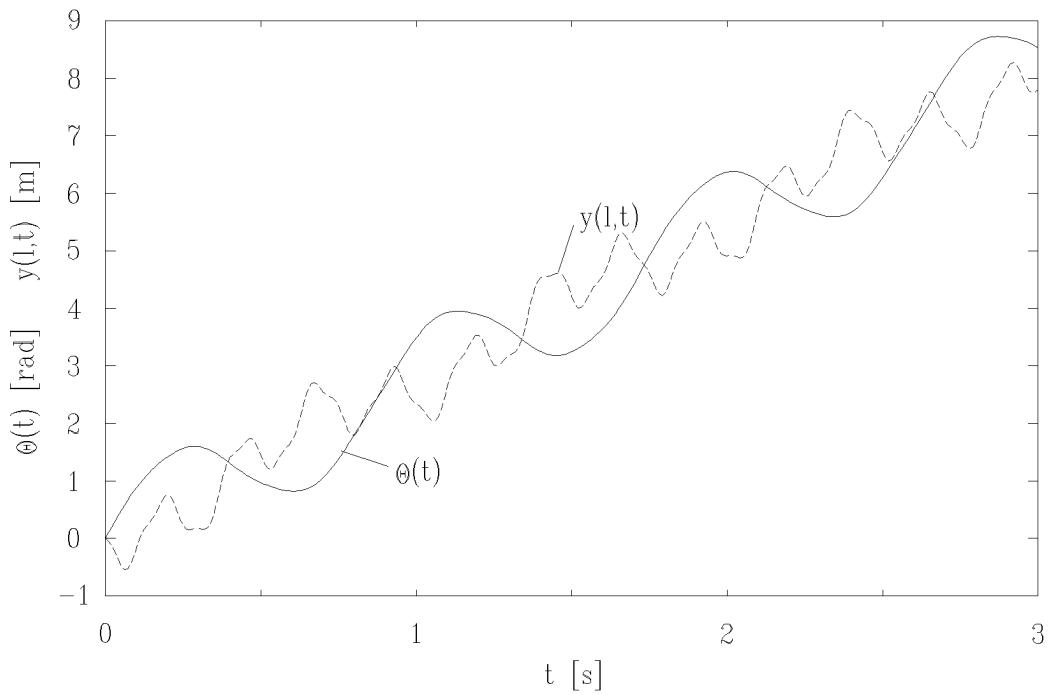
Die Gewichtsfunktionen des offenen Systems für die verschiedenen Modelle sind in den Bildern 2.2 bis 2.4 dargestellt.



**Bild 2.2:** Gewichtsfunktion des offenen Regelkreises mit der Eigenfunktion  $\phi_1(x)$



**Bild 2.3:** Gewichtsfunktion des offenen Regelkreises mit den Eigenfunktionen  $\phi_1(x)$  und  $\phi_2(x)$



**Bild 2.4:** Gewichtsfunktion des offenen Regelkreises mit den Eigenfunktionen  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  und  $\phi_3(x)$

Ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte erhält man als Gewichtsfunktionen des offenen Systems ein rampenförmiges Verhalten mit überlagerten Schwingungen. Es ist noch unklar, wie viele Eigenfunktionen in Hinsicht auf eine Regelung weiterverwendet werden sollten (Fraser und Daniel 1991). Für dieses System gibt es keinen großen Unterschied zwischen Bildern 2.3 und 2.4, d. h. für die Modellbildung kann das System mit zwei Eigenfunktionen verwendet werden.

### 3 Analyse, Synthese und Simulation des Systems

Für die Regelung wurde zuerst ein einfaches Modell, das nur eine elastische Eigenfunktion  $\phi_1(x)$  besitzt, angewendet. Dann ergibt sich das Zustandsmodell:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad , \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t) \quad (3.2)$$

mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & q_1(t) & \dot{\theta}(t) & \dot{q}_1(t) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7,746 & 0 & 0 \\ 0 & -19,859 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,102 & -0,627 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.4)$$

#### 3.1 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zum Entwurf eines Zustandsreglers müssen die beiden Systemeigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit geprüft werden. Die beiden Eigenschaften zeigen, ob die Stell- und Meßglieder in ausreichender Anzahl und an den richtigen Stellen benutzt werden. Dazu stehen die Kriterien von Kalman und Hautus für lineares zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  zur Verfügung. Das Kriterium von Kalman überprüft den Rang der wie folgt aus den Systemmatrizen aufgebauten Matrizen:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & | & \mathbf{Ab} & | & \dots & | & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & | & \mathbf{A}^T\mathbf{C} & | & \dots & | & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Wenn  $\text{Rang } \mathbf{Q} = n$ , dann ist das System vollständig  $z$ -steuerbar. Wenn  $\text{Rang } \mathbf{P} = n$ , dann ist es vollständig beobachtbar (Schwarz 1971). Hier wurde das durch die Gleichungen (3.1) und (3.2) bezeichnete Modell, das den elastischen Manipulatorarm näherungsweise beschreibt, nach dem Kriterium von Kalman geprüft. Es ergibt sich als Resultat, daß alle Zustandsgrößen vollständig steuerbar und beobachtbar sind.

#### 3.2 Entwurf eines Zustandsreglers

Eine vollständig steuerbare und beobachtbare Regelstrecke kann durch eine konstante Zustandsrückführung  $u(t) = -\mathbf{r}^T\mathbf{x}(t)$  geregelt werden. Damit das System nicht nur einer Abweichung vom Nullzustand entgegenwirkt, sondern einer Führungsgröße folgen kann, wird eine Sollwerteingabe  $w_s(t) = 0,5\text{rad}$  (Winkel des Motors) vorgegeben. Aus  $u(t) = w_s(t) - \mathbf{r}^T\mathbf{x}(t)$  erhält man das Zustandsmodell des geregelten Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^T)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}sw_s(t) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(t) \quad . \quad (3.6)$$

Die Sollwertverstärkung  $s$  ist vom Rückführungsvektor  $\mathbf{r}$  abhängig und wird nach der Berechnung von  $\mathbf{r}$  bestimmt.

Die Wahl der Pole des geschlossenen Systems wird entsprechend der Güte der Regelung, z. B. für die Schnelligkeit, durchgeführt. Dazu muß ein geeigneter Kompromiß zwischen der Schnelligkeit und der Dämpfung gefunden werden. Außerdem ist auch zu beachten, daß durch die Rückführung keine Pol-Nullstellenkompensation auftritt. Die Pole des geschlossenen Systems sind vorgegeben als

$$s_{1,2} = -5 \pm j4,5 \quad , s_{3,4} = -10 \text{ .}$$

Damit folgt

$$r_1 = 265,55, \quad r_2 = -64, \quad r_3 = 111,15, \quad r_4 = 147,4 \text{ .}$$

Aus der Forderung, daß der Winkel  $\theta(t)$  dem Sollwert  $w_s(t)$  entsprechen sollte, folgt  $s = r_1$ .

### 3.3 Entwurf eines reduzierten Beobachters

Die Zustandsrückführung basiert auf der Annahme, daß alle Zustandsgrößen  $\mathbf{x}$  meßbar sind. Aber tatsächlich ist das nicht der Fall. Aus Kostengründen oder meßtechnischen Gründen sollen hier der Winkel  $\theta(t)$  und die Position des Endpunktes  $y(l,t)$  erfaßt werden. Deswegen wird ein reduzierter Beobachter 2. Ordnung, der Schätzwerte  $\hat{\theta}(t)$  und  $\hat{y}(l,t)$  für die nicht gemessenen Zustände  $\dot{\theta}(t)$  und  $\dot{y}(l,t)$  liefert, entwickelt. Ein vollständig beobachtbares lineares zeitinvariantes System kann durch

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u(t) , \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1(t) \quad (3.8)$$

beschrieben werden. Dabei ist der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^f$  meßbar, während  $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-f}$  geschätzt werden soll. Für die Dimensionen der Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &\in \mathbb{R}^{f \times \mathbb{R}^f}, \quad \mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{f \times \mathbb{R}^{n-f}}, \quad \mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{n-f \times \mathbb{R}^f}, \\ \mathbf{A}_{22} &\in \mathbb{R}^{n-f \times \mathbb{R}^{n-f}}, \quad \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^f, \quad \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{n-f}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (3.7) und (3.8) ergibt sich somit

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_1 u(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_1 u(t) , \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u(t) , \quad (3.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t) . \quad (3.11)$$

Dann gilt für das Subsystem das Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}_2 u(t) , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{y}_2(t) := \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{b}_1 u(t) . \quad (3.13)$$

Ein Beobachter der Ordnung  $n - f$  wird dem Subsystem der Form

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{h}u(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) \quad (3.14)$$

hinzugefügt mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{12},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_1,$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{b}_2.$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.13) kann (3.14) in

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2(t) + (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{11})\mathbf{y}(t) \quad (3.15)$$

$$+ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{K}_1\mathbf{b}_1)u(t) + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{y}}(t) \quad (3.16)$$

umgeschrieben werden. Für  $\mathbf{z}(t) := \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{K}_1\mathbf{y}(t)$  folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{12})\mathbf{z}(t) + (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{11} + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{K}_1\mathbf{A}_{12})\mathbf{K}_1)\mathbf{y}(t) \\ &+ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{K}_1\mathbf{b}_1)u(t) \\ &:= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}'\mathbf{y}_1 + \mathbf{h}u(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{K}_1\mathbf{y}(t). \quad (3.18)$$

Die Pole des Beobachters sind durch die Matrix  $\mathbf{K}_1$  festzulegen und können beliebig gewählt werden. Die Matrix  $\mathbf{K}_1$  wird so gewählt, daß der Beobachter stabil ist. Damit der Beobachtungsfehler schneller abklingt als die Zeitvorgänge im System, sollten die Pole des Beobachters weiter links als die Streckenpole in der s-Ebene liegen. Werden aber die Pole zu weit nach links verschoben, so wird das System sehr störempfindlich (Föllinger 1978). Bild 3.1 zeigt das Blockschaltbild des geregelten Systems.

Mit der Lineartransformation

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{\phi_1(l)} & \frac{1}{\phi_1(l)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{\phi_1(l)} & \frac{1}{\phi_1(l)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

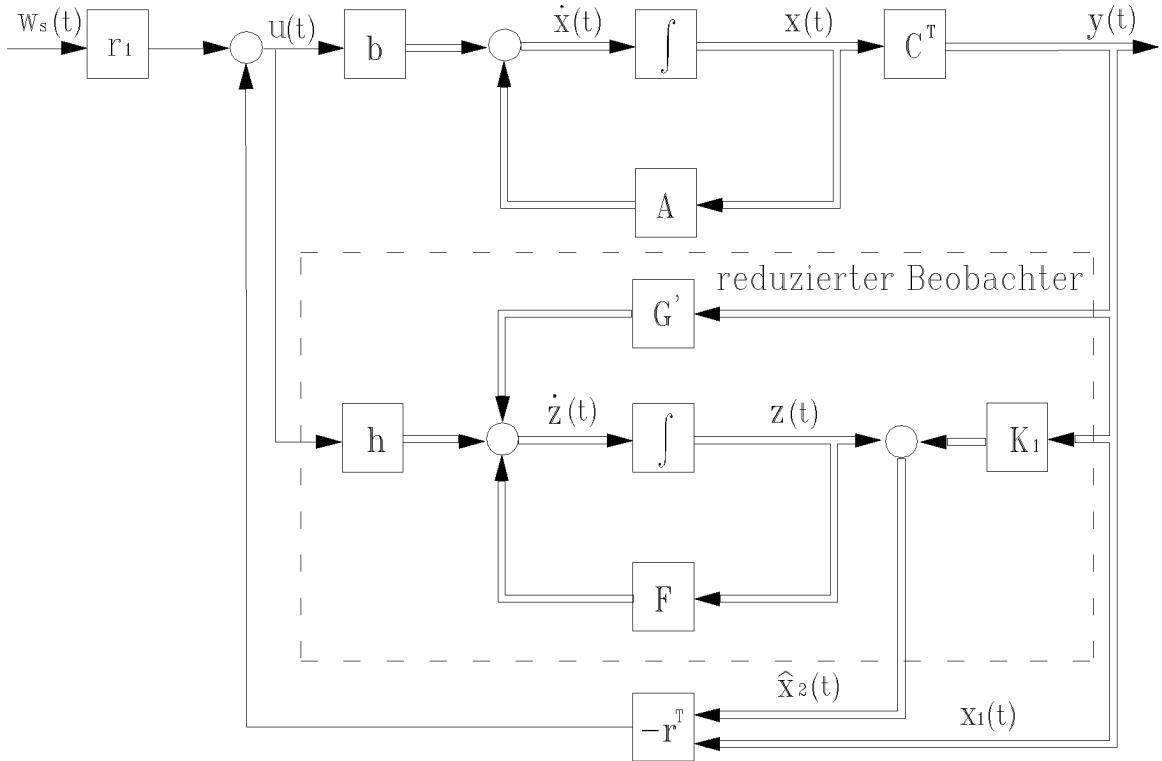
gilt für

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ q_1(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{q}_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ y(l,t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{y}(l,t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (3.20)$$

Nach Gleichung (3.1) und (3.2) ergibt sich

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(t) = \mathbf{A}_T\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_Tu(t), \quad (3.21)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}_T^T\tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (3.22)$$



**Bild 3.1:** Blockschaltbild des geregelten Systems

mit

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3,873 & 3,873 & 0 & 0 \\ 15,986 & -15,986 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,102 \\ -0,152 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.24)$$

Die Elemente des Vektors  $\tilde{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ y(l,t) \end{bmatrix}$  sind meßbar, während der Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{y}(l,t) \end{bmatrix}$  geschätzt werden muß:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.25)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}_1(t), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (3.27)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -3,873 & 3,873 \\ 15,986 & -15,986 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1,102 \\ -0,152 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Vorgegeben sind die Pole des Beobachters zu  $s_{1,2} = -15$ . Dann ergibt sich

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Für das System mit reduziertem Beobachter gilt das Zustandsmodell 6. Ordnung

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}' & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} u(t), \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

mit

$$\begin{aligned} u(t) &= r_1 w_s(t) - \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) \\ &= r_1 w_s(t) - \mathbf{r}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= r_1 w_s(t) - \mathbf{r}^T \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{z}(t) + \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad . \quad (3.32)$$

Für die Matrizen gilt

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} -228,873 & 3,873 \\ 15,986 & -240,986 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1,102 \\ -0,152 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

### 3.4 Simulationsergebnisse und Animation

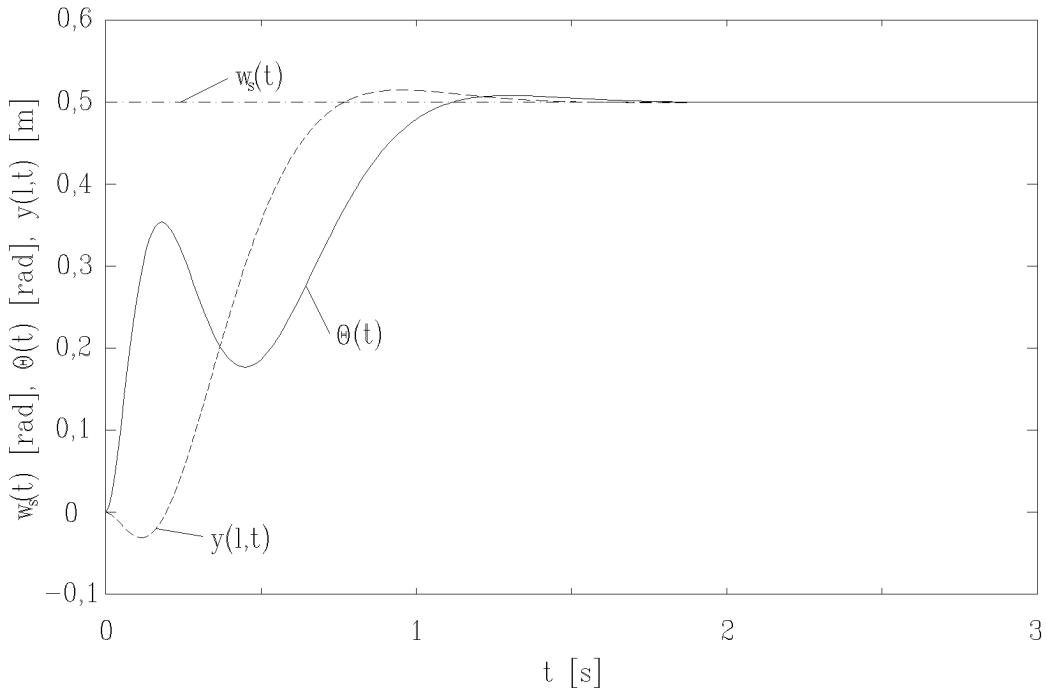
Das in den Bildern 3.2 und 3.3 dargestellte Regelverhalten führt zu dem Ergebnis, daß der geregelte elastische Manipulatorarm hinreichend genau positioniert werden kann. Die wegen der Elastizität auftretenden Schwingungen werden unterdrückt.

Um die Systembewegung aller Arbeitspunkte deutlich auf dem Bildschirm darzustellen, wurde ein einfaches Programm unter MATLAB geschrieben. Der elastische Arm wurde gleichmäßig in 10 Teilen unterteilt. Ein großes Problem betrifft die lange Animationsdauer. Hier hilft bei der Animation unter MATLAB die Eigenschaft „EraseMode“. Es gibt vier Möglichkeiten (normal, background, xor und none), wenn man ein Bild am Bildschirm darstellt. In Tabelle 3.1 ist die Animationsdauer mit verschiedenen „EraseModes“ gegeben.

EraseMode	Animationsdauer [s]	Echtzeit [s]
normal	27,9	3
background	7,1	3
xor	6,2	3
none	5,5	3

**Tabelle 3.1:** Animationsdauer mit verschiedenen „EraseModes“

Mit der Animation kann man die Eigendynamik des einfachen elastischen Handhabungssystems lernen. Außerdem kann der Prozeß einer Regelung deutlich beobachtet werden.

**Bild 3.2:** Zeitverlauf des geregelten Systems

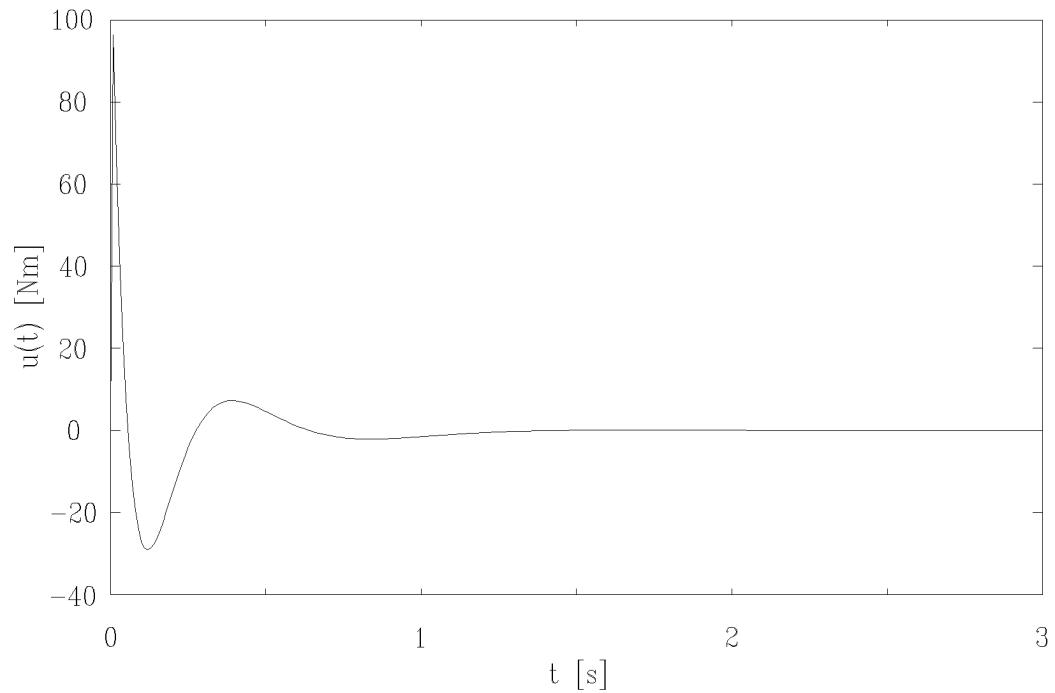


Bild 3.3: Zeitverlauf des Stellmoments

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Bericht werden Modellbildung, Simulation und Regelung eines elastischen Manipulatorarmes dargestellt. Die Dynamik des Systems läßt sich durch unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben, wobei die Rayleigh–Ritz Methode (assumed-mode method) und Lagrange–Verfahren angewendet werden. Hier sind die Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balkens zu verwenden. Die Bewegungsgleichungen und das Zustandsmodell des Systems werden vorgestellt. Für die Regelung wird eine elastische Eigenfunktion weiterverwendet, die restlichen werden vernachlässigt. Das System ist vollständig steuerbar und beobachtbar. Die Regelung läßt sich mit Hilfe der Zustandsrückführung durchführen, wozu ein reduzierter Beobachter 2. Ordnung entwickelt wird. Das Regelverhalten zeigt, daß das geregelte System hinreichend genau positioniert und die Eigenschwingungen unterdrückt werden. Die Animation des Systems erfolgt unter MATLAB.

In Fortführung dieser Arbeit sollen

1. das Systemmodell mit Berücksichtigung der Reibungskräfte und einer Zusatzmasse am Balkenende sowie
2. verschiedene Regelungskonzepte

untersucht werden.

## 5 Literaturverzeichnis

- Bayo, E.** 1987. A Finite Element Approach to Control the End Point Motion of a Single-Link Flexible Robot. *Journal of Robotics Systems* 4. 63-75.
- Bishop, R. E. D. und Johnson, D. C.** 1979. *The Mechanics of Vibration*. London: Cambridge University Press.
- Cetinkunt, S. und W. Yu.** 1991. Closed-Loop Behavior of a Feedback-Controlled Flexible Arm: A Comparative Study. *The Int. Journal of Robotics Research* 10. 263-275.
- Cetinkunt, S. und S. Wu.** 1992. Discrete-Time Tip Position Control of a Flexible One Arm Robot. *Transactions of the ASME* 114. 428-435.
- Chapnik, B. V., G. R. Heppler und J. D. Aplevich.** 1991. Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 7. 479-488.
- Cordes, J.** 1992. *Robuste Regelung eines elastischen Teleskoparmroboters*. Braunschweig: Vieweg.
- Feliu, V., C. Cerrada und J. A. Cerrada.** 1993. A Combined Feedforward-Feedback Control Scheme for Single-Link Flexible Arms. *IFAC World Congress. Australia*.
- Föllinger, O.** 1978. *Regelungstechnik*. Berlin: Elitera-Verlag.
- Fraser, A. R. und R. W. Daniel.** 1991. *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Gevarter, W. B.** 1970. Basic Relations for Control of Flexible Vehicles. *AIAA J.* 8. 666-672.
- Meirovitch, L.** 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. New York: Macmillan.
- Oakley, C. M. und Cannon, R. H.** 1989. Equations of Motion for an Experimental Planar Two-Link Flexible Manipulator. *Robotics Research*. 267-278.
- Schwarz, H.** 1971. *Mehrachregelungen. Band 2*. Berlin: Springer.
- Wang, D. und M. Vidyasagar.** 1991. Transfer Functions for a Single Flexible Link. *The Int. Journal of Robotics Research* 10. 540-549.
- Wang, D. und M. Vidyasagar.** 1992. Passive Control of a Stiff Flexible Link. *The Int. Journal of Robotics Research* 11. 572-578.
- Yuan, B.-S., W. J. Book und J. D. Huggins.** 1993. Dynamik of Flexible Manipulator Arms: Alternative Derivation, Verification, and Characteristics for Control. *Transactions of the ASME* 115. 394-404.