

Zur Modellfolgeregelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme

Markus Senger

Forschungsbericht Nr. 1/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der vorliegende Bericht behandelt die Fragestellung nach der Existenz einer Modellfolgeregelung für nichtlineare Mehrgrößensysteme sowie die systematische Synthese der entsprechenden Regelgesetze. Des weiteren wird die Übertragbarkeit auf eine graphentheoretische Vorgehensweise untersucht.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Problemformulierung	3
2.1 Mathematische Grundlagen	3
2.2 Modellfolgeregelung	4
3 Bestimmung des Regelgesetzes	9
4 Graphentheoretische Betrachtung und Anwendungsbeispiele	14
4.1 Graphentheoretische Betrachtung	14
4.2 Anwendungsbeispiele	15
5 Zusammenfassung	22
6 Literatur	23
 Anhang	 26
A Modell des Hydraulikkdifferentialzylinders	26

Nomenklatur

Skalare Größen:

A	: Kolbenfläche
B_Q	: Durchflußkoeffizient
$E_{Öl,A}, E_{Öl,B}$: Ölelastizität in Kammer A bzw. B
F_C, F_H, F_V	: Reibungskenngrößen
F_L	: am Kolben angreifende Kraft
F_R	: Reibkraft
H	: Kolbenhub
i, j, k, l	: Laufindizes
m	: Anzahl der Eingangsgrößen
m_K, m_{ges}	: Kolbenmasse, Gesamtmasse
n	: Ordnung eines Zustandsmodells
P_i	: Pole einer Übertragungsfunktion
p	: Anzahl der Ausgangsgrößen
p_0, p_T	: Versorgungsdruck, Tankdruck
Q_A, Q_B	: Volumenströme
u	: Stellgröße, Steuerkolbenposition
V_A, V_B, V_{LA}, V_{LB}	: Ölvolumenta
z	: Störeingang
δ	: Grad der zeitlichen Ableitung, die zur u -Linksunabhängigkeit führt
ν	: Laufindex
ξ	: Funktion
ρ, ρ^*	: differentieller Rang
ρ_{gen}	: generischer Rang
$\rho_{Öl}$: Dichte des Hydrauliköls
σ	: Mächtigkeit der Menge der $\delta_l \delta_l < \infty$
σ_k	: Anzahl der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung $\leq k$
φ	: Kolbenflächenverhältnis
ω_0	: Eigenfrequenz

Matrizen, Vektoren, Körper:

\mathcal{E}	: Vektorraum
\mathbf{f}, \mathbf{h}	: Vektorfelder
k	: Grundkörper
\mathcal{K}	: nichtdifferentieller Körper
$k\langle \mathbf{x} \rangle$: Körper der rationalen Funktionen in $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots$
$k\langle \mathbf{y} \rangle/k$: Körpererweiterung um die rationalen Funktionen in y_i und den Ableitungen von y_i

R	:	Matrix
u	:	Vektor der Eingangsgrößen
\tilde{u}	:	Teilvektor von u
v	:	Vektor der neuen Eingangsgrößen
x	:	Vektor der Zustandsvariablen
y	:	Vektor der Ausgangsgrößen
z	:	Vektor der für eine dynamische Zustandsrückführung benötigten Zustandsvariablen
α, β	:	Vektorfelder
Θ	:	Parametervektor
ϕ, ψ	:	Vektorfelder
Υ	:	Vektor der u -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen

Operatoren:

diff. trg	:	differentieller Transzendenzgrad
\oplus	:	Kompositionsoperator
$[\cdot]^T$:	Transponierte der Matrix $[\cdot]$

Logische Verknüpfungen:

\wedge	:	Konjunktion „und“
\vee	:	Disjunktion, Alternative „oder“
\rightarrow	:	Implikation

Mengen und Mengenoperatoren:

$\text{card}\{\cdot\}$:	Mächtigkeit der Menge $\{\cdot\}$
L_u	:	Menge der u -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen
$\text{span}\{\cdot\}$:	von den in $\{\cdot\}$ enthaltenen Vektoren aufgespannter Vektorraum
\mathbb{R}	:	Menge der reellen Zahlen
\subset	:	Untermenge
\subseteq	:	Untermenge oder Entsprechung
\in	:	Element von

Sonstige Formelzeichen:

\mathcal{G}	:	Graph
$P\{\mathbf{x}\}$:	Polynom in $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots$
$(\bar{\cdot})$:	Größe des vorgegebenen Modells
Δ	:	Differenz
$a \prec b$:	Ranking, bei dem b höher gewertet wird als a

1 Einleitung

Viele Problemstellungen der Regelungstechnik verlangen eine nichtlineare Problembeschreibung. Eine wichtige Frage, die sich bei nichtlinearen Systemen stellt, ist die nach der Möglichkeit, durch eine Zustandsrückführung ein gewünschtes Modellverhalten zu erzeugen. Dabei soll sowohl der Fall möglich sein, daß ein lineares Modellverhalten erzwungen wird als auch der Fall, daß ein vorgegebener nichtlinearer Zusammenhang erfüllt wird. In der Literatur wird dabei zwischen asymptotischer und exakter Modellfolgeregelung unterschieden (Di Benedetto und Grizzle 1992). In diesem Bericht wird der letztere Fall näher betrachtet.

Das Problem der Modellfolgeregelung kann, wie bereits bei einigen Autoren vorgeschlagen (Okutani und Furuta 1984), als Störsignalentkopplung formuliert werden. Dabei wird ein Gesamtsystem aus ursprünglichem System und gewünschtem Modell komponiert, dessen Ausgänge aus den Differenzen der Ausgänge dieser beiden Teilmodelle bestehen. Werden nun beide Teilsysteme mit den gleichen Stellgrößen beaufschlagt, so soll der Ausgang zu Null werden. Dies soll durch eine Zustandsgrößenrückführung gewährleistet werden, die sowohl die Zustände des ursprünglichen Systems als auch die Zustände des Modells umfassen darf (s. Bild 1.1). Werden die Modellzustände für die Rückführung benötigt, so bedeutet dieses, daß das Modell in dem zu verwendenden Regler abgebildet werden muß. Der in diesem Bericht betrachtete allgemeine Fall der Modellfolgeregelung umfaßt damit gleichzeitig den Fall der exakten Linearisierung, der gerade einer Modellfolgeregelung für ein lineares I-Modellsystem der Ordnung n entspricht, wobei n die Ordnung des ursprünglichen Systems darstellt. Anhand dieses Spezialfalles wird der Nutzen der Modellfolgeregelung unmittelbar deutlich: Kann ein Systemverhalten erzwungen werden, für das bereits bewährte Analyse- und Synthesewerkzeuge bekannt sind, so können diese Werkzeuge problemlos angewendet werden, sofern sich die Modellfolgeregelung als stabil erweist, d.h. sich auf ein hinreichend genaues Systemmodell stützt oder hinreichend robust gegen Abweichungen vom realen System ist. Solche Werkzeuge existieren z.T. für bilineare (Schwarz 1991) oder quadratische Systeme (Schwarz 1996), ganz gewiß aber für lineare Systeme.

Der vorliegende Bericht gliedert sich wie folgt: Zunächst werden in Abschnitt 2 einige mathematische Grundlagen wiedergegeben sowie Bedingungen für die Existenz einer Modellfolgeregelung angegeben. Eine Verbindung zur Störsignalentkopplung, insbesondere der graphentheoretischen Formulierung des Störentkopplungsproblems, wird dargestellt. Der dritte Abschnitt stellt einen Weg zur systematischen Berechnung der Modellfolgeregelung vor, der auf bereits bekannte differentialalgebraische Kenngrößen führt sowie Parallelen zu Inversionsalgorithmen für lineare (Silverman 1969) und nichtlineare (Hirschorn 1979, Singh 1981) Systeme aufweist. Insbesondere wird mit der Verwendung des Rankings eine Möglichkeit geschaffen, für die Inversion nichtlinearer Differentialgleichungen die Methoden der kommutativen Algebra zu nutzen. Besonders hervorzuheben

sind hierbei die sogenannten Gröbner-Basen, die eine Verallgemeinerung der Gaußschen Elimination darstellen und ein Ranking voraussetzen. Die Gröbner-Basen selbst werden in einem späteren Bericht näher behandelt, da sich eine umfangreiche Darstellung dieses Werkzeuges empfiehlt. Die Übertragbarkeit der Synthese der Modellfolgeregelung auf graphentheoretische Methoden wird in Abschnitt 4 näher erläutert, orientiert sich aber im wesentlichen an den Ausführungen eines früheren Berichtes (Senger 1996), in dem bereits auf die restriktiven Bedingungen einer exakten Übertragbarkeit hingewiesen wurde. Mit einer Zusammenfassung sowie einem Ausblick im fünften Abschnitt schließt der Bericht.

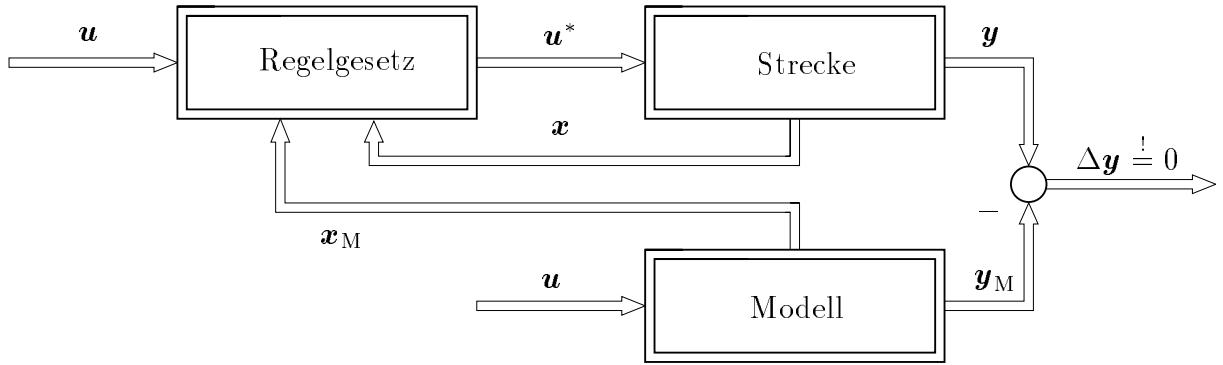


Abbildung 1.1: Allgemeine Darstellung einer Modellfolgeregelung

2 Problemformulierung

Für die Beschreibung Regelungstechnischer Aufgaben wie der Modellfolgeregelung sind einige mathematische Werkzeuge notwendig. Wie z.B. in Wey (1996) beschrieben, stellt die Differentialalgebra ein wichtiges Analysewerkzeug dar, das eine prägnante Beweisführung in vielen Regelungstechnischen Fragestellungen ermöglicht. Die Grundlagen der Anwendung der Körpertheorie auf die Beschreibung dynamischer Systeme finden sich bei Fliess (1986, 1990), der hier eine Vorreiterrolle einnimmt. An dieser Stelle werden zur Erinnerung solche Definitionen und Begriffe wiedergegeben, die im folgenden von unmittelbarer Bedeutung sind und in die Argumentationen einfließen. Einige weiterführende Grundlagen sind z.B. in Wey (1992) und Senger (1996) zusammengefaßt.

2.1 Mathematische Grundlagen

Da sie in vielen Beweisführungen Verwendung findet, wird zunächst die Gradformel der Differentialalgebra angegeben. Die Gradformel besagt, daß folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / k = \text{diff. } \text{trg } k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / k \langle \mathbf{b} \rangle + \text{diff. } \text{trg } k\langle \mathbf{b} \rangle / k , \quad (2.1)$$

was bedeutet, daß der differentielle Transzendenzgrad einer Körpererweiterung sich aus den differentiellen Transzendenzgraden derjenigen differentiellen Teilkörpererweiterungen bestimmt, die gerade die Gesamtkörpererweiterung ergeben. Weiterhin ist der differentielle Rang eines Systems definiert zu:

Definition 2.1 (Fliess 1986)

Der differentielle Rang eines Systems mit den Ausgängen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ist gleich dem differentiellen Transzendenzgrad $\text{diff. } \text{trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k$ der Körpererweiterung $k\langle \mathbf{y} \rangle / k$. \square

Einige mathematische Begriffe sind im folgenden kurz erklärt:

Ideal (Atiyah und Macdonald 1969):

Ein Ideal a eines Rings¹ A ist eine Untermenge von A , die eine additive Untergruppe von A derart darstellt, daß gilt $Aa \subseteq a$, d.h. $x \in A \vee y \in a \rightarrow xy \in a$.

Hauptideal (Atiyah und Macdonald 1969):

Die Vielfachen eines Elementes x aus A bilden ein Hauptideal, das durch „ (x) “ gekennzeichnet wird.

Primideal (Atiyah und Macdonald 1969):

Ein Ideal a aus A heißt Primideal, wenn gilt: $a \neq (1)$ und $xy \in a \rightarrow x \in a \vee y \in a$.

¹ Wenn nicht besonders erwähnt, ist mit einem Ring in diesem Bericht immer ein kommutativer Ring gemeint.

Modul (Atiyah und Macdonald 1969):

Es sei A ein kommutativer Ring. Dann ist ein A -Modul eine additive Abelsche Gruppe, in der sich A linear verhält. Das heißt, ein A -Modul ist ein Paar (M, μ) wobei M eine Abelsche Gruppe ist und μ eine Abbildung von $A \times M$ in M , so daß, wenn wir bx für $\mu(b, x) ; b \in A ; x \in M$ schreiben, die folgenden Axiome gelten:

$$b(x + y) = bx + by \quad (2.2)$$

$$(b + c)x = bx + cx \quad (2.3)$$

$$(bc)x = b(cx) \quad (2.4)$$

$$1x = x \quad b, c \in A ; x, y \in M \quad (2.5)$$

Module stellen eine Verallgemeinerung bekannter Konzepte dar. Es gilt z.B.:

- Ein Ideal a aus A ist ein A -Modul.
- Ist A ein Körper k , so bildet der A -Modul einen k -Vektorraum.

2.2 Modellfolgeregelung

Die Modellfolgeregelung ist in der Vergangenheit bereits vielfach diskutiert worden (Di Benedetto und Isidori 1986, Moog u. a. 1991, Di Benedetto und Grizzle 1992). Das Modellfolgeregelungsproblem ist durch folgenden Sachverhalt charakterisiert: Es sei ein Prozeß mit m Ein- und p Ausgängen sowie ein Modell (gekennzeichnet durch Überstrich) gegeben. Dann ist ein Kompensator derart gesucht, daß die Ausgänge des Prozesses mit Kompensator in gleicher Weise von den Eingangsgrößen abhängen wie die des Modells bei gleichen Eingangsgrößen. Diese Eigenschaft soll weiterhin unabhängig von den Anfangszuständen des Prozesses und des Modells sein. Wie bereits eingangs erwähnt, kann das Problem der Modellfolgeregelung als Störsignalentkopplung formuliert werden. Dafür betrachtet man ein System, dessen Ausgänge durch die paarweisen Differenzen $\Delta y_i = y_i - \bar{y}_i, i = 1, \dots, p$, zwischen Prozeß und Modell gebildet werden und unabhängig von den Eingängen dieses Systems sein sollen. Bild 2.1 verdeutlicht den Zusammenhang. An dieser Stelle soll eine differentialalgebraische Formulierung der Bedingungen für die Lösbarkeit des Modellfolgeregelungsproblems vorgestellt werden, die weitgehend den Ausführungen von Rudolph (1992) bzw. Rudolph und Delaleau (1993) folgt. Weiterhin werden Parallelen zu weiteren Formulierungen des gleichen Problems gezeigt. Da die Synthese der Regelgesetze auf Basis der Differentialalgebra kaum möglich ist, wird aufbauend auf die differentialalgebraischen Existenzbedingungen der Regelgesetze im nächsten Abschnitt die Synthese auf der Basis des Rankings dargestellt.

Aus differentialalgebraischer Sicht wird ein System mit m Eingängen \mathbf{u} und p Ausgängen \mathbf{y} durch eine Körpererweiterung $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$ beschrieben, die differentiell algebraisch ist, da angenommen wird, daß das Ein-/Ausgangsverhalten durch algebraische Differentialgleichungen dargestellt werden kann. Die Eingänge \mathbf{u} werden als voneinander unabhängig

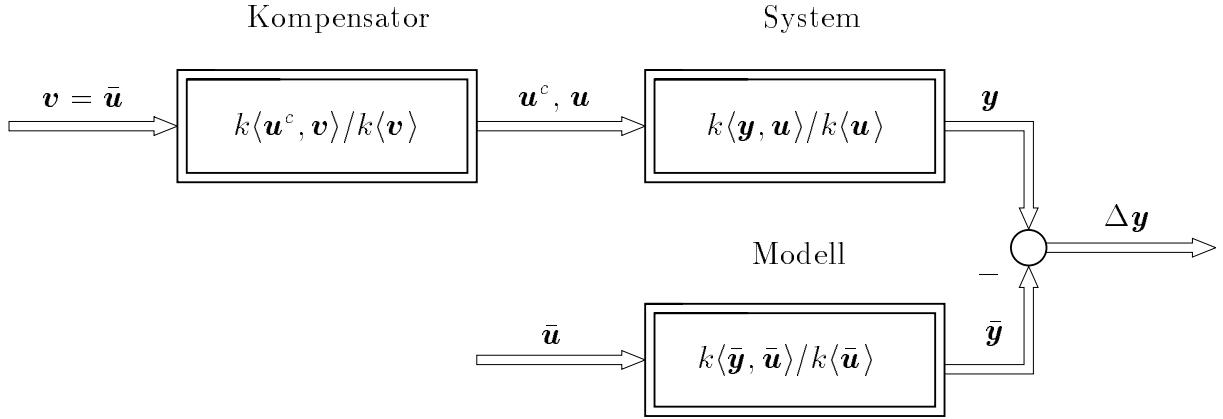


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Modellfolgeregelung als Störsignalentkopplung

angenommen, so daß diff. $\text{trg } k\langle \mathbf{u} \rangle / k = m$ gilt. Es ist nun ein Kompensator $k\langle \mathbf{u}^c, \mathbf{v} \rangle / k\langle \mathbf{v} \rangle$ gesucht, so daß in dem Körper $k\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^c, \mathbf{y}^c, \bar{\mathbf{y}} \rangle$ gilt:

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}^c \rangle / k = 0 \quad , \quad (2.6)$$

wobei der Exponent c das System mit Kompensator kennzeichnet. Für die Existenz einer Modellfolgeregelung kann nun folgender Satz angegeben werden.

Satz 2.1 (Rudolph 1992)

Ein Kompensator zu dem Prozeß $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$, der die Modellfolge mit dem Modell $k\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ gewährleistet, existiert, wenn

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y} \rangle / k = \rho \quad . \quad (2.7)$$

Darin stellt ρ den differentiellen Rang des Prozesses dar. \square

Beweis:

Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \rho &= \text{diff. } \text{trg } k\langle \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \\ &= \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \\ &= \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die erste Zeile in Gl. (2.8) folgt aus der Definition des differentiellen Ranges und der Tatsache, daß $\bar{\mathbf{y}}$ differentiell algebraisch über $k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ ist. Die zweite Zeile folgt aus der Definition von $\Delta \mathbf{y}$ und in der dritten Zeile wird wiederum die differentielle Algebraizität von $\bar{\mathbf{y}}$ über $k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ genutzt. Es gilt also nach Voraussetzung in Satz 2.1:

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y} \rangle / k = \rho = \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad . \quad (2.9)$$

Es werden ρ Prozeßeingänge $\tilde{\mathbf{u}}$ definiert, so daß $\text{diff. } \text{trg } k\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{y} \rangle = 0$ gilt. Somit stellt $\tilde{\mathbf{u}}$ die Eingänge eines invertierbaren Subsystems des Prozesses dar, also auch eines Teilsystems von $k\langle \Delta \mathbf{y}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle$. Damit gilt:

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Gl. (2.10) impliziert die Existenz dieser Gleichungen:

$$Q_i\{\Delta \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}\} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, \rho \quad . \quad (2.11)$$

Weiterhin folgt aus Gl. (2.9) die Existenz der Gleichungen

$$R_j\{\Delta \mathbf{y}\} = 0 \quad ; \quad j = \rho + 1, \dots, p \quad . \quad (2.12)$$

Es wird zunächst gezeigt, daß die Gln. (2.11) invertierbar bezüglich $\tilde{\mathbf{u}}$ sind:

Lemma 2.1

$$\text{diff. } \text{trg } k\langle \tilde{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \Delta \mathbf{y} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}}, \Delta \mathbf{y} \rangle = 0 \quad (2.13)$$

□

Zur Beweisführung wird die Kaskade

$$k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle \subset k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y} \rangle \subset k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle \quad (2.14)$$

von Körpererweiterungen gebildet, für die mit der Gradformel gilt:

$$\begin{aligned} \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle &= \\ \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \Delta \mathbf{y}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle &\quad (2.15) \\ + \text{diff. } \text{trg } k\langle \Delta \mathbf{y}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle &\quad . \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (2.15) ist gleich Null, weil per Definition $\tilde{\mathbf{u}}$ differentiell algebraisch über \mathbf{y} ist. Weil $\mathbf{y} = \Delta \mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}$ ist und $\bar{\mathbf{y}}$ differentiell algebraisch über $\bar{\mathbf{u}}$ ist, verschwindet auch der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung. Da weiterhin $k\langle \tilde{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \Delta \mathbf{y} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}}, \Delta \mathbf{y} \rangle$ eine Teil-Körpererweiterung von $k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle / k\langle \Delta \mathbf{y}, \bar{\mathbf{u}} \rangle$ darstellt, ist somit die Richtigkeit von Gl. (2.13) bewiesen. □

Da die Gln. (2.11) invertierbar bezüglich $\tilde{\mathbf{u}}$ sind, kann nun ein Kompensator durch diese Beziehungen sowie $m - \rho$ weiteren Gleichungen S_j , $j = \rho + 1, \dots, m$, gebildet werden, die eine differentielle Algebraizität von \mathbf{u} über $k\langle \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ definieren. Das resultierende Gesamtsystem mit Kompensator ist darstellbar durch die Gleichungen:

$$P_i\{\Delta \mathbf{y}^c\} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, \rho \quad , \quad (2.16)$$

$$R_j\{\Delta \mathbf{y}^c\} = 0 \quad ; \quad j = \rho + 1, \dots, p \quad . \quad (2.17)$$

Die Existenz von Gln. (2.16) folgt aus Gl. (2.10) und der Tatsache, daß die Gln. (2.11) invertierbar bezüglich $\tilde{\mathbf{u}}$ sind. Gl. (2.17) existiert nach Voraussetzung in Satz 2.1. Es ist

mit Gln. (2.16)–(2.17) die Bedingung aus Gl. (2.6) erfüllt. Der Kompensator wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$Q_i\{\Delta \mathbf{y}^c, \tilde{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}\} = 0 ; \quad i = 1, \dots, \rho , \quad (2.18)$$

$$S_j\{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}\} = 0 ; \quad j = \rho + 1, \dots, p . \quad (2.19)$$

□

Da die Differenzen $\Delta \mathbf{y}^c$ nun differentiell algebraisch über dem Grundkörper k sind, existiert zudem auch ein Feedforward-Kompensator

$$k\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle / k\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle . \quad (2.20)$$

Rudolph (1992) zeigt zudem, daß die in Satz 2.1 angegebene Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, wenn für den differentiellen Rang $\bar{\rho}$ des Modells gilt: $\bar{\rho} = \rho$.

Da die hier vorgestellte Beschreibung der Modellfolgeregelung durch eine Darstellung als Störsignalentkopplung erfolgt, können leicht einige Parallelen zu differentialgeometrischen und graphentheoretischen Beschreibungsweisen gezogen werden. Die differentialalgebraische Formulierung geht beispielsweise konform mit der von Huijberts u. a. (1992) auf differentialgeometrischer Basis gegebenen Bedingung. Diese lautet:

Satz 2.2 (Huijberts u. a. 1992)

Es liege ein analytisches System Σ_{AS} vor, das quadratisch ($p = m$) und differentiell linksinvertierbar ($\rho = m$) sei. Dieses System werde an einem streng regulären Punkt \mathbf{x}_0 betrachtet. Die dynamische Störsignalentkopplung mit Messung der Störung ist für dieses System dann und nur dann lokal um \mathbf{x}_0 möglich, wenn das gestörte System Σ_w und das ungestörte System Σ_o die gleiche algebraische Struktur im Unendlichen haben. □

Betrachtet man das Gesamtsystem aus Prozeß und Modell mit den Ausgängen $\Delta y_i = y_i - \bar{y}_i$, $i = 1, \dots, p$, als gestörtes System und den Prozeß als ungestörtes System, so sind die Bedingungen direkt auf das Problem der Modellfolgeregelung anwendbar. Wir rufen uns dafür in Erinnerung, daß die Struktur im Unendlichen gegeben ist durch die Liste $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, mit σ_k als der Anzahl der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung kleiner oder gleich k (Di Benedetto u. a. 1989). Es stimmt σ_n aber gerade mit dem von Fliess (1986) definierten differentiellen Rang ρ des Systems überein. Die in Satz 2.2 angegebene Bedingung ist allerdings restriktiver als die in Satz 2.1; sie ist nur lokal gültig und sieht keine quasistatischen Rückführungen vor. Zudem ist die Bedingung der Linksinvertierbarkeit nach Satz 2.1 nicht notwendig.

Eine graphentheoretische Bedingung für die Lösbarkeit des Modellfolgeregelungsproblems kann ebenfalls aus der Störentkoppelbarkeit abgeleitet werden. Dafür kann der von Wey und Svaricek (1995) angegebene Satz in einer weniger restriktiven Form verwendet werden, die auch quasistatische Rückführungen erlaubt:

Satz 2.3

Es liege ein analytisches System Σ_{AS} vor, das differentiell linksinvertierbar ($\rho = m$) sei. Das Modellfolgeregelungsproblem ist lösbar, wenn der Graph \mathcal{G}_0 des Prozesses und der Graph \mathcal{G}_Δ des Differenzsystems aus Prozeß und Modell die folgende Bedingung erfüllen:

Die Anzahlen der knotendisjunkten Pfade von \mathcal{G}_0 und \mathcal{G}_Δ stimmen überein und sind gleich dem differentiellen Rang ρ des Prozesses. \square

Beweis:

Nach Van der Woude (1991) stimmt die Anzahl der knotendisjunkten Pfade mit dem generischen Rang ρ_{gen} eines Systems überein. Weiterhin gilt (siehe Wey und Svaricek (1995)):

$$\rho \leq \rho_{\text{gen}} \quad . \quad (2.21)$$

Da nun die Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade eines Graphen nach oben durch die Anzahl m der Eingänge beschränkt ist, entspricht der generische Rang ρ_{gen} gerade dem differentiellen Rang ρ , denn es gilt bei vorausgesetzter differentieller Linksinvertierbarkeit:

$$m = \rho \leq \rho_{\text{gen}} \leq m \quad . \quad (2.22)$$

\square

Die Bedingung der differentiellen Linksinvertierbarkeit in Satz 2.3 ist hinreichend, aber nicht notwendig. In der überwiegenden Anzahl der Fälle wird der strukturelle Rang ρ_{gen} mit dem differentiellen Rang ρ übereinstimmen, was auch auf graphentheoretischem Wege überprüft werden kann (vgl. Wey (1993)). Für diese Fälle entspricht die Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade dem differentiellen Rang ρ und damit stimmen die Aussagen von Satz 2.1 und Satz 2.3 exakt überein.

3 Bestimmung des Regelgesetzes

In Abschnitt 2 wurden die Bedingungen für die Existenz eines Regelgesetzes dargelegt. Zwar sind die Bedingungen anhand weniger Zahlen zu überprüfen, jedoch ist i. allg. die Bestimmung des entsprechenden Regelgesetzes nicht möglich. Daher wird im folgenden eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Modellfolgeregelung dargestellt. Im weiteren Verlauf wird zudem eine Möglichkeit angesprochen, wie die Berechnung der Rückführung automatisiert werden kann.

Betrachtet wird ein analytisches System (AS), das hinreichend oft differenzierbar sei:

$$\Sigma_{AS} : \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Eine dynamische Rückführung herkömmlicher Art sei durch die Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \\ \mathbf{u} &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \end{aligned}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \quad (3.2)$$

charakterisiert. Wie bereits angedeutet, soll bei der Modellfolgeregelung die Möglichkeit bestehen, auf die Zustandsvariablen des Modells zurückzugreifen, was einer Abbildung des Modells im Regler entspricht. Bei der exakten Linearisierung, wie auch bei der Störentkopplung, wird eine Anzahl von Integratoren vor die Eingänge geschaltet, wodurch das dynamische Rückführgesetz entsteht (Di Benedetto u. a. 1989, Senger 1996). Das resultierende Gesamtsystem entspricht dann mehreren nichtverzweigten Integratorketten. Da bei der Modellfolgeregelung die Ausgänge des Differenzsystems zu Null werden sollen, ist eine solche Erweiterung um eine Anzahl von Integratoren nicht notwendig, denn die Dynamik der Rückführgesetze ergibt sich nicht durch Vorschalten zusätzlicher Speicher für Energie/Masse vor die Eingänge des Systems, sondern lediglich aus dem im Regler implementierten Modell. Daher ist das Regelgesetz auch nicht, wie eine klassische dynamische Zustandsrückführung (Gl. 3.2), mit \mathbf{x} als den Zuständen des Systems darstellbar; es wird statisch oder quasistatisch ausfallen (vgl. Gl. 2.20). Es genügt also, das Regelgesetz als

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}, \{\bar{\mathbf{u}}\}), \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m \quad (3.3)$$

anzusetzen, wobei $\{\bar{\mathbf{u}}\} = (\bar{\mathbf{u}}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}, \dots)$ bedeutet. Das Regelgesetz zur Erzielung der exakten Modellfolge ergibt sich auf folgende Weise: Es wird zunächst das analytische System des Prozesses gemäß Gl. (3.1) betrachtet. Bildet man sukzessive die zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned} y_l &= h_l^{(0)}(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_l &= h_l^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &\vdots \\ y_l^{(k)} &= h_l^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

der Systemausgänge y_l , $1 \leq l \leq p$ und anschließend deren totale Differentiale, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} dy_l &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(0)}}{\partial x_i} dx_i \\ &\vdots \\ dy_l^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial u_j^{(\nu)}} du_j^{(\nu)} \quad , \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad . \quad (3.5)$$

Definiert man wie Di Benedetto u. a. (1989) einen (nichtdifferentiellen) Körper \mathcal{K} der rationalen Funktionen in $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}$ mit meromorphen Koeffizienten in \mathbf{x} sowie einen Vektorraum \mathcal{E} über \mathcal{K} , der von $d\mathbf{x}$ und $du_j^{(\nu)}$, $0 \leq \nu \leq n-1$ aufgespannt wird, dann stellt $dy_l^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$ einen Vektor in \mathcal{E} dar. Für den Vektorraum \mathcal{E} gilt die Zerlegung

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \oplus \mathcal{E}_u \quad , \quad (3.6)$$

mit den Unterräumen

$$\mathcal{E}_x = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx_i | 1 \leq i \leq n\} \quad \text{und} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{E}_u = \text{span}_{\mathcal{K}}\{du_j^{(\nu)} | 1 \leq j \leq n \wedge 0 \leq \nu \leq n-1\} \quad . \quad (3.8)$$

Für die weitere Beschreibung werden die Elemente $dy_l^{(k)}$ bzw. $y_l^{(k)}$ angeordnet:

$$dy_1, dy_2, \dots, dy_p, dy_1, dy_2, \dots, dy_p, \dots, dy_1^{(k)}, dy_2^{(k)}, \dots, dy_p^{(k)}, \dots \quad , \quad (3.9)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p, \dots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)}, \dots \quad . \quad (3.10)$$

Dieses Ranking der Ausgangssignalableitungen bzw. deren Differentiale bedeutet eine Anordnung, so daß $y_{l_1}^{(k_1)}$ dann und nur dann links von $y_{l_2}^{(k_2)}$ steht, wenn $k_1 < k_2$ oder $l_1 < l_2 \wedge k_1 = k_2$. Hierfür wird die Schreibweise $y_{l_1}^{(k_1)} \prec y_{l_2}^{(k_2)}$ verwendet.

Definition 3.1 (Cao und Zheng 1992)

$dy_l^{(k)}$ wird als u -linksabhängig bezeichnet, wenn

$$dy_l^{(k)} \in \mathcal{E}_x + \text{span}_{\mathcal{K}}\{dy_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\} \quad . \quad (3.11)$$

Andernfalls wird $dy_l^{(k)}$ als u -linksunabhängiger Vektor in (3.9) bezeichnet. Entsprechend wird ein Element $y_l^{(k)}$ aus (3.10) u -linksabhängig genannt, wenn Gl. (3.11) gilt bzw. u -linksunabhängig, wenn Gl. (3.11) nicht gilt. \square

Mit

$$L_u := \{y_l^{(k)} | y_l^{(k)} \text{ ist } u\text{-linksunabhängig}\} \quad (3.12)$$

gilt, daß wenn $y_l^{(k)}$ u -linksabhängig ist, d. h. $y_l^{(k)} \notin L_u$, dann existiert eine Funktion ϕ , so daß

$$y_l^{(k)} = \phi(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \quad . \quad (3.13)$$

Da bei realen Systemen Kausalität vorausgesetzt werden kann, tritt bei dem Ranking immer mindestens ein u -linksunabhängiges Element auf. Der Grad der zeitlichen Ableitung, die zur u -Linksunabhängigkeit führt, ist geeignet, das System zu charakterisieren. Wir bezeichnen ihn mit

$$\delta_l = \begin{cases} \infty & , \text{ wenn } y_l^{(k)} \notin L_u , \quad \forall k \geq 0 \\ \min\{k | y_l^{(k)} \in L_u\} & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad l = 1, \dots, p . \quad (3.14)$$

Es gilt:

Lemma 3.1

Wenn $\delta_l < \infty$ ist, dann existiert eine eindeutige Funktion $\psi_{l,j}$ mit $j = 0, \dots, m$, so daß

$$\begin{aligned} y_l^{(\delta_l)} &= \psi_{l,0}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\delta_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \psi_{l,j}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\delta_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \cdot u_j . \end{aligned} \quad (3.15)$$

□

Für das Ranking wird eine Permutation der Ausgangssignalindizes l_i , $i = 1, \dots, p$ in der Art vorgenommen, daß gilt:

$$\begin{aligned} &y_{l_1} \prec y_{l_2} \prec \dots \prec y_{l_p} \\ \wedge \quad &\delta_{l_1} \leq \delta_{l_2} \leq \dots \leq \delta_{l_p} \leq \infty \end{aligned} . \quad (3.16)$$

Mit

$$\sigma := \text{card}\{\delta_l | \delta_l < \infty, l = 1, \dots, p\} \quad (3.17)$$

bedeutet dies, daß $y_\alpha^{(\beta)} \in L_u$ nur möglich ist, wenn $\alpha \leq \sigma$. Gl. (3.15) läßt sich in Matrixform als

$$\boldsymbol{\Upsilon} := \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{u} \quad (3.18)$$

schreiben. Aufgrund der Definition der u -Linksunabhängigkeit entspricht die Kennziffer σ gerade dem Rang der Matrix $\boldsymbol{\psi}_1$, und somit kommt ihr eine besondere Bedeutung zu. Es existieren nämlich genau σ differentiell unabhängige Gleichungen verschiedener Ausgangsgrößen in \mathbf{u} über dem Grundkörper k der Zustandsvariablen. Damit bilden die Elemente $y_l^{(k)}$, für welche $\delta_l < \infty$ gemäß Gl. (3.14) ist, gerade eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k\langle \mathbf{y} \rangle/k$. Somit ist gezeigt, daß σ gerade dem von Fliess (1986) definierten differentiellen Rang des Systems entspricht. Vor dem Hintergrund des Satzes 2.1 ist damit die weitere Vorgehensweise vorgezeichnet. Wir komponieren ein analytisches Gesamtsystem

$$\Sigma_{AS} : \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n , \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_{\text{Prozeß}} - \mathbf{y}_{\text{Modell}} & \bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p . \end{aligned} \quad (3.19)$$

aus analytischem Prozeßmodell und gewünschtem Modell, indem der Zustandsvektor \mathbf{x} erweitert wird und als Ausgänge die paarweisen Differenzen zwischen den Prozeß- und

Modellausgängen gewählt werden. Zunächst setzen wir Prozeß- und Modelleingänge einander gleich:

$$\bar{u}_j = u_j , \quad j = 1, \dots, m . \quad (3.20)$$

Verfährt man mit diesem neuen Gesamtsystem genauso wie zuvor mit dem Prozeß, so ergibt sich eine neue Kenngröße σ^* , die dem differentiellen Rang ρ^* des Gesamtsystems entspricht. Damit können wir festhalten:

Satz 3.1

Es sei ein Prozeß und das gewünschte Modell durch ein analytisches System nach Gl. (3.1) darstellbar. Für diesen Prozeß und das Modell existiert eine Modellfolgeregelung mit einem regulären Regelgesetz nach Gl. (3.3) dann, wenn gilt: $\sigma = \sigma^*$. \square

Beweis:

Der Beweis dafür, daß die Bedingung in Satz 3.1 hinreichend ist, folgt unmittelbar aus Satz 2.1 in Abschnitt 2, kann aber auch konstruktiv erbracht werden. Dafür kann das Gesamtsystem nach Gl. (3.19) berücksichtigt werden. Es werden aber nicht Prozeß- und Modelleingänge gleichgesetzt, da nun \mathbf{u} bestimmt werden soll. Bildet man die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen des Gesamtsystems sowie deren totale Differentiale, so ergibt sich analog zu Gln. (3.4)–(3.5):

$$\begin{aligned} y_l &= h_l^{(0)}(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_l &= h_l^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \\ &\vdots \\ y_l^{(k)} &= h_l^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}, \bar{\mathbf{u}}^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

und

$$\begin{aligned} dy_l &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(0)}}{\partial x_i} dx_i \\ &\vdots \\ dy_l^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial u_j^{(\nu)}} du_j^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial \bar{u}_j^{(\nu)}} d\bar{u}_j^{(\nu)} , \quad k \geq 1 . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definiert man einen neuen (nichtdifferentiellen) Körper \mathcal{K} der rationalen Funktionen in $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}, \bar{\mathbf{u}}^{(n-1)}$ mit meromorphen Koeffizienten in \mathbf{x} sowie einen Vektorraum \mathcal{E} über \mathcal{K} , der von $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{u}^{(\nu)}$ und $d\bar{\mathbf{u}}^{(\nu)}$, $0 \leq \nu \leq n-1$ aufgespannt wird, dann stellt $dy_l^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$ einen Vektor in \mathcal{E} dar und es gilt analog zu dem obigen Fall für den Vektorraum \mathcal{E} die Zerlegung:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \oplus \mathcal{E}_u \oplus \mathcal{E}_{\bar{u}} , \quad (3.23)$$

mit den Unterräumen

$$\mathcal{E}_x = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx_i | 1 \leq i \leq n\} , \quad (3.24)$$

$$\mathcal{E}_u = \text{span}_{\mathcal{K}}\{du_j^{(\nu)} | 1 \leq j \leq n \wedge 0 \leq \nu \leq n-1\} \quad \text{und} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{E}_{\bar{u}} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{d\bar{u}_j^{(\nu)} | 1 \leq j \leq n \wedge 0 \leq \nu \leq n-1\} . \quad (3.26)$$

Für die Konstruktion der Rückführung kann man Definition 3.1 modifizieren:

Definition 3.2

$dy_l^{(k)}$ wird als u -linksabhängig bezeichnet, wenn

$$dy_l^{(k)} \in \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_{\bar{u}} + \text{span}_{\mathcal{K}}\{dy_{\alpha}^{(\beta)} | y_{\alpha}^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\} . \quad (3.27)$$

Andernfalls wird $dy_l^{(k)}$ als u -linksunabhängiger Vektor in (3.9) bezeichnet. Entsprechend wird ein Element $y_l^{(k)}$ aus (3.10) u -linksabhängig (bzw. u -linksunabhängig) genannt. \square

Damit führt das Auftreten von \bar{u}_j , $j = 1, \dots, m$, in $y_l^{(k)}$ nicht zur u -Linksunabhängigkeit. Ermittelt man nach der Bildungsvorschrift Gl. (3.14) die Invarianten δ_l , so erhält man nach Voraussetzung von Satz 3.1 analog zu Lemma 3.1 $\rho = \rho^*$ Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_l^{(\delta_l)} &= \psi_{l,0}(\mathbf{x}, \{\bar{\mathbf{u}}\}, y_{\alpha}^{(\beta)} | y_{\alpha}^{(\beta)} \prec y_l^{(\delta_l)} \wedge y_{\alpha}^{(\beta)} \in L_u) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \psi_{l,j}(\mathbf{x}, \{\bar{\mathbf{u}}\}, y_{\alpha}^{(\beta)} | y_{\alpha}^{(\beta)} \prec y_l^{(\delta_l)} \wedge y_{\alpha}^{(\beta)} \in L_u) \cdot u_j . \end{aligned} \quad (3.28)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\Upsilon = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{u} . \quad (3.29)$$

Mit einem Ranking gemäß Bedingung (3.16) kann man nun schreiben:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon \\ \mathbf{0}_{(m-\sigma) \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_0 \\ \mathbf{0}_{(m-\sigma) \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{u} , \quad (3.30)$$

mit $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m-\sigma \times m}$. \mathbf{R} ist so zu wählen, daß $\text{rang}[\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{R}^T]^T = m$ gilt und somit $[\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{R}^T]^T$ eine invertierbare $m \times m$ -Matrix darstellt. Dies ist stets möglich, da aufgrund der Definition der u -Linksunabhängigkeit $\text{rang}[\boldsymbol{\psi}_1] = \sigma$ stets erfüllt ist. Die Modellfolgeregelung verlangt nun, daß die paarweisen Differenzen der Ausgänge von Prozeß und Modell, also die Ausgänge des Gesamtsystems, unabhängig von $\bar{\mathbf{u}}$ zu Null werden. Daher werden in Gl. (3.30) Υ_j , $j = 1, \dots, \sigma$ und deren Ableitungen gleich Null gesetzt, wodurch sich die Gleichung stark vereinfacht. Die gewünschten Stellgrößen ergeben sich zu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\psi}_0 \\ \mathbf{0}_{(m-\sigma) \times 1} \end{bmatrix} . \quad (3.31)$$

\square

Mit den so ermittelten Stellgrößen ist gewährleistet, daß die paarweisen Differenzen der Ausgänge von Prozeß und Modell unabhängig von den Eingängen $\bar{\mathbf{u}}$ sind.

4 Graphentheoretische Betrachtung und Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden einige Überlegungen zur Übertragbarkeit der Ergebnisse aus Abschnitt 3 auf graphentheoretische Methoden angestellt. Anschließend werden Beispiele für die Bestimmung des Modellfolgeregelgesetzes präsentiert.

4.1 Graphentheoretische Betrachtung

Die in Satz 2.1 angegebene Bedingung kann ohne wesentliche Einschränkungen direkt in eine graphentheoretische Vorgehensweise übersetzt werden, wie mit Satz 2.3 gezeigt wurde. Damit ist die Existenz einer Modellfolgeregelung überprüfbar. Die Synthese des Regelgesetzes ist aber nur für eine Unterklasse der analytischen Systeme exakt anhand des Graphen möglich. Um dies zu zeigen, werden die Schritte zur Ermittlung des Regelgesetzes nach Abschnitt 3 betrachtet. Es handelt sich dabei um

- a) Differentiation und
- b) Invertierung der Matrix $[\psi_1^T \ R^T]^T$ aus Gl. (3.30).

Diese Operationen sind i.allg. nicht anschaulich am gewöhnlichen gewichteten Graphen (Wey 1996) nachzuvollziehen, da dieser nur die ersten partiellen Ableitungen der Zustandsvariablen enthält. Betrachtet man allgemein eine beliebige Ableitung einer Funktion $\xi(\Theta)$, $\Theta \in \mathbb{R}^n$, nach der Zeit:

$$\dot{\xi}(\Theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial \Theta_i} \dot{\Theta}_i \quad , \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(\Theta) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial \Theta_i} \dot{\Theta}_i \right)}{\partial \Theta_j} \dot{\Theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \xi(\Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right)}_a \dot{\Theta}_i \dot{\Theta}_j + \frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial \Theta_i} \frac{\partial \dot{\Theta}_i}{\partial \Theta_j} \dot{\Theta}_j \quad , \end{aligned} \quad (4.2)$$

so wird deutlich, daß nur die zeitlichen Ausgangssignalableitungen am Graphen direkt ablesbar sind, bei denen lediglich eine einmalige partielle Ableitung auftritt, die von \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{w} abhängt, da der Term a in Gl. (4.2) nicht am Graphen ablesbar ist. Geht man nämlich von einer Systemdarstellung in Zustandsmodellform aus, so entspricht ξ gerade y und Θ gerade \mathbf{x} . Das bedeutet, daß die l -te Ableitung nur dann anschaulich am Graphen rekonstruiert werden kann, wenn in allen Ableitungen niedrigerer Ordnung die partiellen Ableitungen nur Konstanten ergeben. Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt als Verallgemeinerung von

Gl. (4.2):

$$\xi^{(l)}(\Theta) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_l=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial \Theta_{i_1}}}_{a} \prod_{k=1}^{l-1} \underbrace{\frac{\partial \dot{\Theta}_{i_k}}{\partial \Theta_{i_{k+1}}}}_{b} \dot{\Theta}_{i_l} \right) . \quad (4.3)$$

Diese Ableitung ist nun sehr wohl am Graph ablesbar, da die partiellen Ableitungen a und b in Gl. (4.3) die Kantengewichte darstellen und die zeitlichen Ableitungen der Parameter Θ_i für ein gegebenes analytisches System bekannt sind. Nur für diesen Fall sind die für das Ranking notwendigen Ableitungen aus den Kantengewichten des Graphen bestimmbar. Es bleibt aber noch das Problem der Matrixinvertierung. Diese kann nicht mehr ohne weiteres graphentheoretisch erfolgen, wie auch schon in Senger (1996) dargelegt, und ist daher mit herkömmlichen Mitteln durchzuführen. Da nun aber die Ausgangs-signalableitungen, die zur u -Linksunabhängigkeit führen, ein Ranking zugrunde legen, kann von einem weiteren Hilfsmittel, den sog. Gröbner-Basen (Buchberger 1985, Pauer und Pfeifhofer 1988, Forsman 1991) Gebrauch gemacht werden. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des Gaußschen Eliminationsalgorithmus (Bronstein und Semendjajew 1991), die auch auf nichtlineare Systeme anwendbar ist und als Ergebnis bei oben definiertem Ranking gerade die gesuchten Stellgrößen liefert. Ein derartiges Vorgehen wird in diesem Bericht jedoch zunächst nicht weiter verfolgt.

4.2 Anwendungsbeispiele

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Modellfolgeregelung wird im folgenden anhand einiger Beispiele verdeutlicht. Zunächst betrachten wir den naheliegenden Fall, daß ein nichtlinearer Prozeß einem linearen Modell folgen soll.

Beispiel 4.1

Der Prozeß sei gegeben zu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 x_3 - x_2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad , \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned} \quad (\text{B 4.1-1})$$

und das lineare Modell als

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_M &= \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}} \quad , \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_M \quad . \end{aligned} \quad (\text{B 4.1-2})$$

Für das Gesamtsystem mit den Ausgängen $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{Prozess}} - \mathbf{y}_{\text{Modell}}$ ergibt sich mit $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ der differentielle Rang zu $\rho^* = 2$. Dieser stimmt mit dem differentiellen Rang ρ des Prozesses überein. Nun sei die Bedingung $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ nicht mehr vorausgesetzt. Fortlaufendes zeitliches Ableiten der Ausgänge des Gesamtsystems unter Beachtung des Rankings sowie der u -Linksunabhängigkeit als Abbruchbedingung liefert:

$$\dot{y}_1 = x_3 u_1 - \bar{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 1 \quad , \quad (\text{B 4.1-3})$$

$$\dot{y}_2 = x_1^2 x_3 - x_2 - x_6 \quad (\text{B 4.1-4})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= 2x_1 x_3^2 u_1 + x_1^2 (x_2^3 + u_2) - \bar{u}_2 \\ &= 2x_1 x_3^2 \frac{\dot{y}_1 + \bar{u}_1}{x_3} + x_1^2 (x_2^3 + u_2) - x_1^2 x_3 + x_2 - \bar{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 2 . \end{aligned} \quad (\text{B 4.1-5})$$

Eine Permutation der Indizes ist in diesem Beispiel nicht nötig. Setzt man die Ausgangssignalableitungen, die zur u -Linksunabhängigkeit führen sowie deren höhere Ableitungen gleich Null, so ergibt sich die Darstellung:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -\bar{u}_1 \\ 2x_1 x_3 \bar{u}_1 + x_1^2 x_2^3 - x_1^2 x_3 + x_2 - \bar{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (\text{B 4.1-6})$$

und daraus

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ -2x_1 x_3 \bar{u}_1 - x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3 - x_2 + \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B 4.1-7})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_1}{x_3} \\ -\frac{2x_3 \bar{u}_1}{x_1} - x_2^3 + x_3 - \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{\bar{u}_2}{x_1^2} \end{bmatrix} . \quad (\text{B 4.1-8})$$

Gl. (B 4.1-8) eingesetzt in Gln. (B 4.1-3), (B 4.1-5) ergibt $\dot{y}_1 = 0$ und $\ddot{y}_2 = 0$.

Ist die Bedingung aus Satz 2.1 verletzt, so kann nicht mehr ohne weiteres eine Modellfolge- regelung bestimmt werden. Insbesondere wenn Prozeß und Modell den gleichen differentiellen Rang aufweisen, dann ist die Bedingung aus Satz 2.1 notwendig, wie in Abschnitt 2 erwähnt ist. Um zu zeigen, was für diesen Fall bei der oben vorgestellten Vorgehensweise auftritt, wird ein weiteres Beispiel angeführt. Prozeß und Modell weisen darin den gleichen differentiellen Rang ρ auf, das Gesamtsystem mit den Differenzausgängen jedoch einen differentiellen Rang $\rho^* > \rho$. Damit darf in dem angestrebten Beispiel kein Rückführgesetz zur Modellfolge existieren.

Beispiel 4.2

Gegeben sei der Prozeß

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_1 + x_3x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad , \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}\tag{B 4.2-1}$$

sowie das Modell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_M &= \begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \quad , \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_M \quad ,\end{aligned}\tag{B 4.2-2}$$

die beide den differentiellen Rang $\rho = 1$ aufweisen. Das nach obigem Muster gebildete Gesamtsystem weist für $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ den differentiellen Rang $\rho^* = 2$ auf. Ohne die Bedingung $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ ergeben die Ausgangssignalableitungen:

$$\dot{y}_1 = x_1 + x_3x_4 - x_7 - \bar{u}_2 \quad ,\tag{B 4.2-3}$$

$$\dot{y}_2 = x_2^2 - x_6 \quad ,\tag{B 4.2-4}$$

$$\ddot{y}_1 = x_2^2 + x_4^2 u_1 + x_3 u_2 - \bar{u}_1 - \dot{\bar{u}}_2 \Rightarrow \delta_1 = 2 \quad ,\tag{B 4.2-5}$$

$$\ddot{y}_2 = 2x_2(x_1 + x_3x_4) - x_7 - \bar{u}_2 \quad ,\tag{B 4.2-6}$$

$$\begin{aligned}y_2^{(3)} &= 2(x_1 + x_3x_4)^2 + 2x_2(x_2^2 + x_4^2 u_1 + x_3 u_2) - \bar{u}_1 - \dot{\bar{u}}_2 \Big|_{\ddot{y}_1=0} \\ &= 2(x_1 + x_3x_4)^2 + (2x_2 - 1)(\bar{u}_1 + \dot{\bar{u}}_2) \Rightarrow \delta_2 = \infty \quad .\end{aligned}\tag{B 4.2-7}$$

Die Aussage $\delta_2 = \infty$ folgt aus der Tatsache, daß durch weiteres Ableiten von Gl. (B 4.2-7) mit $\dot{x}_2 = x_1 + x_3x_4$ und $\frac{d}{dt}(x_1 + x_3x_4) = \bar{u}_1 + \dot{\bar{u}}_2$ keine u -Linksunabhängigkeit erreicht werden kann. Es gilt also $\sigma = 1$. Damit gilt für den Rang der Matrix $\text{rang}[\psi_1] = 1$. Es kann also nur erreicht werden, daß ein Ausgang des Differenzsystems zu Null wird, also nur ein Ausgang des Prozesses dem Modell folgt, denn es existieren keine weiteren differentiell algebraisch unabhängigen Gleichungen für den zweiten Ausgang.

Als praxisrelevante Anwendung soll ein weiteres Beispielsystem dienen: Für einen hydraulischen Differentialzylinder sei eine Modellfolgeregelung mit einem linearen Modell gesucht. Es handelt sich bei dem Prozeß um einen hydraulischen Translationsantrieb des dreiachsigem elastischen Roboters im Fachgebiet MSRT (Bernzen 1995). Der Antrieb ist in

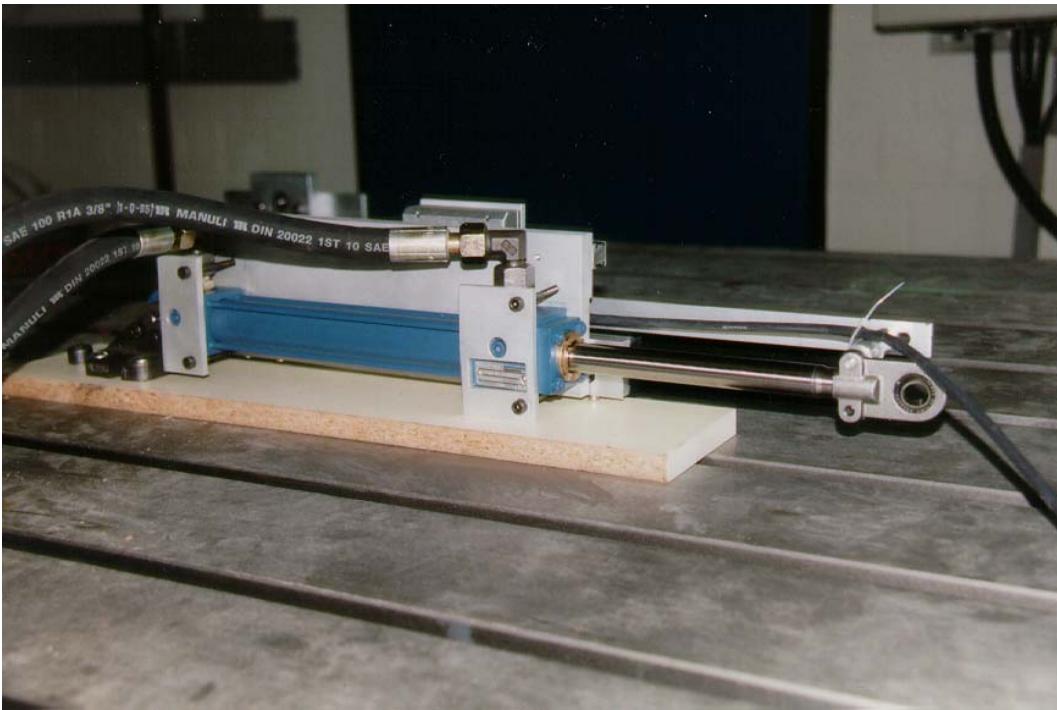


Abbildung 4.1: Hydraulischer Differentialzylinder

Bild 4.1 dargestellt. Die Beschreibung des Zylinders ist aus physikalischen Betrachtungen abgeleitet und in den Parametern mit dem realen System abgeglichen (Riege 1995). Die Systembeschreibung des Prozesses besteht aus zwei Teilmodellen, die vorzeichenabhängig von der Stellgröße u geschaltet werden. Dies ist aufgrund der unterschiedlichen Kolbenflächen des Differentialzylinders notwendig. Die vollständige Prozeßbeschreibung ist in Anhang A ausführlich dargestellt. Im Gegensatz zu dieser Darstellung soll in dem nächsten Beispiel eine vereinfachte Beschreibung Verwendung finden.

Beispiel 4.3

Das im Anhang A dargestellte System wird in folgender Weise modifiziert: Es wird die angreifende Kraft F_L als (zu entkoppelnder) Eingang z betrachtet. Die Abhängigkeit der bewegten Ölvolume V_A, V_B von der Kolbenposition wird ebenso vernachlässigt, wie die Reibkraft F_R , die aus den Zylinderdrücken x_3 und x_4 angenähert werden kann und der am Kolben angreifenden Kraft zugeschlagen wird. Weiterhin wird die Dynamik des Ventilsteuerkolbens vernachlässigt. Wie schon erwähnt, erfolgt die Prozeßdarstellung in zwei Teilbeschreibungen. Die Volumenströme Q_A und Q_B werden wie folgt in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Stellgröße dargestellt.

$$\left. \begin{array}{l} Q_A = B_Q \sqrt{p_0 - x_3} u \\ Q_B = -B_Q \sqrt{x_4} u \end{array} \right\} \quad \forall u \geq 0 \quad , \quad (\text{B 4.3-1})$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_A = B_Q \sqrt{x_3} u \\ Q_B = -B_Q \sqrt{p_0 - x_4} u \end{array} \right\} \quad \forall u < 0 \quad . \quad (\text{B 4.3-2})$$

(B 4.3-3)

Darin stellt B_Q den Durchflußkoeffizienten dar. Weiterhin ist gegenüber der Darstellung in Anhang A der Tankdruck vernachlässigt worden. Mit diesen Voraussetzungen ist der Prozeß gegeben durch:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_{\text{ges}}} \left[\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A - z \right] \\ \dot{x}_3 = \frac{E_{\text{Öl},A}(x_3)}{V_A} \left(-Ax_2 + B_Q \sqrt{p_0 - x_3} u \right) \\ \dot{x}_4 = \frac{E_{\text{Öl},B}(x_4)}{V_B} \left(\frac{A}{\varphi} x_2 - B_Q \sqrt{x_4} u \right) \\ y = x_1 \end{array} \right\} \quad \forall u \geq 0 \quad , \quad (\text{B 4.3-4})$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_{\text{ges}}} \left[\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A - z \right] \\ \dot{x}_3 = \frac{E_{\text{Öl},A}(x_3)}{V_A} \left(-Ax_2 + B_Q \sqrt{x_3} u \right) \\ \dot{x}_4 = \frac{E_{\text{Öl},B}(x_4)}{V_B} \left(\frac{A}{\varphi} x_2 - B_Q \sqrt{p_0 - x_4} u \right) \\ y = x_1 \end{array} \right\} \quad \forall u < 0 \quad . \quad (\text{B 4.3-5})$$

Es handelt sich um ein kausales System, daher ist $\rho \geq 1$. Weiterhin gilt: $\rho \leq m = 1 \rightarrow \rho = 1$. Das Modell wird vorgegeben als ein P_{T_2} -System mit allgemeinen Polen P_1 und P_2 .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{M}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P_1 P_2 & -(P_1 + P_2) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{M}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad , \quad (\text{B 4.3-6}) \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{M}} \quad . \end{aligned}$$

Das Modell hat ebenfalls den differentiellen Rang $\bar{\rho} = 1$. In der dritten zeitlichen Ableitung des Ausgangs des Differenzsystems aus Prozeß und Modell tritt u auf, was zur u -Linksunabhängigkeit führt ($\delta_1 = 1 \rightarrow \sigma = \rho^* = 1$). Es existiert also ein Modellfolgeregelgesetz. Für die beiden Fälle $u \geq 0$ und $u < 0$ lauten die Regelgesetze

dann bei einer Vorgehensweise wie in den ersten Beispielen:

$$u = \frac{\left(\bar{y}^{(3)} + \frac{A^2 x_2 E_{\text{Öl},A}}{m_{\text{ges}} V_A} + \frac{A^2 x_2 E_{\text{Öl},B}}{m_{\text{ges}} \varphi^2 V_B} + \frac{\dot{z}}{m_{\text{ges}}} \right)}{\left(\frac{AE_{\text{Öl},A} B_Q \sqrt{p_0 - x_3}}{m_{\text{ges}} V_A} + \frac{AE_{\text{Öl},B} B_Q \sqrt{x_4}}{m_{\text{ges}} \varphi V_B} \right)} \quad \forall u \geq 0 \quad , \quad (\text{B 4.3-7})$$

$$u = \frac{\left(\bar{y}^{(3)} + \frac{A^2 x_2 E_{\text{Öl},A}}{m_{\text{ges}} V_A} + \frac{A^2 x_2 E_{\text{Öl},B}}{m_{\text{ges}} \varphi^2 V_B} + \frac{\dot{z}}{m_{\text{ges}}} \right)}{\left(\frac{AE_{\text{Öl},A} B_Q \sqrt{x_3}}{m_{\text{ges}} V_A} + \frac{AE_{\text{Öl},B} B_Q \sqrt{p_0 - x_4}}{m_{\text{ges}} \varphi V_B} \right)} \quad \forall u < 0 \quad , \quad (\text{B 4.3-8})$$

mit der Definition der Ölelastizitäten gemäß Anhang A und der Substitution

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(3)} &= P_1 P_2 (P_1 + P_2) x_5 + ((P_1 + P_2)^2 - P_1 P_2) x_6 \\ &\quad - (P_1 + P_2) \bar{u} + \dot{\bar{u}} \end{aligned} . \quad (\text{B 4.3-9})$$

Es bleibt anzumerken, daß durch die zweigeteilte Prozeßbetrachtung nicht das Vorzeichen der Stellgröße, sondern nur die Verstärkung umgeschaltet wird. Dies erkennt man daran, daß die Stellgrößen sich für unterschiedliche Vorzeichen von u nur durch den Nenner unterscheiden, der aber in beiden Fällen einen positiven Wert ergibt. Es kann also nicht zu umschaltbedingtem "Ventilrattern" kommen.

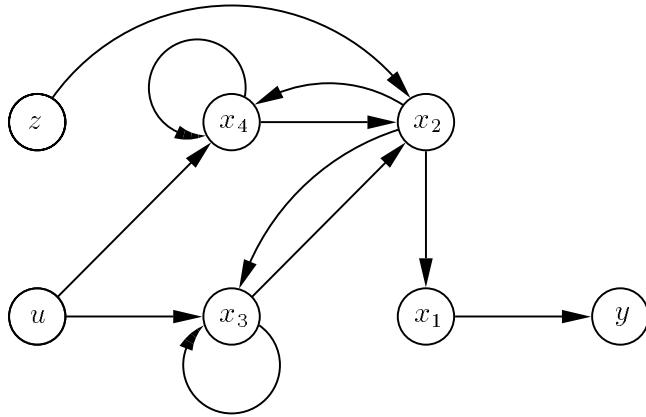


Abbildung 4.2: Graph des Servoantriebs

Für das dritte Beispiel kann das Regelgesetz auch am Graphen ermittelt werden. Dazu betrachten wir den in Bild 4.2 abgebildeten Graphen des Prozesses. Da die partielle Ableitung $\partial \dot{x}_1 / \partial x_2 = 1$ konstant ist, kann die dritte Ableitung des Ausgangs durch Anwendung der Gleichung (4.3) als

$$y^{(3)} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_3=1}^n \left(\frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial \Theta_{i_1}} \prod_{k=1}^2 \frac{\partial \dot{\Theta}_{i_k}}{\partial \Theta_{i_{k+1}}} \dot{\Theta}_{i_3} \right) \quad (4.4)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 + \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w} \dot{w} \quad (4.5)$$

geschrieben werden. Die partiellen Ableitungen sind bei Kenntnis des Graphen als Kantengewichte ebenso bekannt, wie die Ableitungen der Zustandsvariablen aus dem gegebenen analytischen System des Prozesses. Für lineare Systeme sind die partiellen Ableitungen der Zustandsvariablen immer konstant. Daher können für lineare Systeme stets alle Ausgangssignalableitungen durch Anwendung von Gl. (4.3) bestimmt werden. Da beim Differenzieren $(y - \bar{y})^{(3)} = y^{(3)} - \bar{y}^{(3)}$ gilt, kann somit die dritte Ableitung des Differenzsystems aus Beispiel 4.3 vollständig am Graphen bestimmt werden. Durch Umstellen der Gleichung $y^{(3)} - \bar{y}^{(3)} = 0$ nach u ergeben sich die in Beispiel 4.3 angegebenen Regelgesetze.

5 Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht behandelt das Problem der Modellfolgeregelung für nichtlineare analytische Systeme. Zur Problembeschreibung sowie Systemanalyse werden differential-algebraische Methoden verwendet. Das Problem der Modellfolgeregelung wird in diesem Bericht auf das Störsignalentkopplungsproblem zurückgeführt. Damit ist es ohne weiteres möglich, Parallelen zu differentialgeometrischen und graphentheoretischen Bedingungen zu finden, wie in Abschnitt 2 gezeigt ist.

Da die Analyse nicht Selbstzweck ist, sondern das Ziel die Synthese eines Regelgesetzes ist, wird eine systematische Vorgehensweise zur Berechnung der Modellfolgeregelung benötigt. Diese ist in Abschnitt 3 dargestellt. Sie basiert auf der Anordnung der Ausgangssignalableitungen nach vorgegebenen Regeln, dem Ranking. In Abschnitt 3 ist zudem gezeigt, daß der Begriff der u -Linksabhängigkeit es ermöglicht, eine differentielle Transzendenzbasis der Ausgangssignalableitungen zu beschreiben und damit unmittelbar auf den differentiellen Rang des Systems führt. Mit diesen Mitteln ist es möglich, das Modellfolgeregelgesetz zu bestimmen.

Diese Vorgehensweise zur Synthese des Regelgesetzes ist unter bestimmten Voraussetzungen auf eine graphentheoretische Vorgehensweise exakt übertragbar. Die notwendigen Bedingungen sind in Abschnitt 4 beschrieben. Anhand einiger Beispiele ist die Vorgehensweise des Rankings illustriert. Das praktische Beispiel des Differentialzylinders zeigt zudem die Anwendbarkeit auf den Fall eines hydraulischen Servoantriebs. Anhand des Differentialzylinders wird auch die graphentheoretische Vorgehensweise erklärt.

Ausblick

Da die graphentheoretische Vorgehensweise restriktiven Bedingungen unterliegt, ist in Zukunft die Möglichkeit und Brauchbarkeit einer graphentheoretischen Näherung für die Modellfolgeregelung zu untersuchen, wie es bereits in dem Fall der näherungsweisen graphentheoretischen Linearisierung geschehen ist.

Eine besonders interessante Perspektive bietet darüber hinaus die Anwendung von Gröbner-Basen zur Synthese nichtlinearer Regelungsgesetze. Insbesondere wird in Zukunft die Möglichkeit untersucht, mit Gröbner-Basen eine differentielle Transzendenzbasis nichtlinearer Polynomsysteme zu berechnen, indem die Differentialgleichungen auf nichtdifferentielle Gleichungen zurückgeführt werden, und damit die Werkzeuge der kommutativen Algebra anwendbar sind.

6 Literatur

- Atiyah, M. F. und I. G. Macdonald.** 1969. *Introduction to commutative algebra*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Bernzen, W.** 1995. *Der Versuchsträger „hydraulisch angetriebener elastischer Roboter“*. Forschungsbericht 21/95. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew.** 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart: Teubner.
- Buchberger, B.** 1985. Gröbner Bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional System Theory: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*, hg. von N. K. Bose. 184–229. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Cao, L. und Y.-F. Zheng.** 1992. Disturbance decoupling via dynamic feedback. *International Journal of Systems Science* 23(5). 683–694.
- Di Benedetto, M. D. und J. W. Grizzle.** 1992. Qualitative aspects of asymptotic nonlinear model matching. *3rd IFAC symposium on nonlinear control systems design NOLCOS '92*. Tahoe City, USA. 543–545.
- Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle und C. H. Moog.** 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 27. 658–672.
- Di Benedetto, M. D. und A. Isidori.** 1986. The matching of nonlinear models via dynamic state feedback. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 24(5). 1063–1075.
- Fliess, M.** 1986. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control: Lecture Notes in Control and Information Science*, hg. von S. Engell. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1990. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC 35(9). 994–1001.
- Forsman, K.** 1991. Applications of Gröbner Bases to nonlinear systems. *European Control Conference ECC '91*. Grenoble, France. 164–169.
- Hirschorn, R. M.** 1979. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC 24(6). 855–865.

- Huijberts, H. J. C., H. Nijmeijer und L. L. M. Van der Wegen.** 1992. Dynamic disturbance decoupling for nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control* 30(2). 336–349.
- Moog, C. H., A. M. Perdon und G. Conte.** 1991. Model matching and factorization for nonlinear systems: a structural approach. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 29(4). 769–785.
- Okutani, T. und K. Furuta.** 1984. Model matching of nonlinear systems. *Preprints of the 9th IFAC World Congress*, Volume IX. Budapest, Hungary. 168–172.
- Pauer, F. und M. Pfeifhofer.** 1988. The theory of Gröbner Bases. *L'Enseignement Mathematique* 34. 215–232.
- Riege, B.** 1995. *Zur Modellbildung und Regelung eines hydraulisch angetriebenen elastischen Roboters*. Diplomarbeit (unveröffentlicht). Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Rudolph, J.** 1992. A differential algebraic approach to the classical right model matching problem. *3rd IFAC symposium on nonlinear control systems design NOLCOS '92*. Tahoe City, USA. 112–117.
- Rudolph, J. und E. Delaleau.** 1993. Nonlinear right model matching by proper compensation or quasi-static feedback. *European Control Conference ECC '93*. Groningen, Netherlands. 1528–1533.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1996. *QLS mit linearer Eigendynamik*. Forschungsbericht 18/96. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Senger, M.** 1996. *Zur Störgrößenentkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Forschungsbericht 16/96. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Silverman, L. M.** 1969. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC 14(3). 270–276.
- Singh, S. N.** 1981. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC 26(2). 595–598.
- Van der Woude, J. W.** 1991. A graph-theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 4. 33–40.

- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht 10/92. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Wey, T.** 1993. *Zur graphentheoretischen Charakterisierung des Ranges nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Forschungsbericht 04/93. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Wey, T.** 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 556. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Wey, T. und F. Svaricek.** 1995. Disturbance decoupling for non-linear structured systems. *Applied Mathematics and Computer Science* 5(3). 547–559.

A Modell des Hydraulikdifferentialzylinders

Das hier dargestellte Systemmodell gibt das Verhalten eines hydraulischen Differentialzylinders wieder und wurde bereits von Riege (1995) ausführlich diskutiert. Es werden folgende Zustandsvariablen gewählt:

- x_1 : Weg des Zylinderkolbens,
- x_2 : Geschwindigkeit des Zylinderkolbens,
- x_3 : Druck in Zylinderkammer A,
- x_4 : Druck in Zylinderkammer B,
- x_5 : Weg des Steuerkolbens im Servoventil und
- x_6 : Geschwindigkeit des Steuerkolbens im Servoventil.

Zudem wird die Gesamtersatzmasse m_{ges} durch Kolbenmasse m_K und Ölvolume in den Zylinderkammern bestimmt:

$$m_{\text{ges}}(x_1) = m_K + \rho_{\text{Öl}}(V_A(x_1) + V_B(x_1)) . \quad (\text{A.1})$$

V_A und V_B sind die von der Zylinderkolbenposition abhängigen Ölvolume und setzen sich zusammen aus dem Volumen des Öls in den Zylinderkammern und den Ölvolume V_{LA} und V_{LB} in den Leitungen und ergeben sich bei einem Kolbenhub H zu

$$V_A(x_1) = V_{LA} + \left(\frac{H}{2} + x_1\right) A , \quad (\text{A.2})$$

$$V_B(x_1) = V_{LB} + \left(\frac{H}{2} - x_1\right) \frac{A}{\varphi} . \quad (\text{A.3})$$

Darin stellt φ das Flächenverhältnis von Kolbenfläche A zur Kolbenringfläche des Differentialzylinders dar. Die Reibkraft F_R im Hydraulikzylinder wird durch die drei Anteile viskose, coulombsche und Haftreibung modelliert:

$$F_R(x_2) = F_V x_2 + \text{sign}(x_2) \left(F_C + F_H \exp\left(-\frac{|x_2|}{c_H}\right) \right) . \quad (\text{A.4})$$

Die Volumenströme Q_A und Q_B berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} Q_A(x_3, x_5) &= B_Q \left[\text{sg}(x_5) \text{sign}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|} \right. \\ &\quad \left. - \text{sg}(-x_5) \text{sign}(x_3 - p_T) \sqrt{|x_3 - p_T|} \right] , \\ Q_B(x_4, x_5) &= B_Q \left[\text{sg}(-x_5) \text{sign}(p_0 - x_4) \sqrt{|p_0 - x_4|} \right. \\ &\quad \left. - \text{sg}(x_5) \text{sign}(x_4 - p_T) \sqrt{|x_4 - p_T|} \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ 0 & \forall x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

und dem Durchflußkoeffizient B_Q . Die Elastizitätsmoduln werden folgendermaßen berechnet:

$$E_{\text{Öl,A}}(x_3) = 0,5E_{\text{Öl,max}} \log_{10} \left(100 \left(0,9 \frac{x_3}{p_{\max}} + 0,03 \right) \right) , \quad (\text{A.7})$$

$$E_{\text{Öl,B}}(x_4) = 0,5E_{\text{Öl,max}} \log_{10} \left(100 \left(0,9 \frac{x_4}{p_{\max}} + 0,03 \right) \right) . \quad (\text{A.8})$$

Mit u als normierter Steuerspannung am Servoventil resultiert folgendes Modell aus den Kräftegleichgewichten für Zylinderkolben und Steuerkolben:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{\text{ges}}} \left[\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A - F_R(x_2) - F_L \right] , \\ \dot{x}_3 &= \frac{E_{\text{Öl,A}}(x_3)}{V_A(x_1)} \left(-Ax_2 + Q_A(x_3, x_5) \right) , \\ \dot{x}_4 &= \frac{E_{\text{Öl,B}}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4, x_5) \right) , \\ \dot{x}_5 &= x_6 , \\ \dot{x}_6 &= \omega_0^2 \left(u - \frac{2D}{\omega_0} x_6 - x_5 \right) , \\ y &= x_1 . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$