Ausgangs–Regel–Relative

Marc Schleuter und Markus Lemmen

Forschungsbericht Nr. 2/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Bericht befaßt sich mit der Problematik der Beschreibung eines System-Ausganges mit Hilfe von Regel-Relativen. Dieser algebraischen Struktur, welche Zustandsübergänge in Systemen modellieren kann, wird durch geeignete Anwendung einer Ausgangsabbildung die Struktur eines „Ausgangs–Regel–Relativs“ gegenübergestellt, welche das Ausgangsverhalten darstellt. Hierdurch wird die Definition von Systemeigenschaften wie Ausgangssteuerbarkeit oder Beobachtbarkeit auf relationaler Basis ermöglicht und hier vorgestellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz
*
Fachgebiet Geometrie, Algebra
Prof. Dr. rer. nat. H.-J. Arnold

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Mengen und Mengentupel

$\emptyset$	Leere Menge
$\diamond$	Leere Abbildung/Relation
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$	Relation
$\mathfrak{A}^h$	Auf bild(h) projezierte Relation $\mathfrak{A}$
$\mathfrak{B}_A^\perp$	Ununterscheidbarkeitsmenge bezüglich A
$\mathfrak{B}_A$	Beobachtbarkeitsmenge bezüglich A
$\mathfrak{b}$	Beobachtbarkeitsrelation
$\mathfrak{b}^\perp$	Ununterscheidbarkeitsrelation
$\mathfrak{E}$	Gleichheitsrelation
$\mathfrak{L}$	Stellrelation eines Regel-Relativs
$\mathfrak{L}_\mathcal{Y} = \mathfrak{L}^{\hat{h}}$	Ausgangsprojezierte Relation $\mathfrak{L}$
$\mathfrak{L}\|_{t_0}^{t_1}$	Auf das Intervall $[t_0, t_1)$ restringierte Stellrelation eines Regel-Relativs
$\mathfrak{P}$	Punktemenge
$\mathfrak{P}_V$	Vollständigkeitsmenge bezüglich der Punkte
$\mathcal{Y}_V$	Vollständigkeitsmenge bezüglich der Ausgänge
$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t)$	System-Relativ nach Arnold (1995) (mit $\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$)
$(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$, $(\mathcal{T} \times \mathcal{X}, \Omega, [\Pi \cdot \mathrm{d}t], \mathcal{Y}, h)$	Ausgangs-Regel-Relativ
$\Pi \cdot dt$	Abbildungsschar variabler Relativeingänge
$[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt]$	Auf das Intervall $[t_0, t_1)$ restringierte Abbildungsrelation
$\mathcal{R}$	Menge binärer Relationen auf $\mathfrak{P}$
$\mathcal{R}_\mathcal{Y}$	Menge binärer Relationen auf $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathfrak{r}^\perp$	Unrekonstruierbarkeitsrelation
$\mathcal{T}$	Zeitmenge
$\mathcal{U}$	Menge zulässiger Stellwerte eines analytischen Systems
$\mathcal{X}$	Zustandsmenge
$\mathcal{Y}$	Ausgangsraum, Menge an Regel-Relativ-Ausgangspunkten
$\mathcal{Y}_0$	Durch das System definierter Bildraum

Sonstige Bezeichnungen

A	Punkt aus einer Punktmenge $(t_A, x_A) := A \in \mathfrak{P}$
B	Punkt aus einer Punktmenge $(t_B, x_B) := B \in \mathfrak{P}$
$t, t_0, t_A, \ldots$	Elemente der Zeitmenge $\mathcal{T}$
$y, y_0, y_A, \ldots$	Elemente der Ausgangsmenge $\mathcal{Y}$
$x, x_0, x_A, \ldots$	Elemente der Zustandsmenge $\mathcal{X}$

Operatoren und Funktionen

Δ	Differenz (zweier Skalare)
$\times$	Kartesisches Mengenprodukt
$\circ$	Komposition, Relationenprodukt
$\overline{(\cdot)}$	Inverse Relation zu $(\cdot)$
$\dot{\circ}$	Verallgemeinertes Relationenprodukt
$\in$	Element von
$\subset$	Teilmenge (unecht)
$\supset$	Obermenge (unecht)
$\cap$	Schnittmenge
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\wedge$	UND-Verknüpfung
$\vee$	ODER-Verknüpfung
$\neg$	Negation
$\bigwedge$	Allquantor
$\bigvee$	Existenzquantor
bild	Bild einer Abbildung
h	(Ausgangs-) Abbildung (unter Vernachlässigung des Zeitargumentes)
$\hat{h}$	Ausgangsabbildung unter Berücksichtigung der Zeitkomponente
$\boldsymbol{u}$	(Mehrgrößen-) Stellfunktion eines Systems
Ω	Nicht konstante Stellfunktion
Pot	Potenzmenge

Sonstige Zeichen

$(\quad , \quad)$	Offenes Intervall, $(t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$
$[\quad , \quad]$	Abgeschlossenes Intervall, $[t_0, t_1] \subset \mathcal{T}$
$[\quad , \quad)$	Halboffenes Intervall, $[t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$

1 Einleitende Übersicht

Eine synonyme Beschreibung dynamischer Systemem mittels einer relationenalgebraischen Struktur wird durch den Begriff des Regel-Relativs (siehe (Arnold 1995) bzw. Def. A.1) ermöglicht. Durch die Relationen eines solchen Regel-Relativs werden aus einer Zeit- und einer Zustandskomponente bestehende Punkte in Beziehung gesetzt. Hierdurch werden zunächst nur die Zustandsübergänge jedoch nicht die von einer Ausgangsabbildung generierten Systemausgänge modelliert. In diesem Bericht wird nun einem Regel-Relativ ein Ausgangs-Regel-Relativ zugeordnet, in welchem die (meßbaren) Ausgangsgrößen abhängig von einer Steuerfunktion in einen relationalen Zusammenhang gestellt werden.

Ein Ausgangs-Regel-Relativ kann nun zum einen auf allgemeiner Ebene auf charakterisierende oder systemtheoretische Eigenschaften (wie z.B. Ausgangssteuerbarkeit oder -erreichbarkeit) untersucht werden. Zum anderen kann es als Basis zur Bestimmung des zugrundeliegenden Regel-Relativs herangezogen werden. Hierbei spielen die Begriffe Beobachtbarkeit und Unterscheidbarkeit eine wesentliche Rolle.

Diesbezüglich wird in Vorüberlegungen (Abschnitt 2) gezeigt, wie man zu gegebenen binären Relationen auf einer Grundmenge $\mathfrak{P}$ und einer Abbildung h in eine weitere Grundmenge $\mathfrak{P}'$ neue Relationen auf eben dieser Menge definieren kann. Es wird untersucht, inwieweit sich Eigenschaften der gegebenen Relationen auf die transformierten Relationen übertragen. Da die Transitivität einer Relation für die neu gebildeten Relationen im allgemeinen nicht gültig ist, wird ein spezielles Relationenprodukt eingeführt, für welches eine Operationstreue in Bezug auf die Abbildung h gilt.

Diese Bildung neuer Relationen wird in Abschnitt 3 auf die Relationen eines Regel-Relativs angewendet. Dabei wird die Grundmenge $\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ mit der Zustandsmenge $\mathcal{X}$ in die Menge $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ mit dem Ausgangsraum $\mathcal{Y}$ mittels der Ausgangsabbildung abgebildet. Daraufhin wird untersucht, inwieweit sich die Axiomatik und Eigenschaften des Regel-Relativs für dieses so erhaltene „Ausgangs-Regel-Relativ“ nachweisen lassen.

Die Struktur eines Ausgangs-Regel-Relativs dient in Abschnitt 4 dazu, die Systemeigenschaften Ausgangserreichbarkeit und -steuerbarkeit relational zu definieren.
Abschnitt 5 führt die Eigenschaften Ununterscheidbarkeit, Beobachtbarkeit, Unrekonstruierbarkeit und Rekonstruierbarkeit von Ausgangs-Regel-Relativen ein. Mit diesen Begriffen kann nun versucht werden (invers zur Fragestellung in Abschnitt 3), zu einem gegebenen Ausgangs-Regel-Relativ das zugrundeliegende Regel-Relativ näher zu bestimmen.

Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen diesen Bericht ab.

2 Eigenschaften transformierter Relationen

Es seien Relationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... auf einer Grundmenge $\mathfrak{P}$ gegeben. Ferner sei eine weitere Menge $\mathfrak{P}' \neq \emptyset$ und eine Abbildung

$$h : \begin{cases} \mathfrak{P} & \longrightarrow & \mathfrak{P}' \\ A & \longmapsto & h(A) \end{cases}$$

gegeben. h induziert für eine Relation $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{P}$ eine Relation $\mathfrak{A}^h$ in der folgenden Weise:

$$A'\mathfrak{A}^h B' :\Leftrightarrow \bigvee_{A\in\mathfrak{P}} \bigvee_{B\in\mathfrak{P}} h(A) = A' \wedge h(B) = B' \wedge A\mathfrak{A}B. \tag{2.1}$$

Damit wird also eine Abbildung

$$\begin{cases} \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) & \longrightarrow & \mathrm{Pot}(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{P}') \\ \mathfrak{A} & \longmapsto & \mathfrak{A}' \end{cases}$$

induziert. Aus der Abbildungsvorschrift (2.1) folgt

$$A\mathfrak{A}B \Rightarrow h(A)\mathfrak{A}^h h(B). \tag{2.2}$$

Da Punkte von $\mathfrak{P}'$, die nicht im Bild von h liegen, ohne Belang sind, beschränken wir unsere Betrachtungen im folgenden auf die Menge

$$\mathfrak{P}_0 := \mathrm{bild}(h) = \{A' \in \mathfrak{P}' | \bigvee_{A\in\mathfrak{P}} h(A) = A'\}$$

und fassen $\mathfrak{A}^h$ als Relation auf $\mathfrak{P}_0$ auf.

Lemma 2.1

Ist die Relation $\mathfrak{A}$ symmetrisch oder reflexiv, so genügt auch $\mathfrak{A}^h$ diesen Eigenschaften. Aus der Transitivität von $\mathfrak{A}$ folgt jedoch nicht die Transitivität von $\mathfrak{A}^h$. Ferner ist die Abbildung $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}^h$ monoton, es gilt also

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}^h \subset \mathfrak{B}^h. \tag{2.3}$$

Beweis

Zur Symmetrie: Sei $\mathfrak{A}$ symmetrisch.

$$\begin{aligned} A'\mathfrak{A}^h B' &\Rightarrow A\mathfrak{A}B \quad \text{für geeignete } A, B \text{ mit } h(A) = A',\ h(B) = B' \\ &\Rightarrow B\mathfrak{A}A \quad \text{für geeignete } A, B \text{ mit } h(A) = A',\ h(B) = B' \\ &\Rightarrow B'\mathfrak{A}^h A'. \end{aligned}$$

Zur Reflexivität: Sei $\mathfrak{A}$ reflexiv, so gilt für alle $A \in \mathfrak{P}$ $A\mathfrak{A}A$ und damit für alle $A' \in \mathfrak{P}_0$ $A'\mathfrak{A}^h A'$.

Zur Transitivität: Betrachtet werde $\mathfrak{P} = \{1, 2, 3, 4\}$, und $\mathfrak{A} := \; <|_{\mathfrak{P}}$ sei die „kleiner"-Relation restringiert auf $\mathfrak{P}$. Damit gilt $\mathfrak{A} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$. Ferner sei die Abbildung

$$h : \begin{cases} 1,4 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

mit $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_0 = \{1, 2, 3\}$ gegeben. $\mathfrak{A}$ ist transitiv, jedoch ist die Relation $\mathfrak{A}^h = \{(2,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (1,2)\}$ wegen $(1,1) \notin \mathfrak{A}^h$ und $(1,2), (2,1) \in \mathfrak{A}^h$ nicht transitiv.

Zur Monotonie: Es gelte $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Für Elemente A' und B' aus $\mathfrak{P}'$ kann man folgern

$$\begin{aligned} A'\mathfrak{A}^h B' &\Rightarrow \bigvee_{A,B} \; A\mathfrak{A}B \wedge h(A) = A' \wedge h(B) = B' \\ &\Rightarrow \bigvee_{A,B} \; A\mathfrak{B}B \wedge h(A) = A' \wedge h(B) = B' \\ &\Rightarrow \; A'\mathfrak{B}^h B'. \end{aligned}$$

❑

Da die Transitivitätseigenschaft sich nicht überträgt, wird die Definition eines verallgemeinerten Relationenproduktes sinnvoll:

$$(\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{B}^h) := (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})^h, \tag{2.4}$$

oder äquivalent dazu

$$A'(\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{B}^h)B' \Leftrightarrow \bigvee_{A \in \mathfrak{P}} \; \bigvee_{B \in \mathfrak{P}} h(A) = A' \wedge h(B) = B' \wedge A(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})B. \tag{2.5}$$

Damit gilt

Lemma 2.2

Ist $\mathfrak{A}$ transitiv, so gilt für $\mathfrak{A}^h$ die folgende Transitivitätseigenschaft

$$\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{A}^h \subset \mathfrak{A}^h. \tag{2.6}$$

Beweis

$$\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{A}^h \overset{(2.4)}{=} (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})^h \subset \mathfrak{A}^h.$$

❑

Lemma 2.3

Es gilt stets

$$\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{B}^h \subset \mathfrak{A}^h \circ \mathfrak{B}^h. \tag{2.7}$$

Beweis

$$\begin{array}{rcl} A'\left(\mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{B}^h\right) B' & \Rightarrow \bigvee\limits_{A,B,C} & h(A) = A' \wedge h(B) = B' \wedge A\mathfrak{A}C \wedge C\mathfrak{A}B \\ & \Rightarrow & A'\mathfrak{A}^h h(C) \wedge h(C)\mathfrak{A}^h B' \\ & \Rightarrow & A(\mathfrak{A}^h \circ \mathfrak{B}^h)B. \end{array}$$

❑

Bemerkung 2.1
Die Inklusion $\mathfrak{A}^h \circ \mathfrak{B}^h \subset \mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{B}^h$ ist im allgemeinen falsch. Selbst für den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ läßt sich folgendes Gegenbeispiel angeben (vgl. Bild 2.1):
Betrachtet werden die Mengen $\mathfrak{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathfrak{P}' = \{1, 2, 4\}$ sowie

$$\mathfrak{A} = \{(1, 2), (3, 4)\} \quad \text{mit der Abbildung}$$

$$h : \begin{cases} 1 & \longmapsto & 1 \\ 4 & \longmapsto & 4 \\ 2, 3 & \longmapsto & 2. \end{cases}$$

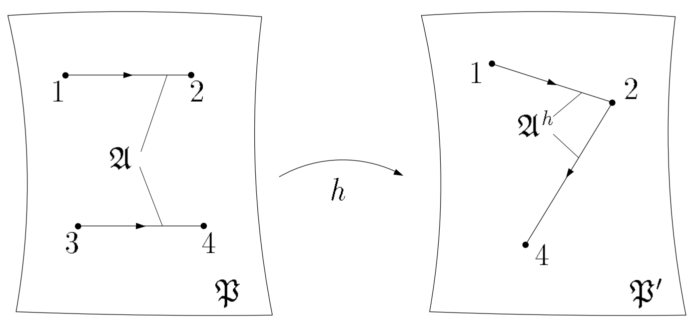

Bild 2.1: Relationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^h$

Hier gilt $(1, 4) \in \mathfrak{A}^h \circ \mathfrak{A}^h$, jedoch nicht $(1, 4) \in \mathfrak{A}^h \dot{\circ} \mathfrak{A}^h$.

Die in diesem Abschitt beschriebene Bildung einer neuen Relation $\mathfrak{A}^h$ aus einer gegebenen Relation $\mathfrak{A}$ wird in den folgenden Abschnitten für die Relationen eines Regel-Relativs nach (Arnold 1995) mittels einer Ausgangsabbildung h angewendet. Dabei sei angemerkt, daß die hier nachgewiesenen Eigenschaften natürlich ebenfalls unter diesen spezielleren Voraussetzungen gelten.

3 Ausgangs-Regel-Relativ

Regel-Relative (Arnold 1995) dienen zur relationentheoretischen Beschreibung von Systemen. Die Definition ist der Übersichtlichkeit halber noch einmal im Anhang A wiedergegeben.

3.1 Definition und Eigenschaften

Ausgangspunkt zur Beschreibung eines Ausgangs-Regel-Relativs sei zunächst ein beliebiges Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ gemäß (Arnold 1995) bzw. Anhang A. Zusätzlich werde nun ein Ausgangsraum $\mathcal{Y}$ (d.h. eine nicht leere Menge $\mathcal{Y}$) betrachtet, sowie eine Ausgangsabbildung

$$h: \quad \mathcal{T} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \tag{3.1}$$

die jedem Punkt $A = (t_A, x_A)$ einen Regel-Relativ-Ausgang $h(t_A, x_A) = y_A$ zuordnet.

Als Erweiterung dazu kann auch die Zeitkomponente für den Regel-Relativ-Ausgang betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \hat{h}: \quad \mathcal{T} \times \mathcal{X} &\to \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \qquad \text{mit} && (3.2)\\ (t_A, x_A) \mapsto \hat{h}(t_A, x_A) &= (t_A, h(t_A, x_A)) && (3.3) \end{aligned}$$

als Abbildungsvorschrift. Zur Untersuchung von Abhängigkeiten bezüglich der Zustandskomponente $\mathcal{X}$ wird zunächst zu jeder Relation $\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$ eine Relation $\mathfrak{L}_\mathcal{Y}$ auf $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ gemäß

$$(t_0, y_0)\mathfrak{L}_\mathcal{Y}(t_1, y_1) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigvee_{x_1 \in \mathcal{X}} (t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \\ \wedge \quad h(t_0, x_0) = y_0 \quad \wedge \quad h(t_1, x_1) = y_1 \tag{3.4}$$

zugeordnet. Von nun an sei die Ausgangsabbildung fest, so daß die Schreibweise $\mathfrak{L}_\mathcal{Y}$ für $\mathfrak{L}^{\hat{h}}$ gewählt werden kann, um die Relationen bezüglich der Grundmenge unterscheiden zu können. Da für die Abbildung h keine Injektivität vorausgesetzt wird, müssen x_0 und x_1 in Gl. (3.4) nicht eindeutig bestimmt sein. Aus Gl. (3.4) folgt

$$(t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \Rightarrow \hat{h}(t_0, x_0)\mathfrak{L}_\mathcal{Y}\hat{h}(t_1, x_1). \tag{3.5}$$

Entsprechend läßt sich für $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0, t_1)}$ der Relation $\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\right]$ auf $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$ eine Relation $[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt]_\mathcal{Y}$ auf $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ zuordnen, gemäß

$$(t_0, y_0)[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt]_\mathcal{Y}(t_1, y_1) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigvee_{x_1 \in \mathcal{X}} (t_0, x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt](t_1, x_1) \\ \wedge \quad h(t_0, x_0) = y_0 \quad \wedge \quad h(t_1, x_1) = y_1. \tag{3.6}$$

Zusammenfassend kann man nun formulieren:

Definition 3.1 *Ausgangs-Regel-Relativ*
Es sei ein Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t)$ sowie $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine Ausgangsabbildung in eine nicht leere Menge $\mathcal{Y}$ gegeben. Dann heißt

$$(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}) \tag{3.7}$$

ein *Ausgangs-Regel-Relativ*, wobei die Menge

$$\mathcal{R}_{\mathcal{Y}} := \{\mathfrak{L}_{\mathcal{Y}} | \mathfrak{L} \in \mathcal{R}\} \tag{3.8}$$

und die Funktionenschar $[\Pi \cdot \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}$ gemäß (3.4) bzw. (3.5) erklärt sind. $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t)$ wird dann das dem Ausgangs-Regel-Relativ zugrundeliegende Regel-Relativ genannt. ❑

Betrachtet man neben den Relationen auf $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ auch die Relationen auf $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$ und ist die Ausgangsabbildung bekannt, so wird ein Ausgangs-Regel-Relativ auch als

$$(\mathcal{T} \times \mathcal{X}, \mathcal{R}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t], \mathcal{Y}, h)$$

zitiert.

Bemerkung 3.1
Offensichtlich können einem Ausgangs-Regel-Relativ mehrere Regel-Relative zugrunde liegen. ❑

Mit einer derartigen Definition der Ausgangsabbildungsvorschrift läßt sich nun die folgende Aussage treffen:

Satz 3.1
Mit der gemäß Gl. (3.6) definierten Ausgangsabbildungsrelation gelten die Axiome 4. und 5. des Regel-Relativs auch für das Ausgangs-Regel-Relativ.

Beweis

Zu Axiom 4.: Nach Gl. (3.4) gilt gemäß Gl. (3.6)

$$[\Pi_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{L}_{\mathcal{Y}}|_{t_0}^{t_1}.$$

Zu Axiom 5.: Entsprechend der Definition nach Gl. (3.6) ist

$$[\Pi_{t_0}^{t_0} \diamond \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{E}_{\mathcal{Y}}|_{t_0}^{t_0},$$

mit der Gleichheitsrelation $\mathfrak{E}$.

❑

Dabei gilt

$$\begin{aligned} & (t_0, y_0) \mathfrak{E}_{\mathcal{Y}} (t_1, y_1) \\ \Leftrightarrow \quad & \bigvee_{x_0} \bigvee_{x_1} \quad (t_0, x_0) \mathfrak{E} (t_1, x_1) \wedge h(t_0, x_0) = y_0 \wedge h(t_1, x_1) = y_1 \\ \Leftrightarrow \quad & t_0 = t_1 \quad \wedge \quad \bigvee_{x_0} h(t_0, x_0) = y_0 = y_1. \end{aligned}$$

Das heißt, daß $\mathfrak{E}_{\mathcal{Y}}$ die Gleichheitsrelation auf $\mathcal{T} \times \mathrm{bild}(h)$ ist.

Satz 3.2
Für ein Ausgangs-Regel-Relativ gilt in Abschwächung von Axiom 3

$$[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \dot{\circ} [\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} = [\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)\mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}. \tag{3.9}$$

Beweis
Setze $\mathfrak{A} = \left[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 \mathrm{d}t\right]$ und $\mathfrak{B} = \left[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 \mathrm{d}t\right]$. Damit gilt

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{Y}} \dot{\circ} \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}} = (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})_{\mathcal{Y}} = [\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}.$$

❑

Es sei angemerkt, daß nach Lemma 2.3 die Inklusion „$\supset$" auch für das Relationenprodukt $\circ$ gilt.

Als nächstes wird untersucht, inwieweit sich das Axiom 1 auf ein Ausgangs-Regel-Relativ überträgt. Dazu werden Einschränkungen sowohl der Punktemenge, als auch der Ausgangsmenge betrachtet:

Definition 3.2
Es sei

$$\mathfrak{P}_V := \{(t,x) \in \mathfrak{P} | \bigvee_{t_1 > t} \bigvee_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t,x)\left[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t\right] \neq \emptyset\} \tag{3.10}$$

die *Vollständigkeitsmenge bezüglich der Punkte* und ferner

$$\mathcal{Y}_V := \{y \in \mathcal{Y} | \bigvee_{(t,x) \in \mathfrak{P}_V} h(t,x) = y\} \tag{3.11}$$

die *Vollständigkeitsmenge bezüglich der Ausgänge.* ❑

Satz 3.3
Für ein Ausgangs-Regel-Relativ gilt in Abschwächung von Axiom 1 eines Regel-Relativs

$$\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}_V} \bigvee_{t < t_1} \bigvee_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \neq \emptyset. \tag{3.12}$$

Beweis
Sei $y \in \mathcal{Y}_V$. Dann existiert ein Punkt $(t,x) \in \mathfrak{P}_V$ mit $h(t,x) = y$ und ferner existieren $t_1 > t$, $\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}$ mit $(t,x)\left[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t\right](t_1,x_1)$ für ein geeignetes $x_1 \in \mathcal{X}$. Mit $y_1 := h(t_1,x_1)$ gilt dann $(t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1,y_1)$. ❑

3.2 Vollständigkeit

Wir setzen nun die Vollständigkeit des zugrundegelegten Regel-Relativs voraus, um die Abschwächung von Axiom 1 bzw. (3.12) des Ausgangs-Regel-Relativs entsprechend verschärfen zu können. Die Vollständigkeitsbedingung wurde in (Lemmen und Schleuter 1995) für Regel-Relative wie folgt formuliert:

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigwedge_{t_0 < t_1} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\Big] \neq \emptyset. \tag{3.13}$$

Diese Bedingung erwies sich als äquivalent zu der in (Sontag 1990) angegebenen Vollständigkeitsbedingung für Systeme. In den weiteren Betrachtungen erfolgt wieder die Beschränkung auf das Bild der Abbildung h, d.h. der gesamte Ausgangsraum $\mathcal{Y}$ wird eingeschränkt auf

$$\mathcal{Y}_0 := \{y \in \mathcal{Y} | \bigvee_{(t,x) \in \mathfrak{P}} h(t,x) = y\} = \mathrm{bild}(h). \tag{3.14}$$

$\mathcal{Y}_0$ ist also die Menge der Beobachtungen, die bzgl. der Abbildung h tatsächlich auftreten können. Wir nennen diese Menge auch den durch das System definierten Bildraum. Es gilt $\mathcal{Y}_V \subset \mathcal{Y}_0$.

Satz 3.4
Setzt man (3.13) voraus, so gilt für das Ausgangs-Regel-Relativ in Verschärfung von (3.12)

$$\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}_0} \bigvee_{t \in \mathcal{T}} \bigwedge_{t_1 > t} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t, y)[\Pi_t^{t_1} \Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \neq \emptyset. \tag{3.15}$$

Beweis
Sei $y \in \mathcal{Y}_0$. Dann existiert ein Punkt $(t,x) \in \mathfrak{P}$ mit $h(t,x) = y$. Nach der Vollständigkeitsbedingung (3.13) gilt für alle $t_1 > t$ und alle $\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}$

$$(t,x)\Big[\Pi_t^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\Big] \neq \emptyset, \quad \text{also}$$

$$(t,x)\Big[\Pi_t^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\Big](t_1, x_1) \quad \text{für geeignetes } x_1 \in \mathcal{X}.$$

Damit gilt aber für $y_1 = h(t_1, x_1)$

$$(t,y)[\Pi_t^{t_1} \Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1, y_1).$$

❑

Satz 3.5
Mit der Menge

$$\mathcal{Y}_1 := \{y \in \mathcal{Y} | \bigwedge_{t \in \mathcal{T}} \bigvee_{x \in \mathcal{X}} h(t,x) = y\} \subset \mathcal{Y}_0 \tag{3.16}$$

gilt unter der Voraussetzung der Vollständigkeit (3.13) sogar die Bedingung

$$\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}_1} \bigwedge_{t \in \mathcal{T}} \bigwedge_{t_1 > t} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t, y)[\Pi_t^{t_1} \Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \neq \emptyset. \tag{3.17}$$

Beweis

Seien $y \in \mathcal{Y}_1$ sowie $t, t_1 \in \mathcal{T}$ beliebig gegeben. Dann existiert ein Element $x \in \mathcal{X}$ mit $h(t,x) = y$. Nach (3.13) gilt für eine beliebige Funktion $\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}$

$$\begin{aligned} & (t,x)\Big[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t\Big](t_1,x_1) \quad \text{für geeignetes } x_1 \in \mathcal{X} \\ \Rightarrow\quad & (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1, h(t_1,x_1)) \\ \Rightarrow\quad & (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

❑

3.3 Zeitinvarianz

Es sei nun ein zeitinvariantes Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ vorausgesetzt. Das heißt, die folgende Eigenschaft (vgl. (Lemmen und Schleuter 1995)) sei erfüllt:

$$\bigwedge_{t<t_1} \bigwedge_{t^* \in \mathcal{T}} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t,x_0)\Big[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t\Big](t_1,x_1) \Rightarrow (t+t^*,x_0)\Big[\Pi_{t+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}\mathrm{d}t\Big](t_1+t^*,x_1) \tag{3.18}$$

mit $\Omega^{t^*} \in \mathcal{R}^{[t+t^*, t_1+t^*)}$ gemäß $\Omega^{t^*}(t) := \Omega(t-t^*)$.

Zusätzlich sei die Ausgangsabbildung h unabhängig von der Zeitkomponente, d.h. es gelte

$$h(t,x) = h(t',x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X} \text{ und } t, t' \in \mathcal{T}, \tag{3.19}$$

so daß man sich auf eine Ausgangsabbildung $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ beschränken kann. Eine zu (3.18) analoge Zeitinvarianzbedingung werde für das Ausgangs-Regel-Relativ wie folgt definiert:

$$\bigwedge_{t<t_1} \bigwedge_{t^* \in \mathcal{T}} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}} (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1,y_1) \Rightarrow (t+t^*,y)[\Pi_{t+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}\mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1+t^*,y_1). \tag{3.20}$$

Es gilt nun

Satz 3.6
Ist ein zeitinvariantes Regel-Relativ gegeben und erfüllt die Ausgangsabbildung h die Bedingung (3.19), so genügt das zugehörige Ausgangs-Regel-Relativ der Bedingung (3.20).

Beweis
Seien $t < t_1, t^* \in \mathcal{T}$ und $\Omega \in \mathcal{R}^{[t,t_1)}$ gegeben.

$$\begin{aligned} & && (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1,y_1) \\ \Rightarrow\quad & \bigvee_{x,x_1 \in \mathcal{X}} && (t,x)\Big[\Pi_t^{t_1}\Omega \mathrm{d}t\Big](t_1,x_1) \wedge h(t,x) = y \wedge h(t_1,x_1) = y_1 \\ \Rightarrow\quad & \bigvee_{x,x_1 \in \mathcal{X}} && (t+t^*,x)\Big[\Pi_{t+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}\mathrm{d}t\Big](t_1,x_1) \wedge h(t+t^*,x) = y \wedge h(t_1+t^*,x_1) = y_1 \\ \Rightarrow\quad & && (t+t^*,y)[\Pi_{t+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}\mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}(t_1+t^*,y_1). \end{aligned}$$

❑

Satz 3.6 rechtfertigt damit die nachfolgende

Definition 3.3
Erfüllt ein Ausgangs-Regel-Relativ die Bedingung (3.20), so nennen wir es zeitinvariant. ❑

Satz 3.7
Setzt man für diesen zeitinvarianten Fall zusätzlich die Vollständigkeit des Regel-Relativs voraus, so erfüllt das Ausgangs-Regel-Relativ in Verstärkung von Gl. (3.17) die Bedingung

$$\bigwedge_{y\in\mathcal{Y}_0} \quad \bigwedge_{t<t_0} \quad \bigwedge_{\Omega\in\mathcal{R}^{[t,t_1)}} \quad (t,y)[\Pi_t^{t_1}\Omega\mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}} \neq \emptyset. \tag{3.21}$$

Beweis
Da h unabhängig von t ist, folgt zunächst $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_1$. Dazu ist nur zu zeigen, daß die Inklusion $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{Y}_1 \quad &\Rightarrow \quad \bigvee_{(t,x)\in\mathfrak{P}} h(t,x) = y \\
&\Rightarrow \quad \bigvee_{x\in\mathcal{X}} \bigwedge_{t\in\mathcal{T}} h(t,x) = y \\
&\Rightarrow \quad \bigwedge_{t\in\mathcal{T}} \bigvee_{x\in\mathcal{X}} h(t,x) = y \\
&\Rightarrow \quad y \in \mathcal{Y}_0.
\end{aligned}$$

Da die obige Aussage (3.21) für $y \in \mathcal{Y}_1$ gültig ist, folgt direkt die Behauptung (3.21). ❑

4 Steuerbarkeitsprobleme

Analog zur Theorie linearer kontinuierlicher Systeme werden in diesem Abschnitt Erreichbarkeit und Steuerbarkeit bezüglich eines Ausgangsraumes $\mathcal{Y}$ untersucht. Dementsprechend handelt es sich also um *Ausgangserreichbarkeit* und *Ausgangssteuerbarkeit* (Schwarz 1969).

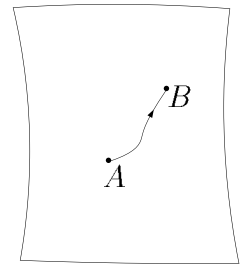

Bild 4.1: Von A aus ausgangserreichbarer Punkt B

4.1 Ausgangserreichbarkeit

Definition 4.1 *Ausgangserreichbarkeit zweier Punkte*
Ein Punkt $B = (t_B, y_B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ eines Ausgangs-Regel-Relativs $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$ heißt *ausgangserreichbar von* $A = (t_A, y_A) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ genau dann, wenn eine Relation $[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}$ mit $t_B \geq t_A$ derart existiert, daß gilt

$$A[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y} B. \tag{4.1}$$

❏

Die Erreichbarkeit zweier Punkte ist also eine binäre Relation. Als notwendige Bedingung für die Ausganserreichbarkeit der beiden Punkte aus (4.1) kann direkt $B \in \mathcal{Y}_0$ angegeben werden. Die Erweiterung von Definition 4.1 führt dann auf

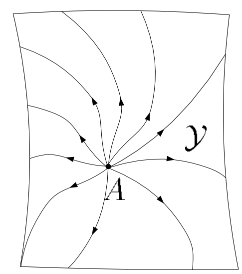

Bild 4.2: Von A aus ausgangserreichbares Ausgangs-Regel-Relativ

Definition 4.2 *Ausgangserreichbarkeit von einem Punkt*
Ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$ heißt *ausgangserreichbar von* $A = (t_A, y_A) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ genau dann, wenn für jedes $y_B \in \mathcal{Y}$ eine Relation $[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}$ mit $t_B \geq t_A$ und $t_B \in \mathcal{T}$ derart existiert, daß gilt

$$(t_A, y_A)[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}(t_B, y_B) \quad \text{für alle} \quad y_B \in \mathcal{Y}. \tag{4.2}$$

❏

Eine Verstärkung der Eigenschaft gemäß Definition 4.2 ist die folgende

Definition 4.3 *Ausgangserreichbarkeit eines Ausgangs-Regel-Relativs*
Ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$ heißt *ausgangserreichbar* genau dann, wenn für jedes $A = (t_A, y_A) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ und $y_B \in \mathcal{Y}$ eine Relation $[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}$ mit $t_B \geq t_A$ derart existiert, daß gilt

$$\bigwedge_{y_A, y_B \in \mathcal{Y}} \bigwedge_{t_A \in \mathcal{T}} \bigvee_{t_B \geq t_A} (t_A, y_A)[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}(t_B, y_B). \tag{4.3}$$

❏

Da bei dieser Definition jeder Punkt des Ausgangsraumes von jedem anderen Punkt aus erreichbar sein muß, rechtfertigt dies auch die in diesem Zusammenhang sonst sehr verbreitete Bezeichnung der *vollständigen Ausgangserreichbarkeit*.

4.2 Ausgangssteuerbarkeit

Das Steuerbarkeitsproblem kann als zur Erreichbarkeit invers angesehen werden: Es wird nicht mehr hinterfragt, in welche Punkte das System mit einer geeigneten Steuerung überführt werden kann, sondern vielmehr wird untersucht, welche Punkte in den vorgegebenen Endpunkt (durch eine geeignete Wahl der Steuerung) gesteuert werden können. Die Existenzfrage ist also genau von dem Wertebereich der Relation in den Definitionsbereich transformiert.

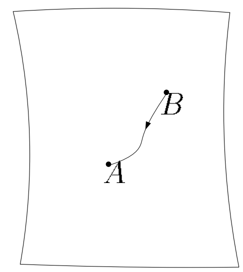

Bild 4.3: In A ausgangssteuerbarer Punkt B

Definition 4.4 *Ausgangsteuerbarkeit zweier Punkte*
Ein Punkt $B = (t_B, y_B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ eines Ausgangs-Regel-Relativs $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$ heißt *ausgangsteuerbar in* $A = (t_A, y_A) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ genau dann, wenn eine Relation $[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}$ derart existiert, daß gilt

$$A[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y} B. \tag{4.4}$$

❑

Die Definition der Ausgangssteuerbarkeit ist identisch mit der der (vollständigen) Ausgangserreichbarkeit eines Ausgangs-Regel-Relativs. Ein grundlegender Unterschied existiert jedoch bei der Ausgangsteuerbarkeit in einen Punkt:

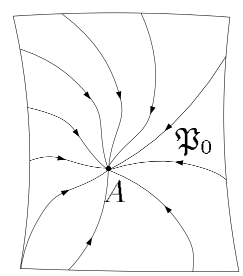

Bild 4.4: In A ausgangssteuerbares Ausgangs-Regel-Relativ

Definition 4.5 *Ausgangssteuerbarkeit in einen Punkt*
Ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_\mathcal{Y}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_\mathcal{Y})$ heißt *ausgangssteuerbar in* $B = (t_B, y_B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ genau dann, wenn für jedes $y_A \in \mathcal{Y}$ eine Relation $[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y}$ mit $t_B \geq t_A$ derart existiert, daß gilt

$$\bigwedge_{y_A \in \mathcal{Y}} \bigvee_{t_A \leq t_B} (t_A, y_A)[\Pi_{t_A}^{t_B} \Omega \mathrm{d}t]_\mathcal{Y} (t_B, y_B) \qquad \text{mit} \qquad t_A \in \mathcal{T}. \tag{4.5}$$

❑

4.3 Anmerkungen

Auch wenn in den Definitionen in Abschnitt 4.1 und 4.2 unterschiedliche Anfangszustände eines durch Differentialgleichungen gegebenen Systems nicht weiter explizit berücksichtigt worden sind, wie beispielsweise bei der sogenannten a-Steuerbarkeit in (Schwarz

1969:177), bedeutet dies nicht, daß die Anfangsbedingungen des Differentialgleichungssystems keinen Einfluß auf die Ausgangssteuerbarkeitsproblematik bei Ausgangs-Regel-Relativen besitzen. Vielmehr muß in Betracht gezogen werden, daß damit die entsprechende (Ausgangs-)Eigenschaft für jeden beliebigen Anfangszustand erfüllt sein muß.

Mit Hilfe der Abbildung h werden Zustände in Ausgänge, also in die Ausgangsmenge abgebildet. Somit bildet h auch Zustandstrajektorien (eine über die Zeit parametrierte Anordnung von Zuständen – der Lösung der dem Relativ zugrundeliegenden Systemdifferentialgleichung) in Ausgangstrajektorien (als Anordnung über die Zeit parametrierter Ausgänge) ab (vgl. Gl. (2.2)). Für h selber sind praktisch keinerlei Einschränkungen gemacht worden.

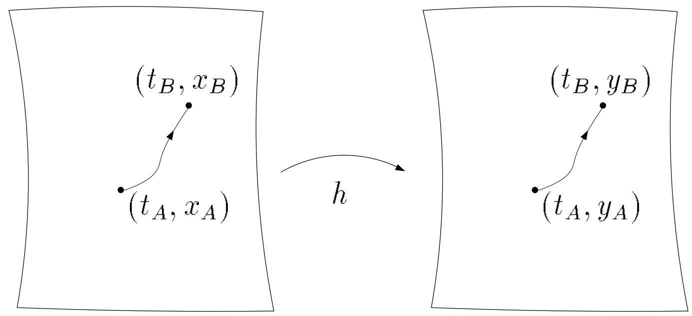

Bild 4.5: Zusammenhang zwischen Zustands- und Ausgangstrajektorien

Es kann nicht unmittelbar aus der Kenntnis der Erreichbarkeitseigenschaften der Zustände auf die Erreichbarkeitseigenschaften der Ausgänge geschlossen werden. Die Menge der erreichbaren Zustände wird zwar vermittels h in die Ausgangsmenge transformiert, die Struktur und Mächtigkeit der Menge der erreichbaren Ausgangspunkte kann aber stark von der der Zustandspunkte differieren. Durch h kann ein nicht zustandserreichbares Regel-Relativ in ein (vollständig) ausgangserreichbares Ausgangs-Regel-Relativ abgebildet werden und umgekehrt.

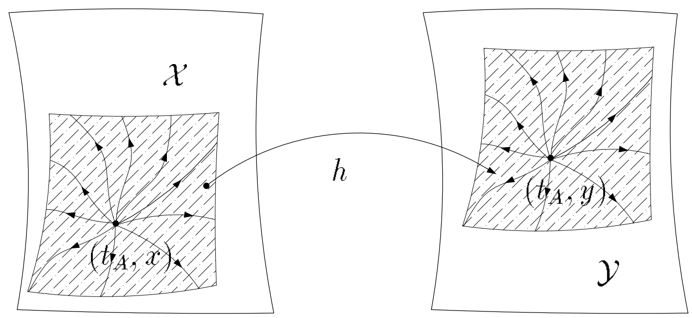

Bild 4.6: Zustands- und Ausgangserreichbarkeit über h

Da aber die Ausgangserreichbarkeit nur im Falle $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_0$ erfüllt werden kann, ist es sinnvoll, das Ausgangs-Regel-Relativ $\left(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}_0, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}_0}, [\Pi \cdot \mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}_0}\right)$ zu betrachten.

Analog zur Betrachtungsweise bei der Beobachtungsproblematik dynamischer Systeme, können noch lokale Begriffe sowohl für den Ausgangs- als auch den Zustandsraum definiert werden. Derartige Fragestellungen werden in diesem Bericht jedoch nicht behandelt.

5 Beobachtungsprobleme

Analog zur Theorie kontinuierlicher dynamischer Systeme werden in diesem Abschnitt Probleme zur Beobachtung des Systemausganges relationentheoretisch erfaßt. Grundsätzlich wird zunächst zwischen den Begriffen *Beobachtbarkeit* und *Rekonstruierbarkeit* unterschieden (Lemmen und Jelali 1996):

Beobachtbarkeit: Die Frage, ob der gegenwärtige Zustand (t_0, x_A) aus der Kenntnis der zukünftigen Ausgangssignale $(t, y_A): \ t \geq t_0$ und der zukünftigen Eingangssignale $\boldsymbol{u}(t): \ t \geq t_0$ bestimmt werden soll, betrifft das Problem der *Beobachtbarkeit.*

Rekonstruierbarkeit: Soll aus dem vergangenen Verlauf von $\boldsymbol{u}(t): \ t \leq t_0$ und $y_A(t): \ t \leq t_0$ der gegenwärtige Zustand (t_0, x_A) bestimmt werden, sprechen wir von dem Problem der *Rekonstruierbarkeit.*

In der ursprünglichen Fassung in (Kalman u. a. 1969) wird die Kenntnis von $\boldsymbol{u}(t)$ nicht vorausgesetzt. Bereits bei zeitvarianten linearen Systemen muß streng zwischen Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit unterschieden werden (Ludyk 1977). Bei der praktischen Anwendung, d.h. bei der Auslegung eines „Beobachters“ (genauer: „Schätzer“), handelt es sich immer um eine Rekonstruktion des Zustandes (Schwarz 1981). Der Grund, warum nun für eine derartige Anwendung eine Analyse der Beobachtbarkeit und nicht der Rekonstruierbarkeit anhand des Prozeßmodells notwendig ist, erläutern die folgenden Überlegungen:

Bei der Beobachtbarkeit wird untersucht, ob ein Zustand x_A zum Zeitpunkt t_0 mit Hilfe von Signalen $\boldsymbol{u}(t_0 + \Delta t)$ und $((t_0 + \Delta t), y_A)$, $\Delta t > 0$ unterschieden werden kann (Bild 5.1).

Bild 5.1: Beobachtbarkeitsanalyse

Mit Hilfe eines Beobachters wird nun ein Punkt (t_0, x_A) auch tatsächlich rekonstruiert. Dieser Zustand x_A zum Zeitpunkt t_0 wird aber aus Signalen $(\boldsymbol{u}, y_A)$ zu Zeiten $t_0 + \Delta t$ ermittelt, also bezüglich des Zeitpunktes t_0 quasi „beobachtet“ (Bild 5.2).

Bild 5.2: Zu verwertende Signale eines Beobachters für einen Zustand $\boldsymbol{x}_0$

5.1 Ununterscheidbarkeit

Die Grundlage der Erfassung der Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit bildet die Eigenschaft der Ununterscheidbarkeit zweier Zustandspunkte $x_A, x_B \in \mathcal{X}$. Bei dieser Eigenschaft eines Ausgangs-Regel-Relativs wird unterstellt, daß die zwei vorgegebenen (unterschiedlichen) Anfangszustände x_A und x_B genau denselben Verlauf des Regel-Relativ-Ausganges erzeugen:

Definition 5.1 *Ununterscheidbarkeit zweier Punkte*
Zwei Punkte $A = (t_A, x_A), B = (t_B, x_B) \in \mathfrak{P}$ mit $t_A = t_B = t_0$ eines Ausgangs-Regel-Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ heißen *ununterscheidbar* (abkürzend: $A\mathfrak{b}^{\perp}B$) genau dann, wenn $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ für alle Eingangsfunktionen die gleichen Regel-Relativ-Ausgänge erzeugt, also wenn gilt

$$h(x_A) = y_A \wedge h(x_B) = y_B \wedge \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0, t_1)}} (t_0, y_A) \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} = (t_0, y_B) \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}}. \tag{5.1}$$

❑

Die Menge aller Punkte B, die bezüglich eines vorgegebenen Punktes A ununterscheidbar sind, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Definition 5.2 *Ununterscheidbarkeitsmenge eines Punktes A*
Die Menge aller Punkte, die bezüglich eines vorgegebenen Punktes $A \in \mathfrak{P}$ ununterscheidbar sind, heißt *Ununterscheidbarkeitsmenge bezüglich A*.
Sie ist definiert als

$$\mathfrak{B}_A^{\perp} := \left\{B \in \mathfrak{P} | A\mathfrak{b}^{\perp}B\right\}. \tag{5.2}$$

❑

5.2 Beobachtbarkeit

Grundlage für die Beobachtbarkeit ist die bereits eingeführte Ununterscheidbarkeit. Ist ein Punkt (t_0, x) nur von sich selbst ununterscheidbar, so heißt das Ausgangs-Regel-Relativ beobachtbar bei (t_0, x):

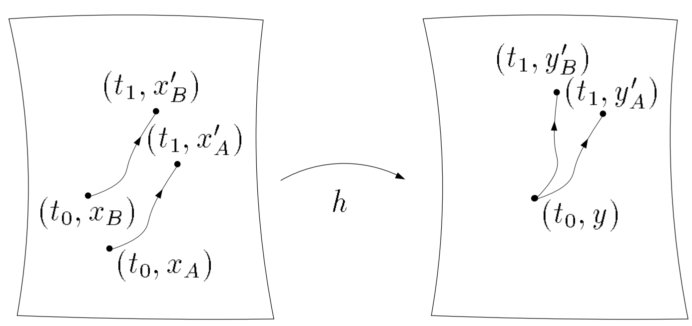

Bild 5.3: Beobachtbare Zustände x_0 und x_1 mit $y = y_A = y_B$

Definition 5.3 *Beobachtbarkeit bei einem Punkt A*
Es sei ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dieses heißt dann und nur dann *beobachtbar bei* $A = (t_0, x_A)$ wenn gilt

$$\bigwedge_{\substack{B := (t_0, x_B) \in \mathfrak{P}, \\ x_B \neq x_A}} \neg \quad A\mathfrak{b}^{\perp}B \tag{5.3}$$

oder äquivalent dazu

$$\bigwedge_{\substack{B:=(t_0,x_B)\in\mathfrak{P},\\ x_B\neq x_A}} \begin{aligned} & h(x_A)=y_A \quad \wedge \quad h(x_B)=y_B \\ & \wedge \bigvee_{\Omega\in\mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} (t_0,y_A)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} \neq (t_0,y_B)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} . \end{aligned} \tag{5.4}$$

❑

Bei dieser Definition ist zu beachten, daß nicht jedes Eingangssignal die Anfangszustände unterscheidbar machen muß, sondern lediglich ein einziges geeignetes.

Auch die Menge der bezüglich eines vorgegebenen Punktes $A \in \mathfrak{P}$ beobachtbaren Punkte $B \in \mathfrak{P}$ läßt sich zusammenfassen in

Definition 5.4 *Beobachtbarkeitsmenge bezüglich eines Punktes A*
Die Menge aller Punkte, die bezüglich eines vorgegebenen Punktes $A \in \mathfrak{P}$ beobachtbar sind, heißt *Beobachtbarkeitsmenge bezüglich A.*
Sie ist definiert als

$$\mathfrak{B}_A := \left\{B \in \mathfrak{P} | \neg A\mathfrak{b}^{\perp} B\right\} . \tag{5.5}$$

❑

Hieraus folgt direkt

Korollar 5.1
Ein Ausgangs-Regel-Relativ ist dann und nur dann beobachtbar bei einem Punkt $A \in \mathfrak{P}$, wenn gilt

$$\mathfrak{B}_A^{\perp} = \{A\} . \tag{5.6}$$

❑

Die Mengen $\mathfrak{B}_A$ und $\mathfrak{B}_A^{\perp}$ sind also disjunkt, wobei gilt:

Korollar 5.2
Es sei ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ sowie die Beobachtbarkeitsmenge $\mathfrak{B}_A$ und die Ununterscheidbarkeitsmenge $\mathfrak{B}_A^{\perp}$ bezüglich eines Punktes $A \in \mathfrak{P}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{A\in\mathfrak{P}} \mathfrak{B}_A \cap \mathfrak{B}_A^{\perp} = \emptyset \quad \wedge \quad \mathfrak{B}_A \cup \mathfrak{B}_A^{\perp} = \mathfrak{P}. \tag{5.7}$$

❑

Die bisher vorgestellten Beobachtbarkeitsbegriffe beziehen sich alle auf eine Beobachtbarkeitseigenschaft bezüglich eines vorgegebenen Punktes $A \in \mathfrak{P}$. Das kann nun zu globalen Eigenschaften erweitert werden:

Definition 5.5 *Beobachtbarkeit*
Es sei ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dieses heißt dann und nur dann *beobachtbar*, wenn gilt

$$\bigwedge_{\substack{A:=(t_0,x_A),B:=(t_0,x_B)\in\mathfrak{P},\\ x_B\neq x_A}} \neg \quad A\mathfrak{b}^{\perp}B \tag{5.8}$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned}\bigwedge_{\substack{A:=(t_0,x_A),B:=(t_0,x_B)\in\mathfrak{P},\\ x_B\neq x_A}} \quad & h(x_A)=y_A \quad \wedge \quad h(x_B)=y_B \\ & \wedge \bigvee_{\Omega\in\mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} (t_0,y_A)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} \neq (t_0,y_B)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

❑

Somit erweitert sich Definition 5.4 zu

Definition 5.6 *Beobachtbarkeitsrelation*
Die Menge aller Punktepaare, die beobachtbar (voneinander) sind, heißt *Beobachtbarkeitsrelation* $\mathfrak{b}$. Sie ist definiert als

$$\mathfrak{b} := \{(A,B)\in\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}|B\in\mathfrak{B}_A\}. \tag{5.10}$$

❑

Somit folgt direkt

Korollar 5.3
Ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ ist beobachtbar dann und nur dann, wenn gilt

$$\bigwedge_{A\in\mathfrak{P}} \mathfrak{B}_A = \mathfrak{P}\setminus\{A\}. \tag{5.11}$$

❑

Auch für die Beobachtbarkeit ist eine lokale Betrachtung, also von Umgebungen um den Anfangszustand möglich. Diese Vorgehensweise wird hier aber zunächst nicht weiter verfolgt.

5.3 Rekonstruierbarkeit

Die Definitionen und Schlußfolgerungen bezüglich der Rekonstruierbarkeit sind sehr ähnlich zu denen der Beobachtbarkeit. Grundlegend unterschiedlich ist jedoch dabei, daß anstelle des Nachbereiches der Überführungsrelation $[\Pi\Omega\mathrm{d}t]_{\mathcal{Y}}$ der Vorbereich im Interesse der Untersuchungen steht. Dementsprechend komplexer sieht nun die formale Fassung der Begriffe aus:

Definition 5.7 *Unrekonstruierbarkeit zweier Punkte*
Zwei Punkte $A = (t_A, x_A), B = (t_B, x_B) \in \mathfrak{P}$ mit $t_A = t_B = t_e$ eines Ausgangs-Regel-Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ heißen *unrekonstruierbar* (abkürzend: $A\mathfrak{r}^{\perp}B$) genau dann, wenn $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ für alle Eingangsfunktionen die gleichen Regel-Relativ-Ausgänge erzeugt, also wenn gilt

$$h(x_A) = y_A \wedge h(x_B) = y_B \wedge \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0, t_e)}} \left[\Pi_{t_0}^{t_e} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} (t_e, y_A) = \left[\Pi_{t_0}^{t_e} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} (t_e, y_B). \quad (5.12)$$

❑

Daraus ergibt sich nun entsprechend die

Definition 5.8 *Rekonstruierbarkeit bei einem Punkt A*
Es sei ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dieses heißt dann und nur dann *rekonstruierbar bei* $A = (t_e, x_A)$ wenn gilt,

$$\bigwedge_{\substack{B := (t_e, x_B) \in \mathfrak{P}, \\ x_B \neq x_A}} \neg \quad A\mathfrak{r}^{\perp}B \quad (5.13)$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\substack{B := (t_e, x_B) \in \mathfrak{P}, \\ x_B \neq x_A}} \quad & h(x_A) = y_A \quad \wedge \quad h(x_B) = y_B \\ & \wedge \bigvee_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_1, t_e)}} \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} (t_e, y_A) \neq \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t\right]_{\mathcal{Y}} (t_e, y_B). \end{aligned} \quad (5.14)$$

❑

Auch an dieser Stelle ist – wie bei der Beobachtbarkeit in Abschnitt 5.2, Definition 5.3 – anzumerken, daß nicht für jede beliebige Eingangsfunktion die Rekonstruierbarkeit gegeben sein muß, sondern eben für mindestens eine geeignete Eingangsfunktion.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht werden Ausgänge eines Regel-Relativs für Regel-Relative $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t)$ gemäß (Arnold 1995) eingeführt. Mit Hilfe dieser Erweiterung ist es möglich neben systemtheoretischen Fragestellungen, welche den Zustandsraum betreffen, wie die Erreichbarkeit und Steuerbarkeit (Lemmen 1995, Lemmen und Schleuter 1996) nun auch Aussagen in relationenalgebraischen Termini über das zugrundeliegende Systemverhalten im Ausgangsraum formulieren. Dazu gehören zum einen die Ausgangssteuerbarkeit und -erreichbarkeit, aber auch die zum Bereich der Beobachtungsproblematik zählenden Eigenschaften wie Ununterscheidbarkeit, Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit.

Gegenüber herkömmlichen differentialgeometrischen Methoden zeichnen sich diese neuen Methoden dadurch aus, daß sie zur Beschreibung und Analyse auch solche Systeme zulassen, die nicht stetig oder gar differenzierbar sind. Regel-Relative und die vorgestellten Ausgangs-Regel-Relative können in diesem Zusammenhang sozusagen als Verallgemeinerung der herkömmlichen Untersuchungsmethoden angesehen werden.

Erweiternd zu den hier vorgestellten Fragen müssen nun Entscheidungskriterien für die hier betrachteten Relativeigenschaften hergeleitet und erweitert werden, um so eine rechnerunterstützte Analyse von Regel-Relativen bezüglich der angesprochenen Eigenschaften ermöglichen zu können. Insbesondere mit einem in zukünftigen Arbeiten durchzuführenden Vergleich mit differentialgeometrischen Methoden, sind die in diesem Bericht noch nicht explizit formulierten lokalen Aspekte der oben angesprochenen Begriffe zu berücksichtigen.

7 Literaturverzeichnis

Arnold, H.-J. 1995. Der Systembegriff der Kontrolltheorie und Regel–Relative. *Results in Mathematics* 28. 195–208.

Kalman, R. E., **P. L. Falb** und **M. A. Arbib**. 1969. *Topics in mathematical system theory*. New York: McGraw-Hill.

Lemmen, M. 1995. *Steuerbarkeit – Erreichbarkeit – Zugänglichkeit: algebraische und differentialgeometrische Aspekte*. Forschungsbericht 3/95 MSRT. Meß-, Steuer- und Regelungstechik. Gerhard-Mercator-Universität – GH Duisburg.

Lemmen, M. und **M. Jelali**. 1996. *Differentialgeometrische Steuer- und Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 8/96 MSRT. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität – GH Duisburg.

Lemmen, M. und **M. Schleuter**. 1995. *Regel–Relative: Definition, Vergleich und Anwendung auf dynamische Systeme*. Forschungsbericht 2/95 MSRT. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität – GH Duisburg.

Lemmen, M. und **M. Schleuter**. 1996. Relational Control Structures. *Results in Mathematics* 29. 100–110.

Ludyk, G. 1977. *Theorie dynamischer Systeme*. Berlin: Elitera.

Schwarz, H. 1969. *Einführung in die moderne Systemtheorie. Theorie geregelter Systeme.* Theorie geregelter Systeme. Braunschweig: Vieweg.

Schwarz, H. 1981. *Optimale Regelung und Filterung*. Braunschweig: Vieweg.

Sontag, E. D. 1990. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. New York: Springer-Verlag.

A Regel-Relative – Definition

Definition A.1 (Arnold 1995)
Wir sprechen von einem *Regel–Relativ* $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{d}t)$, wenn vorgegeben werden

- als *Zeitmenge* eine Untergruppe $\mathcal{T}(+) < \mathbb{R}(+)$,
- eine nicht leere Menge $\mathcal{X}$, deren Elemente *Zustände* heißen,
- eine nicht leere Menge $\mathcal{R}$ von binären Relationen auf der Grundmenge $\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{R} \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P})$ mit der Eigenschaft der *Zeitorientiertheit*

$$\bigwedge_{\mathfrak{L} \in \mathcal{R}} (t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \Rightarrow t_0 \leq t_1, \tag{A.1}$$

- eine Abbildungsschar $\Pi \cdot \mathrm{d}t$, in der zu jedem Paar $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ mit $t_0 \leq t_1$ eine Abbildung

$$[\Pi_{t_0}^{t_1} \cdot \mathrm{d}t] : \begin{cases} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ \Omega & \longmapsto & [\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t] \end{cases}$$

existiert mit[1] $A[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega(t) \mathrm{d}t] B \Rightarrow t_A = t_0 \wedge t_B = t_1$ für alle $A, B \in \mathfrak{P}$

und wenn die folgenden Axiome gelten:

1. $$\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \bigvee_{t_0 < t_1} \bigvee_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} (t_0, x)[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t] \neq \emptyset,$$

2. $$(t_0, x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t](t_1, x_1) \wedge (t_0, x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega \mathrm{d}t](t_1, x_1') \Rightarrow x_1 = x_1',$$

3. $$[\Pi_{t_0}^{t^*} \Omega_1 \mathrm{d}t] \circ [\Pi_{t^*}^{t_1} \Omega_2 \mathrm{d}t] = [\Pi_{t_0}^{t_1} (\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2) \mathrm{d}t]$$

   für alle $t_0 \leq t^* \leq t_1$, $\Omega_1 \in \mathcal{R}^{[t_0,t^*)}$ und alle $\Omega_2 \in \mathcal{R}^{[t^*,t_1)}$;

   hierbei werde mit $\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ die Verkettung von Ω_1 und Ω_2 in t^* bezeichnet.

4. $\bigwedge_{\mathfrak{L} \in \mathcal{R}} [\Pi_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} \mathrm{d}t] = \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}$, wobei $\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}$ die gemäß

$$(t_0', x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}(t_1', x_1) :\Leftrightarrow t_1 = t_1' \wedge t_0 = t_0' \wedge (t_0', x_0)\mathfrak{L}(t_1', x_1) \tag{A.2}$$

   erklärte Relation ist und $[\Pi_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} \, \mathrm{d}t] = [\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega_{\mathfrak{L}} \, \mathrm{d}t]$ zu setzen ist für $\Omega_{\mathfrak{L}} \equiv \mathfrak{L}$ auf $[t_0, t_1)$;

5. $\bigwedge_{t_0 \in \mathcal{T}} \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} (t_0, x)[\Pi_{t_0}^{t_0} \diamond \mathrm{d}t](t_0, x)$ gilt für die leere Abbildung $\diamond \in \mathcal{R}^{[t_0,t_0)}$.

[1] Dabei setzen wir $A = (t_A, x_A)$, $B = (t_B, x_B)$.