

# **Zur experimentellen Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters**

Marco Antonio Arteaga Pérez und Britta Riege

Forschungsbericht Nr. 3/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Modellbildung elastischer Roboter kann durch die Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen durchgeführt werden. Da es schwer ist, die Parameter des Modells genau zu berechnen, bietet es sich an, diese experimentell zu bestimmen. Der vorliegende Bericht beschreibt die Modellbildung des zweiachsigen Roboters des Fachgebiets und die experimentelle Bestimmung der Parameter des resultierenden Modells.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Modellbildung</b>	<b>2</b>
2.1 Koordinaten und Transformationsmatrizen . . . . .	3
2.2 Bestimmung der Trägheitsmatrix $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ . . . . .	5
2.3 Berechnung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ . . . . .	13
2.4 Bestimmung des Coriolis- und Zentrifugalkraftvektors . . . . .	14
2.5 Motordynamik . . . . .	14
<b>3 Experimentelle Parameterbestimmung</b>	<b>17</b>
<b>4 Simulationsergebnisse</b>	<b>27</b>
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>33</b>
<b>6 Literaturverzeichnis</b>	<b>34</b>
<b>Anhang</b>	<b>36</b>
<b>A Analytisches Modell</b>	<b>36</b>
<b>B Experimentell bestimmte Parameter</b>	<b>43</b>

# Nomenklatur

## Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A}_i$	:	Homogene Transformationsmatrix für das $i$ -te Drehgelenk eines elastischen Roboters
$\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$	:	Erweiterte Trägheitsmatrix
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	:	Hilfsmatrix zur Bestimmung von $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
$\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{ij}, \mathbf{C}_{ijk}, \dots$	:	Hilfsmatrizen zur Modellbildung elastischer Roboter
$\mathbf{F}_i, \mathbf{D}_{ij}, \mathbf{N}_{ij}$	:	
$\mathbf{E}_i$	:	Homogene Transformationsmatrix für das $i$ -te Glied eines elastischen Roboters
$\mathbf{D}$	:	Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder
$\boldsymbol{\delta}(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	:	Gravitationsvektor
$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	:	Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor
$\mathbf{H}(\mathbf{q})$	:	Trägheitsmatrix
$\mathbf{K}$	:	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_e$	:	Modellmatrix
$\mathbf{K}_m$	:	Verstärkungsmatrix zur Umrechnung von Eingangsspannung in verallgemeinerte Eingangsmomente
$\mathbf{q}(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$\mathbf{q}_e(t)$	:	Erweiterter Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
${}^j \mathbf{r}_i$	:	Position eines Punktes im $i$ -ten Koordinatensystem hinsichtlich des $j$ -ten Koordinatensystems
$\mathbf{T}_i$	:	Homogene Transformationsmatrix zur Umrechnung eines Ortsvektors vom $i$ -ten ins ortsfeste Koordinatensystem
${}^j \mathbf{T}_i$	:	Homogene Transformationsmatrix zur Umrechnung eines Ortsvektors vom $i$ -ten ins $j$ -te Koordinatensystem
${}^j \tilde{\mathbf{T}}_i, \hat{\mathbf{T}}_i$	:	Transformationsmatrizen
$\boldsymbol{\tau}(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Momente
$\boldsymbol{\theta}(t)$	:	Vektor verallgemeinerter starrer Koordinaten
$\boldsymbol{\theta}_d(t)$	:	Soll-Bahn-Vektor verallgemeinerter starrer Koordinaten
$\mathbf{u}(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Kräfte
$\mathbf{U}_i(t)$	:	Partielle Ableitung der Matrix $\mathbf{A}_i$ nach $\theta_i$

## Skalare Größen

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	:	Deformationen in die $x$ -, $y$ - und $z$ -Richtungen eines elastischen Balkens
$\epsilon$	:	Dehnung eines Punktes eines elastischen Balkens
$\epsilon_v$	:	Durch DMS-Sensoren gemessene Spannung eines Punktes eines elastischen Balkens
$EI_i$	:	Biegesteifigkeit des $i$ -ten elastischen Gliedes
$E_G$	:	Gleitmodul
$I$	:	Trägheitsmoment
$J_{m_i}$	:	Trägheitsmoment des $i$ -ten Motors
$k$	:	Argument eines diskreten Zeitsignals
$K_{\epsilon ij}$	:	Verstärkung zur Berechnung der Deformation des $i$ -ten Gliedes durch die Spannung eines DMS-Sensors
$K_{m_i}$	:	Drehmomentkonstante des $i$ -ten Motors
$K_{b_i}$	:	Spannungskonstante des $i$ -ten Motors
$K_{pi}, K_{di}$	:	Reglerverstärkung
$l_i$	:	Länge des $i$ -ten elastischen Gliedes ohne Deformation
$m$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$m_i$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten des $i$ -ten Gliedes
$M_i$	:	Masse des $i$ -ten Gliedes
$M_{ij}, M_{ijk}$	:	Masse eines Teilkörpers des $i$ -ten Gliedes
$n$	:	Anzahl verallgemeinerter starrer Koordinaten
$\phi_{ij}$	:	$j$ -te Eigenfunktion des $i$ -ten elastischen Gliedes
$\phi'_{ij}$	:	Erste Ableitung der $j$ -ten Eigenfunktion des $i$ -ten elastischen Gliedes nach $x_i$
$\rho_i$	:	Gleichmäßig verteilte Masse des $i$ -ten elastischen Gliedes
$r_i$	:	Übersetzungsverhältnis des $i$ -ten Motors
$R_i$	:	Anschlußwiderstand des $i$ -ten Motors
$\sigma_{ij}$	:	Elastische Koordinate des erweiterten Modells
$T$	:	Abtastzeit
$\theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}$	:	Rotatorische Komponenten einer homogenen Transformation durch die Deformation eines elastischen Balkens ( $i$ -tes Glied)
$\theta_{x_{ij}}, \theta_{y_{ij}}, \theta_{z_{ij}}$	:	Rotatorische Komponenten einer homogenen Transformation durch die Deformation eines elastischen Balkens ( $i$ -tes Glied, $j$ -ter Modus)
$\omega_i$	:	$i$ -te Eigenfrequenz eines elastischen Balkens
$U_i$	:	Eingangsspannung des $i$ -ten Motors
$v_{ij}, w_{ij}, z_{ij}$	:	Modellparameter
$x_{si}, y_{si}, z_{si}$	:	Koordinaten des Schwerpunktes eines Gliedes bezüglich des $i$ -ten Koordinatensystems

## Operatoren

$c_i, s_i$	:	$\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)$
$c_{ij}, s_{ij}$	:	$\cos(\theta_i + \theta_j), \sin(\theta_i + \theta_j)$
$\triangleq$	:	Definition
$dm$	:	Differentielles Massenelement
$sp(\cdot)$	:	Spur einer Matrix
$\max(\cdot)$	:	Maximaler Wert
$\min(\cdot)$	:	Minimaler Wert

## Abkürzungen

DMS	:	Dehnungsmeßstreifen
-----	---	---------------------

## Vektoren- und Matrizenelemente

$b_{ijk}$	:	Element der Matrix $\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$
$c_{ijk}$	:	Element der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
$D_{ij}$	:	Element der Matrix $\mathbf{D}$
$\delta_{ij}$	:	Element des Vektors $\boldsymbol{\delta}$
$\dot{\delta}_{ij}$	:	Element des Vektors $\dot{\boldsymbol{\delta}}$
$h_{ijk}$	:	Element der Matrix $\mathbf{H}(\mathbf{q})$
$k_{ij}$	:	Element der Matrix $\mathbf{K}$
$q_{ij}$	:	Element des Vektors $\mathbf{q}$
$\theta_i$	:	Element des Vektors $\boldsymbol{\theta}$
$\theta_{di}$	:	Element des Vektors $\boldsymbol{\theta}_d$ (Soll-Wert der starren Koordinaten)

# 1 Einleitung

Zur Regelung elastischer Roboter ist es vorteilhaft, ein gutes Modell zu haben. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Modellstruktur vorzugeben und deren Parameter zu identifizieren (Schwarz 1991). Andererseits kann ein elastischer Roboter unter der Annahme kleiner Deformationen analytisch modelliert werden (Book 1984, Yuan u. a. 1993, Artega Pérez 1995b). Ein Nachteil besteht allerdings darin, daß die Eigenformen der elastischen Glieder bekannt sein müssen. Um dieses Problem zu lösen, wird das sogenannte *assumed mode shapes* Verfahren in der Regel eingesetzt, das die Eigenformen eines ähnlichen Systems benutzt Meirovitch (1967, 1975). Weitere Schwierigkeiten ergeben sich daraus, daß sowohl die Eigenfrequenzen der Glieder als auch deren Strukturdämpfung sich schwer berechnen lassen. Aus diesen Gründen bietet sich eine experimentelle Ermittlung der Parameter an.

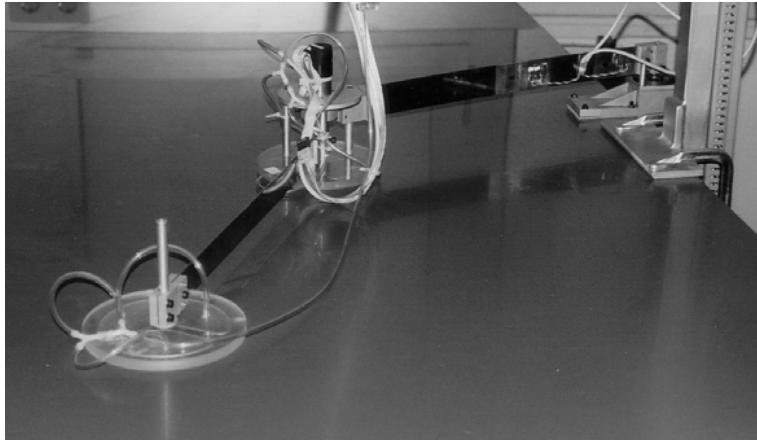
Der vorliegende Bericht beschäftigt sich mit der Modellbildung des zweiachsigen Roboters des Fachgebiets. Dieser Roboter besteht aus zwei in der Ebene angeordneten elastischen Gliedern. Zuerst wird er nach dem Euler–Lagrange Verfahren analytisch modelliert, so daß das resultierende Modell eine Funktion unbekannter Parameter ist.

Nach der analytischen Modellbildung werden die unbekannten Parameter experimentell bestimmt. Um dieses Ziel zu erreichen, stehen als Ausgänge des Handhabungssystems vier durch das dreidimensionale Positionsmeßsystem *DynaSight* gemessene Punkte und die Dehnung an der Basis jedes Gliedes zur Verfügung.

Eine Beschreibung des zweiachsigen elastischen Roboters und dessen analytische Modellbildung ist in Abschnitt 2 erläutert. Hierbei wird angenommen, daß weder Elastizität noch Spiel in den Gelenken auftritt. In Abschnitt 3 wird eine Methode zur experimentellen Parameterbestimmung vorgeschlagen und in Abschnitt 4 werden einige Simulationsergebnisse des Modells vorgestellt und mit gemessenen Daten verglichen. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick in Abschnitt 5 schließen den Forschungsbericht ab.

## 2 Mathematische Modellbildung

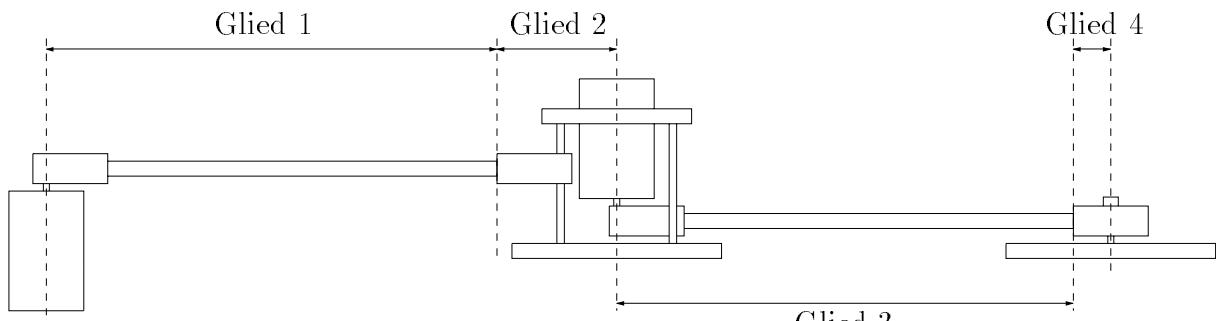
Die Modellbildung des zweiachsigen elastischen Roboters des Fachgebiets (Bild 2.1) wird nach dem Euler–Lagrange–Verfahren durchgeführt (Book 1984, Yuan u. a. 1993, Artega Pérez 1995b). Eine komplette Beschreibung des Roboters ist in Bai (1996a) zu finden.



**Bild 2.1:** Zweiachsiger elastischer Roboter

Da es sich um einen ebenen Roboter handelt, ist der Gravitationsvektor  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  gleich Null. Im folgenden wird die Berechnung der einzelnen Systemmatrizen und -vektoren für den speziellen Anwendungsfall vorgenommen.

Das Verfahren zur Modellbildung ist so aufgebaut, daß prinzipiell nur Glieder berücksichtigt werden, die vollkommen elastisch sind. Im vorliegenden Fall gibt es zwei Glieder, die jeweils aus zwei starren und einem elastischen Teilstück bestehen. Obwohl die Vernachlässigung der starren Teilstücke die Modellbildung deutlich vereinfachen würde, wäre nicht zu erwarten, daß sich die Dynamik des Roboters bei dieser Vereinfachung noch ausreichend gut beschreiben lassen würde. Aus diesem Grunde wird der zweiachsige elastische Roboter in vier Glieder aufgeteilt. Diese Aufteilung kann Bild 2.2 entnommen werden.

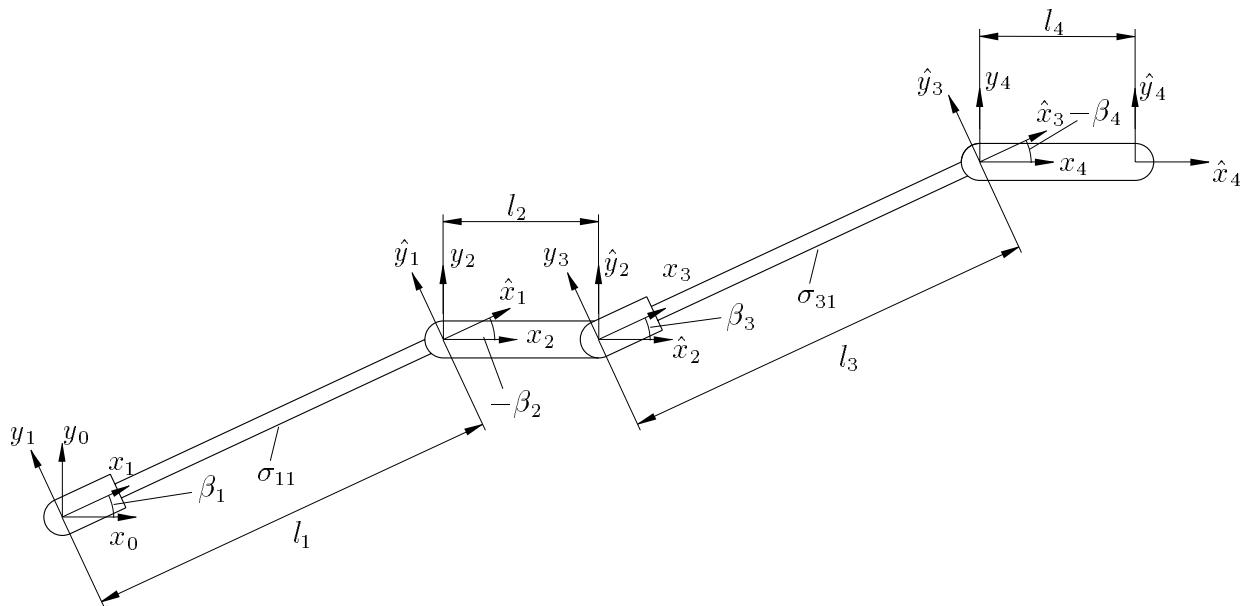


**Bild 2.2:** Einteilung des Roboters in vier Glieder

Hier stellen die Glieder 1 und 3 die vollkommen elastischen Glieder dar. Die Glieder 2 und 4 sind starr. Obwohl die Glieder 1 und 3 noch jeweils in einen starren und einen elastischen Teil aufgeteilt werden könnten, wird diese Konfiguration gewählt, da die Glieder als vollständig elastisch betrachtet werden können, denn der erste Abschnitt der jeweiligen Eigenform ist Null. Aus Gründen der verfahrensbedingten Systematik (Arteaga Pérez 1995b) werden diese starren Glieder zunächst wie die beiden anderen behandelt und formal mit einer Drehachse und einer zugehörigen Drehkoordinate versehen, die später einfach vernachlässigt werden können. Die Vorgehensweise wird an entsprechender Stelle weiter unten näher erläutert.

## 2.1 Koordinaten und Transformationsmatrizen

Alle vier Glieder werden nun so betrachtet, als könnten sie um ihre Drehachsen rotieren, was in der Praxis nur auf die beiden elastischen Glieder zutrifft.



**Bild 2.3:** Skizze zur Festlegung der Koordinaten

Bild 2.3 zeigt die Bezeichnung der Koordinatensysteme. Wie ebenfalls in Bild 2.3 zu sehen ist, werden bei der Modellbildung zunächst sechs Koordinaten berücksichtigt, vier starre und zwei elastische. Der erweiterte Vektor  $\mathbf{q}_e$  der verallgemeinerten Koordinaten ergibt sich somit zu

$$\mathbf{q}_e = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \sigma_{11}, \sigma_{31}]^T. \quad (2.1)$$

Es ist zu beachten, daß der „echte“ Vektor der verallgemeinerten Koordinaten aus den oben dargelegten Gründen lautet:

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \delta_{11}, \delta_{21}]^T, \quad (2.2)$$

wobei gilt:

$$\beta_1 = \theta_1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \theta_2, \quad \beta_4 = 0, \quad \sigma_{11} = \delta_{11}, \quad \sigma_{31} = \delta_{21} . \quad (2.3)$$

Um die Kinematik jedes Punktes  $\mathbf{p}_i$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_i$  auf dem Roboter zu bestimmen, müssen die Transformationsmatrizen zur Umrechnung ins ortsfeste Koordinatensystem bestimmt werden. Die Transformationsmatrix zur Umrechnung vom  $i$ -ten ins ortsfeste Koordinatensystem ergibt sich zu (Arteaga Pérez 1995a):

$${}^0\mathbf{T}_i \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{T}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i \stackrel{\Delta}{=} \hat{\mathbf{T}}_{i-1} \mathbf{A}_i \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{i-1} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1, \quad (2.6)$$

mit

$${}^0\mathbf{r}_i = {}^0\mathbf{T}_i^i \mathbf{r}_i. \quad (2.7)$$

Um diese Matrizen  $\mathbf{T}_i$  zu bestimmen, müssen die einzelnen Transformationsmatrizen  $\mathbf{E}_1$  bis  $\mathbf{E}_4$  für die Glieder sowie  $\mathbf{A}_1$  bis  $\mathbf{A}_4$  für die Drehgelenke berechnet werden. Die Transformationsmatrizen für die Glieder ergeben sich nach (Arteaga Pérez 1995a) näherungsweise zu:

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z_i} & \theta_{y_i} & l_i + \delta_{x_i} \\ \theta_{z_i} & 1 & -\theta_{x_i} & \delta_{y_i} \\ -\theta_{y_i} & \theta_{x_i} & 1 & \delta_{z_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

In dem hier vorliegenden Fall erhält man die folgende Transformationsmatrix für das erste Glied:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z_1} & 0 & l_1 \\ \theta_{z_1} & 1 & 0 & \delta_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

wobei angenommen wird, daß es keine Deformation in  $x$ - und  $z$ -Richtung und keine Torsion in  $x$ - und  $y$ -Richtung gibt. Es gilt

$$\delta_{z_1} = \frac{d\phi_{11}(l_1)}{dx_1} \sigma_{11} = \phi'_{11}(l_1) \sigma_{11} \equiv \phi'_{11}(l_1) \delta_{11} \quad (2.10)$$

und

$$\delta_{y_1} = \phi_{11}(l_1) \sigma_{11}. \quad (2.11)$$

Die Matrix für das Glied 2 ist durch

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

gegeben. In Analogie folgen die beiden anderen Matrizen zu

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z_3} & 0 & l_3 \\ \theta_{z_3} & 1 & 0 & \delta_{y_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

mit

$$\theta_{z_3} = \frac{d\phi_{31}(l_3)}{dx_3} \sigma_{31} = \phi'_{31}(l_3) \sigma_{31} \equiv \phi'_{31}(l_3) \delta_{21} \quad (2.14)$$

und

$$\delta_{y_3} = \phi_{31}(l_3) \sigma_{31}, \quad (2.15)$$

sowie für das vierte Glied:

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Die Matrizen zur Transformation an den Drehgelenken ergeben sich jeweils unter Zuhilfenahme der Drehwinkel zu (Canudas de Wit u. a. 1996):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 & 0 & 0 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 & 0 & 0 \\ \sin \beta_4 & \cos \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Daraus folgt die Kenntnis der Koordinaten aller Punkte  $\mathbf{p}_i$  im ortsfesten Koordinatensystem.

## 2.2 Bestimmung der Trägheitsmatrix $\mathbf{H}(\mathbf{q})$

Nachdem die Kinematik der Punkte auf dem Roboter bekannt ist, kann die Trägheitsmatrix berechnet werden. Zunächst wird die Trägheitsmatrix  $\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$  des erweiterten Systems bestimmt, und dann die „echte“ Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ , die sich durch Vernachlässigung der beiden „Pseudo-Koordinaten“  $\beta_2$  und  $\beta_4$  ergibt, angegeben. Die erweiterte Trägheitsmatrix  $\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$  setzt sich aus vier Untermatrizen zusammen:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\theta\theta}(\mathbf{q}_e) & \mathbf{B}_{\theta\sigma}(\mathbf{q}_e) \\ \mathbf{B}_{\theta\sigma}^T(\mathbf{q}_e) & \mathbf{B}_{\sigma\sigma}(\mathbf{q}_e) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Diese Matrix hat für vier Drehwinkel ( $\beta_1$  bis  $\beta_4$ ) und zwei elastische Koordinaten ( $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{31}$ ) die Dimension  $6 \times 6$ . Sie ist mit ihren einzelnen Elementen in Bild 2.4 dargestellt.

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{31}$
$\beta_1$	$b_{1010}$	$b_{1020}$	$b_{1030}$	$b_{1040}$	$b_{1011}$	$b_{1031}$
$\beta_2$	$b_{2010}$	$b_{2020}$	$b_{2030}$	$b_{2040}$	$b_{2011}$	$b_{2031}$
$\beta_3$	$b_{3010}$	$b_{3020}$	$b_{3030}$	$b_{3040}$	$b_{3011}$	$b_{3031}$
$\beta_4$	$b_{4010}$	$b_{4020}$	$b_{4030}$	$b_{4040}$	$b_{4011}$	$b_{4031}$
$\sigma_{11}$	$b_{1110}$	$b_{1120}$	$b_{1130}$	$b_{1140}$	$b_{1111}$	$b_{1131}$
$\sigma_{31}$	$b_{3110}$	$b_{3120}$	$b_{3130}$	$b_{3140}$	$b_{3111}$	$b_{3131}$

Bild 2.4: Erweiterte Trägheitsmatrix  $\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$

Bedingt durch die Tatsache, daß  $\beta_2 = \beta_4 = 0$  gilt, reduziert sich die Dimension der Trägheitsmatrix auf  $4 \times 4$ . Die relevanten Elemente von  $\mathbf{B}(\mathbf{q}_e)$  sind durch Kästchen gekennzeichnet. So ergibt sich die „echte“ Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\theta\theta}(\mathbf{q}) & \mathbf{H}_{\theta\delta}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{H}_{\theta\delta}^T(\mathbf{q}) & \mathbf{H}_{\delta\delta}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} & (2.19) \\ &= \begin{bmatrix} h_{1010} & h_{1020} & h_{1011} & h_{1021} \\ h_{2010} & h_{2020} & h_{2011} & h_{2021} \\ h_{1110} & h_{1120} & h_{1111} & h_{1121} \\ h_{2110} & h_{2120} & h_{2111} & h_{2121} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1010} & b_{1030} & b_{1011} & b_{1031} \\ b_{3010} & b_{3030} & b_{3011} & b_{3031} \\ b_{1110} & b_{1130} & b_{1111} & b_{1131} \\ b_{3110} & b_{3130} & b_{3111} & b_{3131} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Indizes ist wie folgt: Der erste Index bezeichnet die Nummer des Gliedes, der zweite die Nummer der Koordinate, wobei starre Koordinaten durch eine Null gekennzeichnet werden. Entsprechendes gilt für den dritten und vierten Index. So beschreibt z. B. das Matrixelement  $h_{1120}$  die Beziehung zwischen der ersten elastischen Koordinate des ersten Glieds und der starren (Winkel-) Koordinate des zweiten Glieds<sup>1</sup>. Die Berechnung der einzelnen Elemente ist in Arteaga Pérez (1995b) beschrieben: Für die Matrix  $\mathbf{H}_{\theta\theta}(\mathbf{q})$  erfolgt die Berechnung der Elemente durch:

$$b_{\alpha 0 h 0} = \sum_{i=\max(\alpha, h)}^n \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_{\alpha-1} \mathbf{U}_\alpha^\alpha \tilde{\mathbf{T}}_i) \mathbf{F}_i (\hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h^h \tilde{\mathbf{T}}_i)^T \right\}, \quad (2.20)$$

wobei

$${}^h \mathbf{T}_i \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{A}_{h+1} \mathbf{E}_{h+1} \mathbf{A}_{h+2} \mathbf{E}_{h+2} \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i \quad (2.21)$$

<sup>1</sup>  $h_{\alpha 0 \beta 0}$  anstatt  $h_{\alpha \beta}$  ist als Indizierung geeigneter, wenn verallgemeinerte elastische Koordinaten verwendet werden.

$${}^h\tilde{\mathbf{T}}_i \triangleq \mathbf{E}_h \mathbf{A}_{h+1} \mathbf{E}_{h+1} \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i \quad (2.22)$$

$$\mathbf{U}_h \triangleq \frac{\partial \mathbf{A}_h}{\partial q_{h0}} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}_i \triangleq \mathbf{C}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \left( (\mathbf{C}_{ij} + \mathbf{C}_{ij}^T) + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} \mathbf{C}_{ikj} \right) = \mathbf{F}_i^T \quad (2.24)$$

$$\mathbf{C}_i \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [x_i, y_i, z_i, 1]^T [x_i, y_i, z_i, 1] dm \quad (2.25)$$

$$\mathbf{C}_{ij} \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [x_i, y_i, z_i, 1]^T [\phi_{xij}, \phi_{yij}, \phi_{zij}, 0] dm \quad (2.26)$$

$$\mathbf{C}_{ikj} \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [\phi_{xik}, \phi_{yik}, \phi_{zik}, 0]^T [\phi_{xij}, \phi_{yij}, \phi_{zij}, 0] dm = \mathbf{C}_{ijk}^T \quad (2.27)$$

gilt. Hierbei sind nur die Elemente der erweiterten Trägheitsmatrix zu berechnen, die in Gl. (2.19) auftreten. Die Berechnung der Matrizen  $\mathbf{C}_i$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$  und  $\mathbf{C}_{ikj}$  wird später in diesem Abschnitt durchgeführt. So ergibt sich zum Beispiel das Element  $b_{1010}$  zu:

$$\begin{aligned} b_{1010} &= \sum_{i=1}^4 \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_i) \mathbf{F}_i (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_i)^T \right\} \\ &= \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_1) \mathbf{F}_1 (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_1)^T \right\} + \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_2) \mathbf{F}_2 (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_2)^T \right\} \\ &\quad + \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_3) \mathbf{F}_3 (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_3)^T \right\} + \text{sp} \left\{ (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_4) \mathbf{F}_4 (\hat{\mathbf{T}}_0 \mathbf{U}_1^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_4)^T \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\mathbf{H}_{\theta\delta}(\mathbf{q})$  lässt sich durch

$$b_{h0\alpha\beta} = \gamma_{h\alpha} + \sum_{i=\max(\alpha+1, h)}^n \text{sp} \left\{ \left( \hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h {}^h \tilde{\mathbf{T}}_i \right) \mathbf{F}_i (\mathbf{T}_\alpha \mathbf{N}_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{T}_i)^T \right\} \quad (2.29)$$

berechnen, wobei

$$\gamma_{h\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha < h \\ \text{sp} \left\{ \left( \hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h {}^h \tilde{\mathbf{T}}_\alpha \right) \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\alpha^T \right\} & \text{wenn } \alpha \geq h \end{cases}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha\beta} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{z\alpha\beta} & \theta_{y\alpha\beta} & \phi_{x\alpha\beta} \\ \theta_{z\alpha\beta} & 0 & -\theta_{x\alpha\beta} & \phi_{y\alpha\beta} \\ -\theta_{y\alpha\beta} & \theta_{x\alpha\beta} & 0 & \phi_{z\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} \triangleq \mathbf{C}_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{m_\alpha} \sigma_{\alpha k} \mathbf{C}_{\alpha k \beta} \quad (2.31)$$

ist.  $\mathbf{H}_{\delta\delta}(\mathbf{q})$  ist durch

$$b_{hk\alpha\beta} = \eta_{h\alpha} + \sum_{i=\max(h, \alpha)+1}^n \text{sp} \left\{ \left( \mathbf{T}_h \mathbf{N}_{hk} {}^h \tilde{\mathbf{T}}_i \right) \mathbf{F}_i (\mathbf{T}_\alpha \mathbf{N}_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{T}_i)^T \right\} \quad (2.32)$$

zu beschreiben, wobei

$$\eta_{h\alpha} = \begin{cases} \text{sp} \left\{ \mathbf{T}_h \mathbf{C}_{hk\beta} \mathbf{T}_h^T \right\} & \text{wenn } h = \alpha \\ \text{sp} \left\{ \left( \mathbf{T}_h \mathbf{N}_{hk}^h \mathbf{T}_\alpha \right) \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\alpha^T \right\} & \text{wenn } h < \alpha \\ \text{sp} \left\{ \left( \mathbf{T}_\alpha \mathbf{N}_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{T}_h \right) \mathbf{D}_{hk} \mathbf{T}_h^T \right\} & \text{wenn } h > \alpha \end{cases} . \quad (2.33)$$

Beim Berechnen der Trägheitsmatrix durch Anwendung der Gln. (2.20) bis (2.33) ergibt sich diese als Funktion von starren und elastischen Koordinaten. Im vorliegenden Forschungsbericht wird die Näherung  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \approx \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$  angenommen (De Luca und Siciliano 1993).

Für die Bestimmung der Matrizen  $\mathbf{C}_i$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$  und  $\mathbf{C}_{ijk}$  müssen für jedes der vier Glieder die Trägheitsmomente bezüglich der jeweiligen Drehachse berechnet werden. Die Matrix  $\mathbf{C}_i$  ergibt sich für jedes Glied zu (Fu u. a. 1989)

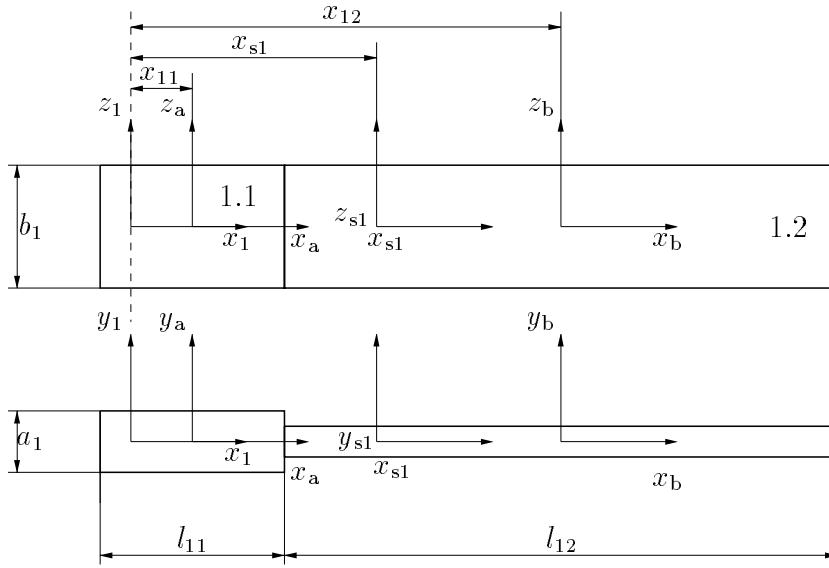
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i &= \int_{\text{Glied}_i} [x_i, y_i, z_i, 1]^T [x_i, y_i, z_i, 1] dm \quad (2.34) \\ &= \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & I_{xy} & I_{xz} & M_i x_{si} \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & I_{yz} & M_i y_{si} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) & M_i z_{si} \\ M_i x_{si} & M_i y_{si} & M_i z_{si} & M_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Trägheitsmomente für alle vier Glieder erfolgt nach folgendem Schema:

- Berechnung der Trägheitsmomente der einzelnen Körper jedes Gliedes bezogen auf ihre Schwerpunkte
- Ermittlung des Schwerpunktes des gesamten Körpers
- Zusammenfassung zum Gesamtträgheitsmoment bezogen auf den Gesamtschwerpunkt
- Ermittlung des Gesamtträgheitsmomentes bezogen auf die Drehachse

Es ist zu erwähnen, daß immer Symmetrie bezüglich der Längsachse des Roboters vorausgesetzt wird. Das erste Glied ist schematisch in Bild 2.5 dargestellt. Es hat die Gesamtlänge

$$l_1 = l_{11} + l_{12} \quad (2.35)$$



**Bild 2.5:** Zur Berechnung der Trägheitsmomente von Glied 1

und die Gesamtmasse

$$M_1 = M_{11} + M_{12}. \quad (2.36)$$

Die Numerierung der beiden Einzelkörper geht aus Bild 2.5 hervor. Die Schwerpunktkoordinatensysteme dieser Einzelkörper werden mit den Indizes a bzw. b bezeichnet. Bei der  $z_1$ -Achse handelt es sich um die Drehachse. Unter der Annahme, daß die Dicke des Körpers 1.2 vernachlässigt werden kann, und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß aus Symmetriegründen gilt:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad (2.37)$$

ergibt sich die Matrix  $C_1$  zu

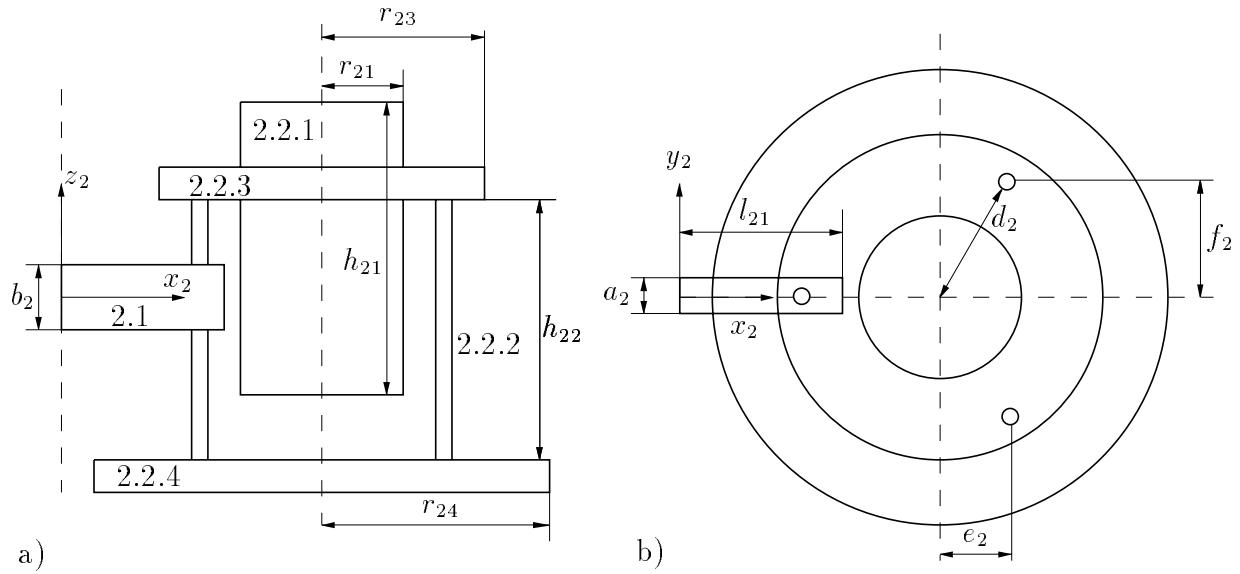
$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{c_{11}} & 0 & 0 & M_1 x_{s1} \\ 0 & I_{c_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{c_{13}} & 0 \\ M_1 x_{s1} & 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Die einzelnen Parameter der Matrix befinden sich im Anhang A.

Das zweite Glied besteht aus sieben einzelnen Körpern (vgl. Bild 2.6), von denen drei zylindrische Körper identisch sind (Körper 2.2.2). Körper 2.2.1 bezeichnet den Elektromotor. Das Glied 2 besitzt die Gesamtmasse

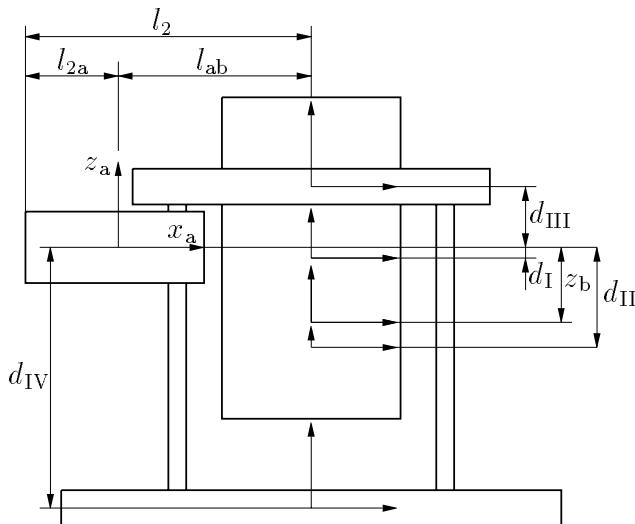
$$M_2 = M_{21} + M_{22} = M_{21} + M_{221} + 3 M_{222} + M_{223} + M_{224}. \quad (2.39)$$

Zunächst werden die Trägheitsmomente  $I_{xa}$ ,  $I_{ya}$  und  $I_{za}$  von Körper 2.1 bezüglich seines Schwerpunktkoordinatensystems  $(x_a, y_a, z_a)$  bestimmt. Anschließend erfolgt die Berechnung der Einzelmomente  $I_{xbi}$ ,  $I_{ybi}$  und  $I_{zbi}$  der Sechs anderen Körper, auch jeweils auf



**Bild 2.6:** Glied 2 a) Seitenansicht; b) Draufsicht

Ihre Schwerpunkte bezogen. Vernachlässigt wird dabei die Dicke von Körper 2.2.2. Eine weitere Besonderheit ergibt sich für die drei mit der Nummer 2.2.2 bezeichneten Körper, die sich nicht in einer Achse mit den anderen Körpern befinden. Ihre Trägheitsmomente werden erst über die Abstände  $d_2$ ,  $e_2$  und  $f_2$  (s. Bild 2.6 b)) auf die Motorachse umgerechnet.

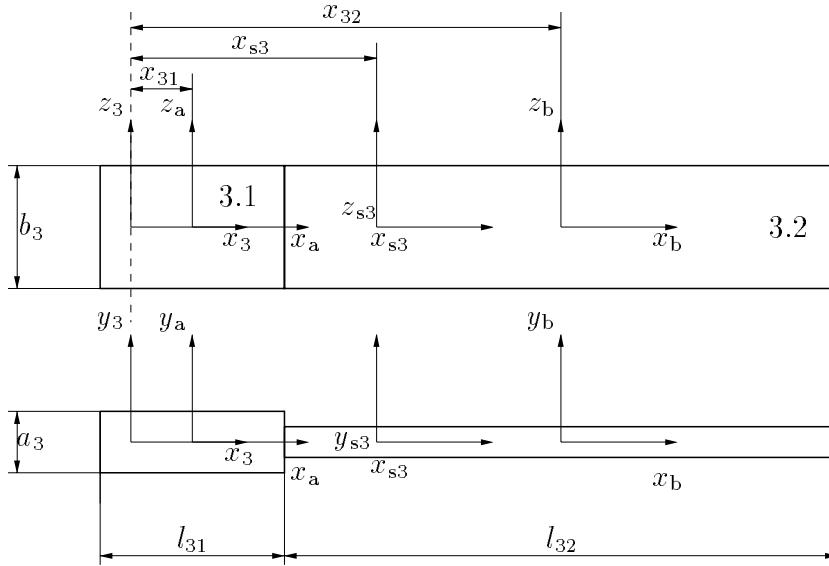


**Bild 2.7:** Glied 2 – Zur Lage der Koordinatensysteme

Anschließend müssen alle Trägheitsmomente in das Koordinatensystem ( $x_b$ ,  $y_b$ ,  $z_b$ ) transformiert werden. Mit diesem Koordinatensystem ist der Schwerpunkt der Sechs Körper (ohne Körper 2.1) bezeichnet. Dies geschieht anhand der vertikalen Abstände ( $d_I$  bis  $d_{IV}$ ) ihrer Schwerpunktkoordinatensysteme von diesem Koordinatensystem, die in Bild 2.7 verdeutlicht sind. Schließlich wird das Gesamtträgheitsmoment des Gliedes 2 bezüglich des

Koordinatensystems  $(x_2, y_2, z_2)$  (Drehachse) berechnet. Das Endergebnis lautet:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} I_{c_{21}} & 0 & 0 & M_2 x_{s2} \\ 0 & I_{c_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{c_{23}} & 0 \\ M_2 x_{s2} & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$



**Bild 2.8:** Zur Bestimmung der Trägheitsmomente für Glied 3

Die Vorgehensweise für das dritte Glied, das in Bild 2.8 dargestellt ist, ist ähnlich wie bei dem ersten Glied, so daß sich die Matrix  $\mathbf{C}_3$ , bezogen auf das Koordinatensystem der Drehachse  $(x_3, y_3, z_3)$ , zu

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} I_{c_{31}} & 0 & 0 & M_3 x_{s3} \\ 0 & I_{c_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{c_{33}} & 0 \\ M_3 x_{s3} & 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

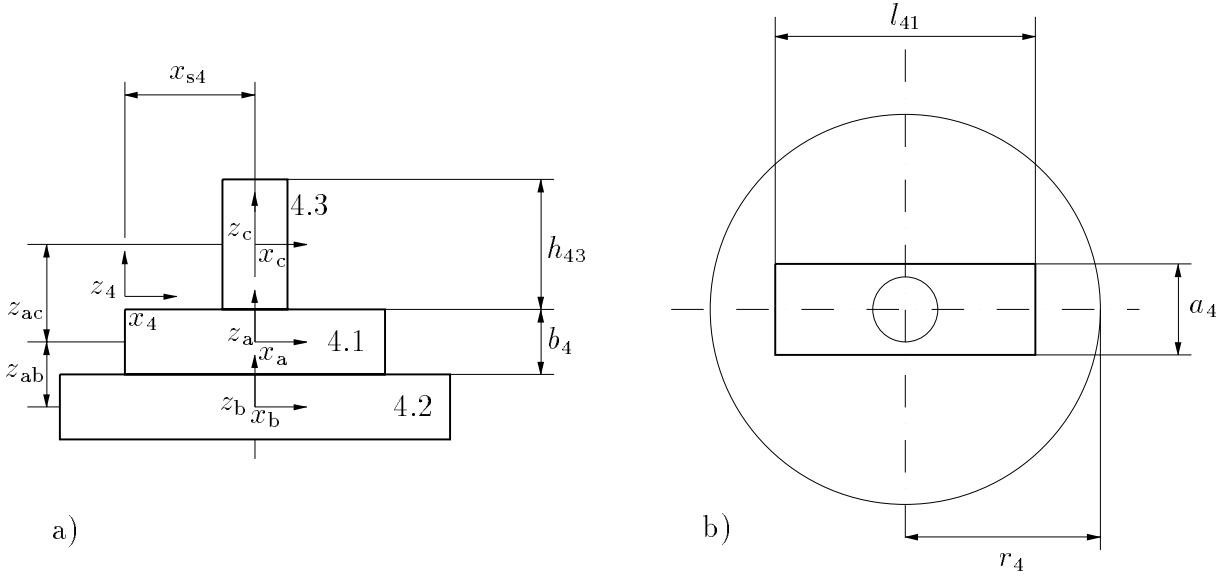
ergibt.

Glied 4 besteht nunmehr aus drei Körpern, die in Bild 2.9 dargestellt sind. Seine Gesamtmasse ergibt sich zu

$$M_4 = M_{41} + M_{42} + M_{43}. \quad (2.42)$$

Nach den Berechnungen der Einzelmomente ergibt sich die Trägheitsmatrix  $\mathbf{C}_4$  zu:

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} I_{c_{41}} & 0 & 0 & M_4 x_{s4} \\ 0 & I_{c_{42}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{c_{43}} & 0 \\ M_4 x_{s4} & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$



**Bild 2.9:** Glied 4 a) Seitenansicht; b) Draufsicht

Zur Berechnung von  $\mathbf{F}_1$  nach Gl. (2.24) bzw. nach

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_1 + \sigma_{11} ((\mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{11}^T) + \sigma_{11} \mathbf{C}_{111}) = \mathbf{F}_1^T, \quad (2.44)$$

fehlen weiterhin die Matrizen  $\mathbf{C}_{11}$  und  $\mathbf{C}_{111}$ . Sie ergeben sich zu

$$\mathbf{C}_{11} = \int_{\text{Glied}_1} [x_1, y_1, z_1, 1]^T [\phi_{x_{11}}, \phi_{y_{11}}, \phi_{z_{11}}, 0] dm. \quad (2.45)$$

Durch die Tatsache, daß die Deformationen in  $x$ - und  $z$ -Richtung gleich Null sind, vereinfacht sich Gl. (2.45) zu

$$\mathbf{C}_{11} = \int_{\text{Glied}_1} [x_1, y_1, z_1, 1]^T [0, \phi_{y_{11}}, 0, 0] dm = \int_{\text{Glied}_1} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \phi_{y_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & z_1 \phi_{y_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & y_1 \phi_{y_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{y_{11}} & 0 & 0 \end{bmatrix} dm \quad (2.46)$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \int_{\text{Glied}_1} x_1 \phi_{y_{11}} dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\text{Glied}_1} \phi_{y_{11}} dm & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Die Vereinfachung von Gl. (2.46) auf Gl. (2.47) ergibt sich aus Symmetriegründen. Die Matrix  $\mathbf{C}_{111}$  berechnet sich ähnlich zu

$$\mathbf{C}_{111} = \int_{\text{Glied}_1} [\phi_{x_{11}}, \phi_{y_{11}}, \phi_{z_{11}}, 0]^T [\phi_{x_{11}}, \phi_{y_{11}}, \phi_{z_{11}}, 0] dm \quad (2.48)$$

und vereinfacht sich entsprechend:

$$\mathbf{C}_{111} = \int_{\text{Glied}_1} [0, \phi_{y_{11}}, 0, 0]^T [0, \phi_{y_{11}}, 0, 0] dm = \int_{\text{Glied}_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{y_{11}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dm \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{111} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\text{Glied}_1} \phi_{y_{11}}^2 dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{111} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ganz analog ergeben sich die Matrizen  $\mathbf{C}_{31}$  und  $\mathbf{C}_{311}$ , die für die Gleichung

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{C}_3 + \sigma_{31} ((\mathbf{C}_{31} + \mathbf{C}_{31}^T) + \sigma_{31} \mathbf{C}_{311}) = \mathbf{F}_3^T \quad (2.50)$$

benötigt werden, zu:

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & \int_{\text{Glied}_3} x_3 \phi_{y_{31}} dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\text{Glied}_3} \phi_{y_{31}} dm & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & w_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

und

$$\mathbf{C}_{311} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\text{Glied}_3} \phi_{y_{31}}^2 dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Die Berechnung der Parameter  $w_{i1}$ ,  $v_{i1}$  und  $z_{i11}$  wird experimentell durchgeführt und ist in Abschnitt 3 beschrieben.

## 2.3 Berechnung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  berechnet sich zu:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{31} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

mit den Elementen (Arteaga Pérez 1995b):

$$k_{11} = \int_{\text{Glied}_1} EI_{y1} \frac{d^2 \phi_{y_{11}}}{dx_1^2} \frac{d^2 \phi_{y_{11}}}{dx_1^2} dx_1, \quad (2.54)$$

sowie

$$k_{31} = \int_{\text{Glied}_3} EI_{y3} \frac{d^2 \phi_{y_{31}}}{dx_3^2} \frac{d^2 \phi_{y_{31}}}{dx_3^2} dx_3. \quad (2.55)$$

Aus den Gln. (2.54) und (2.55) zusammen mit den Gln. (2.46), (2.49), (2.51) und (2.52) ergeben sich die folgenden Parameter:

$$w_{i1} = \rho_i \int_0^{l_i} x_i \phi_{y_{i1}}(x_i) dx_i \quad (2.56)$$

$$v_{i1} = \rho_i \int_0^{l_i} \phi_{y_{i1}}(x_i) dx_i \quad (2.57)$$

$$z_{i1} = \rho_i \int_0^{l_i} \phi_{y_{i1}}^2(x_i) dx_i \quad (2.58)$$

$$k_{i1} = \int_0^{l_i} EI_{yi} \frac{d^2 \phi_{y_{i1}}}{dx_i^2} \frac{d^2 \phi_{y_{i1}}}{dx_i^2} dx_i, \quad (2.59)$$

wobei  $dm_i = \rho_i dx_i$  gilt. Die Massenverteilung des ganzen Gliedes kann als einheitlich angenommen werden, da der erste Teil der zugehörigen Eigenform Null ist (starrer Teil). In der Regel wird der Parameter  $z_{i1}$  als Normalisierungskriterium benutzt, d. h. es kann angenommen werden, daß

$$z_{i1} = \alpha_{i1}^2, \quad (2.60)$$

mit der Konstante  $\alpha_{i1}$ . Daraus ergibt sich

$$k_{i1} = \alpha_{i1}^2 \omega_{i1}^2. \quad (2.61)$$

Zwei gängige Normalisierungskriterien lauten  $z_i = 1$  (Meirovitch 1967) oder  $z_i = M_i$  (De Luca und Siciliano 1991).

## 2.4 Bestimmung des Coriolis- und Zentrifugalkraftvektors

Der Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor ist durch

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.62)$$

gegeben. Die Elemente der Matrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  werden aus den Elementen der Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  durch partielle Ableiten nach den verallgemeinerten Koordinaten berechnet. So ergibt sich ein Element dieser Matrix zu (Arteaga Pérez 1995b):

$$c_{rs\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} c_{ij\alpha\beta rs} \dot{q}_{ij} \quad (2.63)$$

$$c_{ij\alpha\beta rs} \triangleq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_{rsij}}{\partial q_{\alpha\beta}} - \frac{\partial h_{ij\alpha\beta}}{\partial q_{rs}} \right\}. \quad (2.64)$$

Die einzelnen Parameter sind im Anhang A aufgeführt.

## 2.5 Motordynamik

In diesem Abschnitt erfolgt die Berechnung der Dynamik der beiden Gleichstrommotoren. Das von einem Einzelmotor ausgeübte Moment  $\tau$  ergibt sich in Abhängigkeit vom Motorwinkel  $\theta$  und von der Eingangsspannung  $U$  nach (Fu u. a. 1989, Spong und Vidyasagar 1989) für den  $i$ -ten Motor zu:

$$\tau_i(t) = \frac{r_i K_{\text{m}_i}}{R_i} U_i(t) - r_i^2 J_{\text{m}_i} \ddot{\theta}_i(t) - r_i^2 \frac{K_{\text{m}_i} K_{\text{b}_i}}{R_i} \dot{\theta}_i(t), \quad (2.65)$$

mit den im Anhang aufgeführten Konstanten. Werden diese Gleichungen für die beiden Motoren zusammengefaßt und entsprechend erweitert, so ergeben sich die folgenden

Matrizen  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}_m$  zu:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_1^2 J_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 J_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{r_1 K_{m_1}}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{r_2 K_{m_2}}{R_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{r_1^2 K_{m_1} K_{b_1}}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2^2 K_{m_2} K_{b_2}}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{31} \end{bmatrix},$$

wobei  $D_{11}$  und  $D_{31}$  die Strukturdämpfung der Glieder beschreiben, die experimentell zu bestimmen sind. Anzumerken bleibt, daß auch die viskose Gelenkkreibung experimentell bestimmt werden sollte, da eine Reibungerhöhung wegen des Streifens mit der Tischfläche zu erwarten ist.

Am Ende der mathematischen Modellbildung lautet das Gesamtmodell:

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_m \mathbf{U} = \mathbf{u} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Das Blockschaltbild des Systems ist in Bild 2.10 dargestellt.

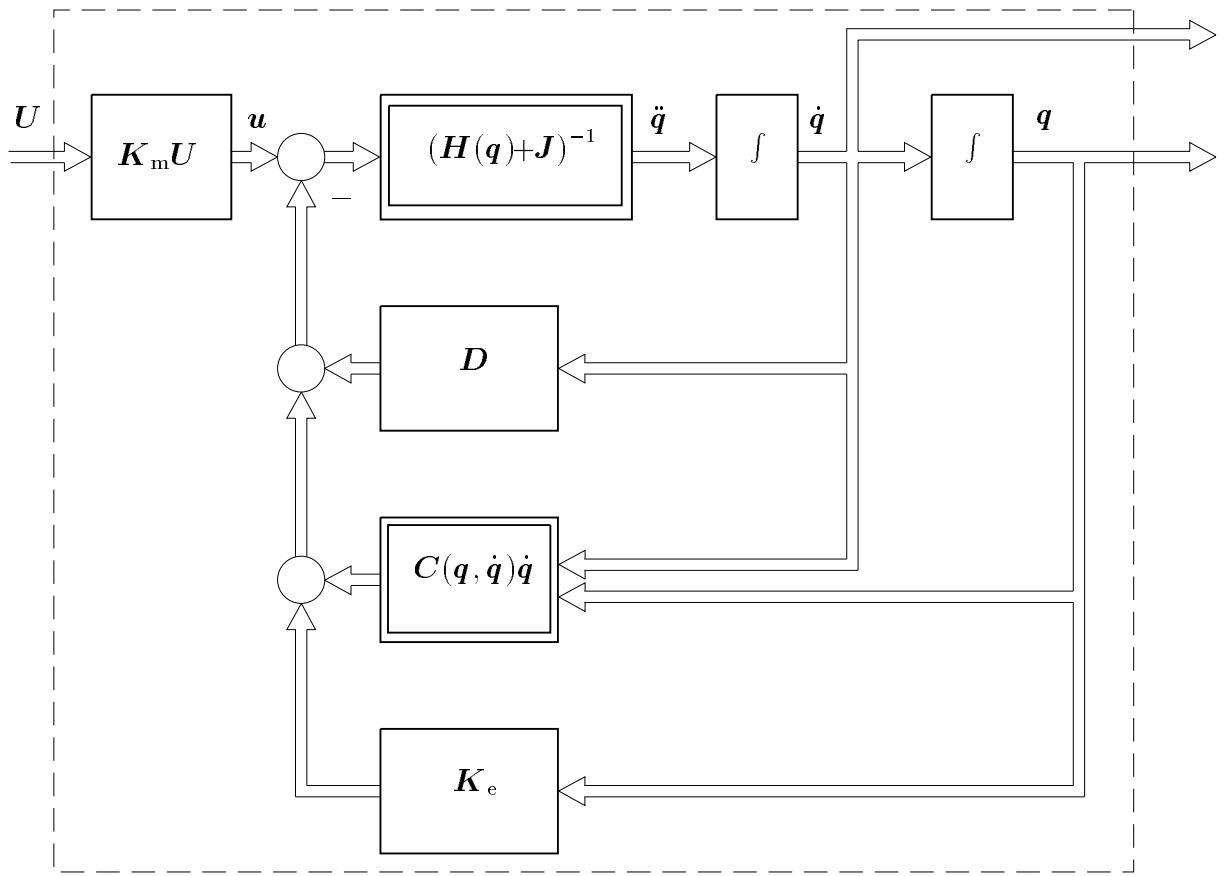
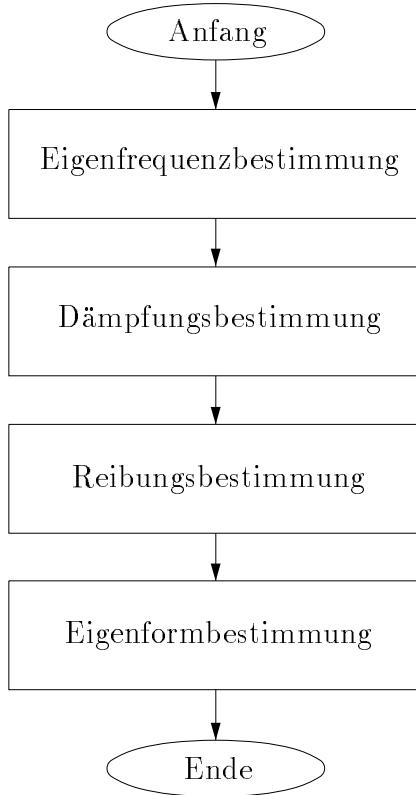


Bild 2.10: Blockschaltbild des Modells des zweiachsigen elastischen Roboters

### 3 Experimentelle Parameterbestimmung

In dem vorherigen Abschnitt ist die mathematische Modellbildung des zweiachsigen Roboters des Fachgebiets durchgeführt worden. Obwohl es theoretisch möglich ist, die Parameter des resultierenden Modells zu berechnen, ist es nicht zu erwarten, daß sich diese genau ergeben. Der Grund dafür ist, daß viele Vereinfachungen bei der Modellbildung getroffen worden sind. Abgesehen davon ist es anspruchsvoll, die Eigenfrequenzen und die Eigenformen der elastischen Glieder zu bestimmen. Andererseits ist aus dem Modellbildungsverfahren zu erkennen, daß deren Kenntnis, zusammen mit der Kenntnis der Elemente der Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder erlauben, den Roboter zu modellieren. Im vorliegenden Abschnitt wird ein Verfahren zur experimentellen Bestimmung dieser Parameter vorgestellt, das im Blockschaltbild 3.1 schematisch gezeigt ist.



**Bild 3.1:** Reihenfolge der Parameterbestimmung des elastischen Roboters

Der erste Schritt soll die Ermittlung der Eigenfrequenzen sein, da sich diese relativ genau und einfach erläutern lassen. Um die erste Eigenfrequenz des ersten Gliedes zu schätzen, muß der Winkel  $\theta_1$  Sinussignalen mit gleichen Amplituden und verschiedenen Frequenzen folgen, während der Winkel  $\theta_2$  möglichst bei Null bleibt, um den Einfluß der Coriolis- und Zentrifugalkräfte und der Dynamik des zweiten Motors zu verringern. Um dieses Ziel zu erreichen, wird ein PD-Regler für jeden Motor in der Form

$$U_i = K_{pi}(\theta_{di} - \theta_i) + K_{di}(\dot{\theta}_{di} - \dot{\theta}_i) \quad (3.1)$$

implementiert, wobei

$$K_{p1} = 100 \frac{V}{rad} \quad K_{p2} = 100 \frac{V}{rad} \quad K_{d1} = 2,5 \frac{Vs}{rad} \quad K_{d2} = 0,5 \frac{Vs}{rad} \quad (3.2)$$

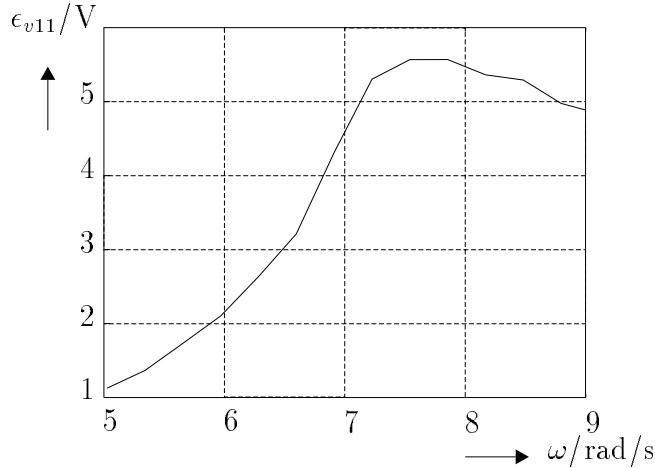
ist. Da keine Tachometer zur Messung der Winkelgeschwindigkeit vorhanden sind, wird diese durch

$$\dot{\theta}_i(k) \approx \frac{\theta_i(k) - \theta_i(k-1)}{T} \quad (3.3)$$

geschätzt, mit  $T = 0,01\text{s}$ . Als Ausgang wird die durch einen DMS-Sensor gemessene Spannung betrachtet. Um den Effekt höherer Frequenzen zu verkleinern, wird ein digitaler Tschebyscheff-Filter zweiter Ordnung mit der Eckfrequenz  $\omega_0 = 125\text{rad/s}$  (20Hz) ausgelegt:

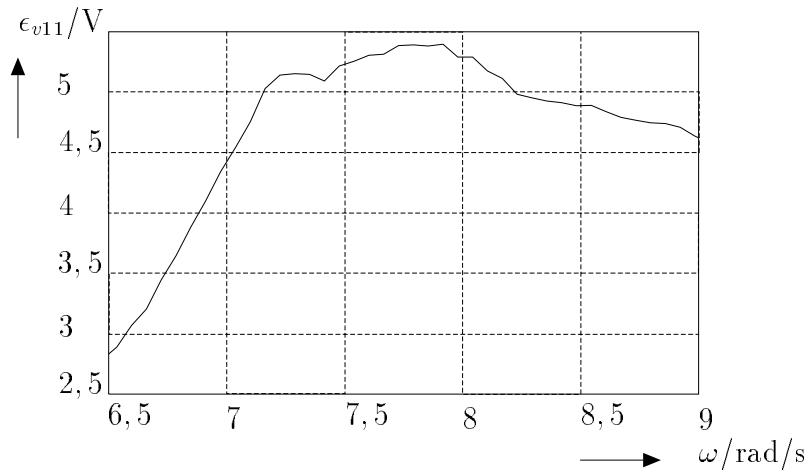
$$F(z) = \frac{0,1334z^2 + 0,0072z + 0,1334}{z^2 - 1,1605z + 0,4344}. \quad (3.4)$$

Das erste Glied des Roboters hat eine doppelt so große Massenverteilung wie das in Bai (1996a, 1996b) modellierte, dessen erste Eigenfrequenz  $\omega_{11} \approx 3,51\text{rad/s}$  (0,56Hz) beträgt. Dem zufolge ist eine höhere Eigenfrequenz zu erwarten. In einem ersten Versuch werden die Frequenzen zwischen 5rad/s und 9,4rad/s mit einer Schrittweite von 0,315rad/s untersucht. Als maximale Amplitude des Sinussignals ist 5° ausgewählt worden<sup>2</sup>. Das Ergebnis ist in Bild 3.2 zu sehen, in welchem zu erkennen ist, daß  $\omega_{11}$  über 6,3rad/s liegt. Das Experiment wird nun zwischen 6,3rad/s und 9,4rad/s mit einer Schrittweite von 0,063rad/s wiederholt. Das Ergebnis ist in Bild 3.3 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß  $\omega_{11} \approx 7,86\text{rad/s}$  (1,25Hz) beträgt.



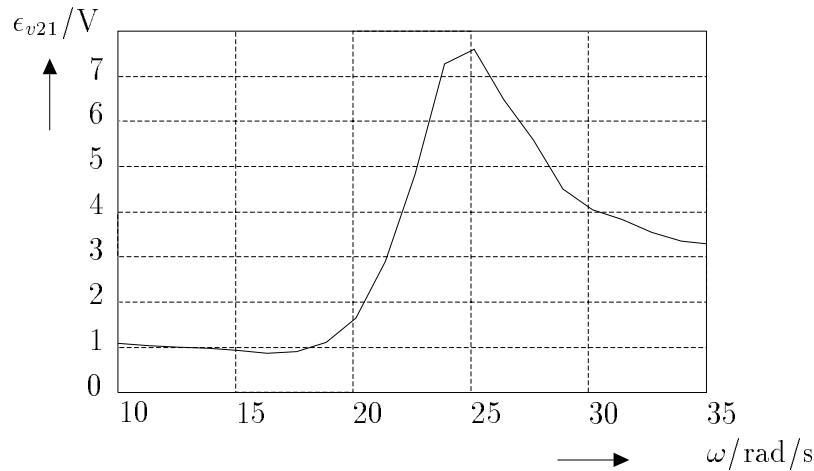
**Bild 3.2:** Bestimmung der Eigenfrequenz des ersten elastischen Gliedes  
(grobe Schrittweite)

<sup>2</sup> Zur Verdeutlichung der Erklärungen werden ° als Winkeleinheiten gegeben, aber in der Implementierung werden rad benutzt. Insbesondere bei der Berücksichtigung der Reglerparameter und bei der Reibungsbestimmung soll letzteres in Betracht gezogen werden.



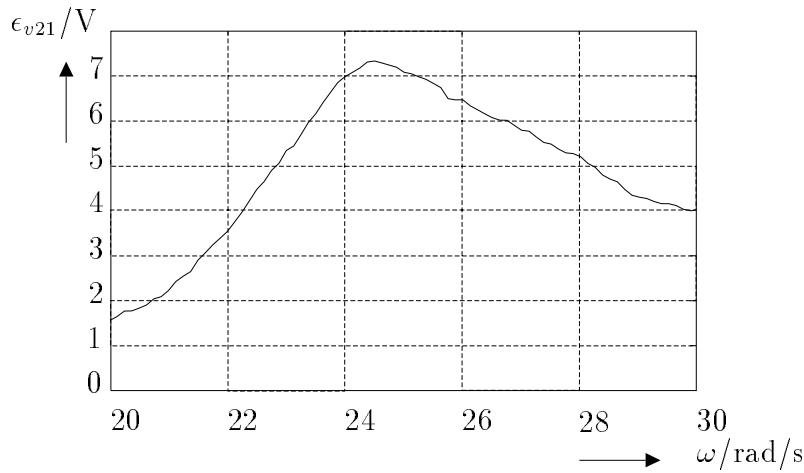
**Bild 3.3:** Bestimmung der Eigenfrequenz des ersten elastischen Gliedes  
(feine Schrittweite)

Um  $\omega_{21}$  zu bestimmen, muß der Winkel  $\theta_2$  einem Sinussignal folgen, während  $\theta_1$  möglichst bei Null bleibt, so daß der Einfluß der Dynamik des ersten Motors verringert wird. Die Frequenzen zwischen 6,3rad/s und 37,7rad/s mit einer Schrittweite von 0,63rad/s und einer Sinusamplitude von 5° werden untersucht. Bild 3.4 zeigt das Ergebnis der Untersuchung, das verdeutlicht, daß  $\omega_{31}$  zwischen 20rad/s und 30rad/s liegt. Das Experiment wird zwischen diesen beiden Frequenzen mit einer Schrittweite von 0,126rad/s wiederholt. Aus Bild 3.5 ist zu ersehen, daß  $\omega_{31} \approx 24,59\text{rad/s}$  (3,91Hz) beträgt.



**Bild 3.4:** Bestimmung der Eigenfrequenz des zweiten elastischen Gliedes  
(grobe Schrittweite)

Der nächste Schritt ist, die Dämpfung der Glieder zu bestimmen. Dafür wird als Soll-Winkel des Motors an dem das Glied, dessen Dämpfung zu bestimmen ist, befestigt ist, ein Sinussignal mit der Eigenfrequenz vorgegeben. Der andere Motorwinkel soll wiederum möglichst bei Null bleiben. Wenn die Schwingungen ein Maximum erreicht haben, wird der Soll-Wert des Winkels zu Null gesetzt, so daß die Schwingungen von selbst abklingen.

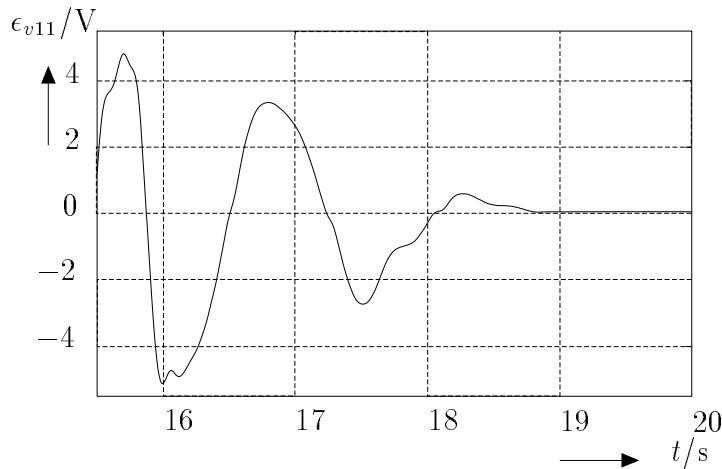


**Bild 3.5:** Bestimmung der Eigenfrequenz des zweiten elastischen Gliedes  
(feine Schrittweite)

Die Strukturdämpfung der Glieder kann durch (Stanway u. a. 1996)

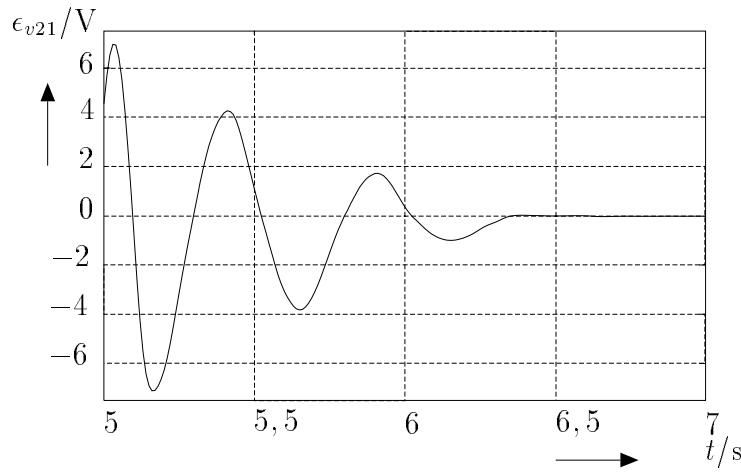
$$D = \frac{\xi}{\sqrt{4\pi^2 + \xi^2}} \quad \xi = \frac{1}{n-1} \ln \left( \frac{x_1}{x_n} \right) \quad (3.5)$$

berechnen werden, wobei  $x_n$  der Spitzewert des  $n$ -ten Zyklus ist. Für das erste Glied wird ein Sinus mit einer Amplitude von  $5^\circ$  eingestellt. Nach 16s wird der Soll-Wert zu Null geändert. Das Ergebnis ist in Bild 3.6 zu sehen, woraus sich  $D \approx 0,264$  und damit  $D_{11} = 2D\sqrt{k_{11}}$  ergibt. Es ist zu erwähnen, daß die Strukturdämpfung der Glieder eine Linearkombination der Elemente der Trägheitsmatrix und der Steifigkeitsmatrix ist (Meirovitch 1967), so daß deren Berechnung etwas vereinfacht wird.



**Bild 3.6:** Bestimmung der Dämpfung des ersten elastischen Glieds

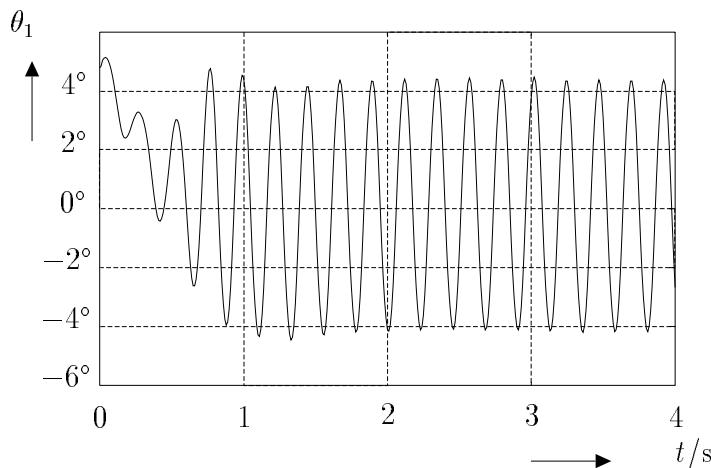
Im Fall des zweiten Gliedes wird ebenfalls ein Sinussignal mit einer Amplitude von  $5^\circ$  gewählt. Nach 5,11s wird der Soll-Wert zu Null eingestellt. Das Ergebnis ist in Bild 3.7 zu sehen. Durch Anwendung von Gl. (3.5) ergibt sich  $D \approx 0,1859$  und damit  $D_{31} = 2D\sqrt{k_{31}}$ .



**Bild 3.7:** Bestimmung der Dämpfung des zweiten elastischen Gliedes

In diesem Forschungsbericht wird nur viskose Gelenkreibung berücksichtigt. Obwohl man die Sprungantwort für beide Motoren analysieren kann, lässt sich der Einfluß der Elastizität nicht vernachlässigen. Deswegen wird das folgende Experiment durchgeführt: Zuerst fährt der Motor des Gelenks, dessen viskose Reibung zu schätzen ist, einen bestimmten Winkel  $\theta_{di}$  an. Dann wird die Verstärkung  $K_{di}$  des durch Gl. (3.1) gegebenen PD-Reglers auf einen kleinen *negativen* Wert eingestellt und ein Motorwinkel von Null angefahren. Das Experiment wird mit größeren negativen Verstärkungen wiederholt, bis der Motor anfängt zu schwingen. In diesem Fall entspricht  $-K_{di}r_iK_{mi}/R_i$  der viskosen Gelenkreibung  $D_{i0}$ . Um bessere Ergebnisse zu erzielen, sollten  $K_{pi}$  und  $\theta_{di}$  möglichst klein sein.

Für den ersten Motor wird ein Winkel von  $5^\circ$  angefahren und  $K_{pi} = 5\text{V/rad}$  ausgewählt. Nach verschiedenen Versuchen schwingt der erste Motor für  $K_{di} = -4,67\text{Vs/rad}$ , so daß  $D_{i0} \approx 6,6082\text{Nms/rad}$  ist. Im Vergleich beträgt der vom Hersteller angegebene Wert  $D_{i0} \approx 4,0052\text{Nms/rad}$ . Der höhere Wert resultiert aus der Reibung an das Auflagefläche. Bild 3.8 zeigt  $\theta_1$ , wobei zu erkennen ist, daß sich ein Grenzzyklus einstellt.



**Bild 3.8:** Bestimmung der Reibung des ersten Motors

Das gleiche Experiment wird bei dem zweiten Motor ausgeführt. In diesem Fall wird  $\theta_2$  zu  $5^\circ$  eingestellt und  $K_{p2} = 5\text{V}/\text{rad}$  gewählt. Bei dem Auftreten der Schwingungen lautet der Wert von  $K_{d2} = -1,1\text{Vs}/\text{rad}$ , was  $D_{20} \approx 0,101\text{Nms}/\text{rad}$  bedeutet. Der vom Hersteller angegebene Wert lautet  $D_{20} \approx 0,1770\text{Nms}/\text{rad}$ . Da nicht zu erwarten ist, daß die viskose Reibung sich verkleinert hat, ergibt sich, daß das vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung der viskosen Reibung für kleine Werte nicht genau genug ist. In diesem Fall wird der nominale Wert von  $D_{20}$  angenommen. Das Bild 3.9 zeigt die Oszillationen des Motors.

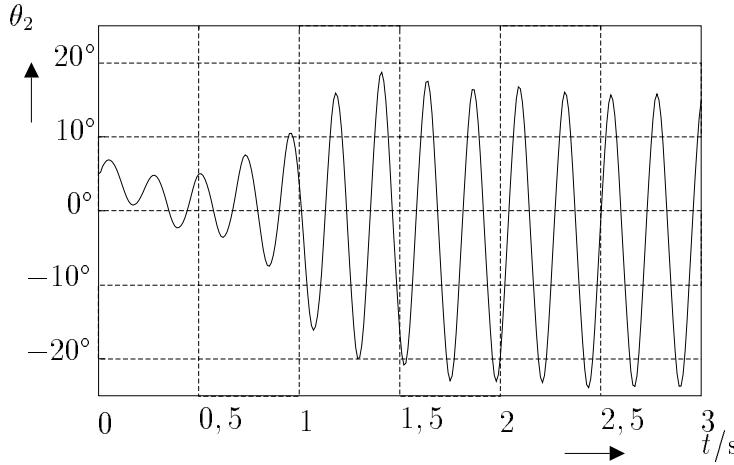


Bild 3.9: Bestimmung der Reibung des zweiten Motors

Der letzte Schritt besteht darin, die Eigenformen der Glieder zu bestimmen. Insbesondere sind die Parameter  $\phi_{11}(l_1)$ ,  $\phi_{31}(l_3)$ ,  $\phi'_{11}(l_1)$  und  $\phi'_{31}(l_3)$  aus den Gln. (2.9)–(2.15), sowie  $v_{11}$ ,  $v_{31}$ ,  $w_{11}$  und  $w_{31}$  aus den Gln. (2.56) und (2.57) zu berechnen.

Um die erste Eigenform zu schätzen, soll ein Sinussignal für den ersten Motorwinkel gewählt werden. Dieses Experiment wird mit einer Amplitude von  $5^\circ$  und Frequenzen von 0,5, 1 und 1,25Hz wiederholt. Um  $\phi_{11}(x_1)$  zu bestimmen, wird das dreidimensionale Meßsystem *DynaSight* verwendet. Es werden vier Leuchtdioden jeweils im Abstand von 10cm in Richtung des Gliedes geklebt. Ein weiterer zu berücksichtigender Faktor ist, daß die Eigenform bezüglich des Kordinatensystems  $(x_1, y_1)$  ermittelt werden muß (siehe Bild 2.3). Letzteres ist recht einfach durchzuführen, da ein durch *DynaSight* in dem ortsfesten Koordinatensystem gemessener Punkt  $\mathbf{p}_i$  sich mittels der Gleichung

$${}^1\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \mathbf{p}_i \quad (3.6)$$

im Koordinatensystem  $(x_1, y_1)$  ausdrücken läßt. Ferner muß eine Normalisierung bezüglich

$$z_{11} = \rho_1 \int_0^{l_1} \phi_{11}^2(x_1) dx_1 \quad (3.7)$$

stattfinden, wobei  $z_{11} = 1\text{kg}$  ausgewählt ist (Meirovitch 1967). Da die Anzahl der Dioden gerade ist, bietet sich die numerische Integration nach der Simpsonschen Regel an (Göhler 1987):

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x) dx \approx \frac{h}{3} (y(x_0) + y(x_n) + 4(y(x_1) + \dots + y(x_{n-1})) + 2(y(x_2) + \dots + y(x_{n-2}))). \quad (3.8)$$

Um die Ergebnisse zu verbessern, werden die umgerechneten Positionen der Dioden mit einem digitalen Tschebyscheff–Filter zweiter Ordnung mit der Eckfrequenz  $\omega_0 = 62,8\text{rad/s}$  ( $10\text{Hz}$ ) gefiltert:

$$F(z) = \frac{0,0996z^2 - 0,1297z + 0,0996}{z^2 - 1,6099z + 0,6794}, \quad (3.9)$$

wobei  $T = 0,01\text{s}$  ist. Um die Eigenschwingform zu bestimmen, wird ein Mittelwert der maximalen Amplituden berechnet und die Normalisierung nach Gl. (3.7) durchgeführt. Bild 3.10 zeigt einen typischen Verlauf einer berechneten normalisierten Eigenform, wobei für  $x_1 \leq 0,03\text{m}$   $\phi_{11}(x_1) = 0$  gilt, da es um den starren Teil des Gliedes geht.  $w_{11}$  und  $v_{11}$  wurden nach Gln. (2.56) und (2.57) nach der Normalisierung berechnet.

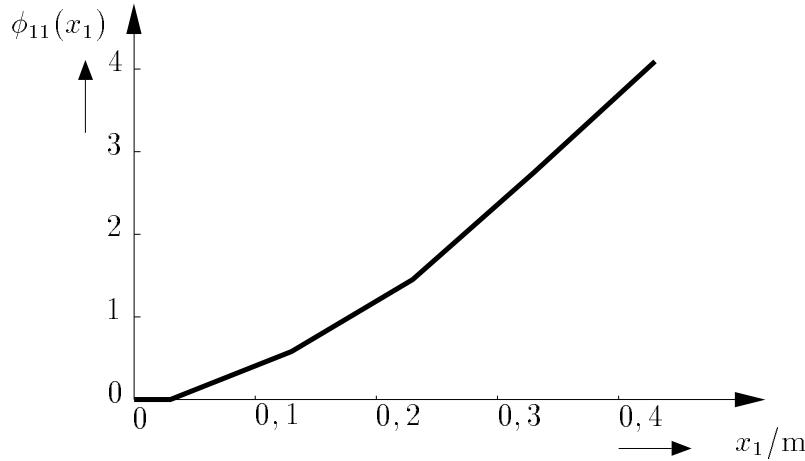


Bild 3.10: Erste Eigenschwingform des ersten elastischen Gliedes

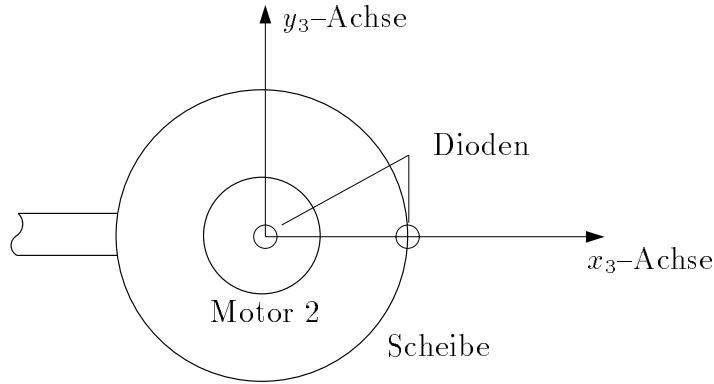
Der Parameter  $\phi'_{11}(l_1)$  wird durch die Steigung

$$\phi'_{11}(l_1) \approx \frac{\phi_{11}(0,43) - \phi_{11}(0,33)}{0,1} \quad (3.10)$$

geschätzt.

Die Bestimmung der zweiten Eigenform ist anspruchsvoller, da diese im Koordinatensystem  $(x_3, y_3)$  angegeben werden muß (siehe Bild 2.3). Um das Problem zu lösen, gibt

es prinzipiell zwei Möglichkeiten: 1. man klebt eine Diode in den Ursprung des Koordinatensystems und eine weitere in Richtung der  $x_3$ -Achse (Bild 3.11), so daß man in der Lage ist, die Position eines Punktes vom ortsfesten Koordinatensystem ins dritte Koordinatensystem umzurechnen. 2. man benutzt Gl. (2.4), um die Beziehung zwischen Punkten im dritten und ortsfesten Koordinatensystem zu erläutern. Beide Möglichkeiten werden ausprobiert.



**Bild 3.11:** Diodenpositionierung zur Bestimmung von  $\phi_{31}(x_3)$

Da  $\phi_{11}(l_1)$  und  $\phi'_{11}(l_1)$  bekannt sind, kann jeder Punkt

$${}^3\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

im Koordinatensystem  $(x_3, y_3)$  im ortsfesten Koordinatensystem als

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{r}_3 \quad (3.12)$$

ausgedrückt werden. Um die Genaugigkeit der Positionsbestimmung zu erhöhen, wird die folgende Änderung in die Matrix  $\mathbf{E}_1$  (vgl. Gl. (2.9)) eingefügt:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} c_{z_1} & -\theta_{z_1} & 0 & l_1 \\ \theta_{z_1} & c_{z_1} & 0 & \delta_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{z_1} & -\phi'_{11}(l_1)\delta_{11} & 0 & l_1 \\ \phi'_{11}(l_1)\delta_{11} & c_{z_1} & 0 & \phi(l_1)\delta_{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

wobei  $c_{z_1} \triangleq \sqrt{1 - \theta_{z_1}^2}$  ist. Aus Gl. (3.13) ist erkennbar, daß  $\theta_{z_1}$  und somit  $\delta_{11}$  (also die erste verallgemeinerte elastische Koordinate) und die Deformation  $\delta_{y_1}$  notwendig sind.  $\delta_{11}$  kann indirekt über die durch den DMS-Sensor gemessene Spannung  $\epsilon_{v11}$  bestimmt werden, da die Deformation  $\delta_{y_1}$  direkt proportional zu  $\epsilon_{v11}$  ist (unter der Annahme, daß die höheren verallgemeinerten elastischen Koordinaten vernachlässigbar sind). Das heißt, es gibt eine Konstante  $K_{\epsilon11}$ , so daß

$$\delta_{y_1} = K_{\epsilon11} \epsilon_{v11} \quad (3.14)$$

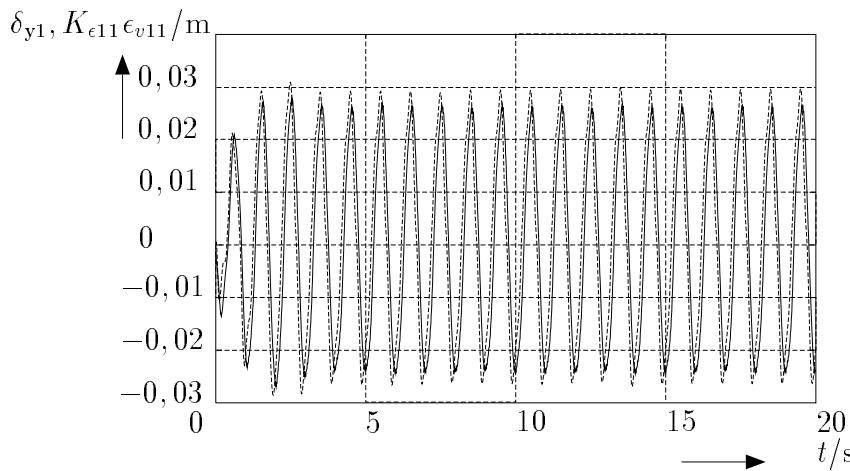
gilt.  $\delta_{y_1}$  ist wie bei der Bestimmung der ersten Eigenform zu berechnen. Wenn man mehrere Messungen durchführt, kann die Methode der kleinsten Fehlerquadrate in der Form

$$p = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \quad (3.15)$$

angewendet werden (Isermann 1992), wobei  $p$  der zu bestimmende Parameter,  $\mathbf{a}$  der Eingangsvektor und  $\mathbf{b}$  der Ausgangsvektor ist. Daraus ergibt sich

$$K_{\epsilon 11} \approx 0,0108 \frac{\text{m}}{\text{V}} \quad (3.16)$$

Das Bild 3.12 zeigt einen typischen Verlauf der durch *DynaSight* bestimmten Deformation und der durch den DMS-Sensor geschätzten Deformation, wobei die aus der Filteranwendung resultirende Phasenverschiebung bei der Berechnung von  $K_{\epsilon 11}$  bereits korrigiert wurde.



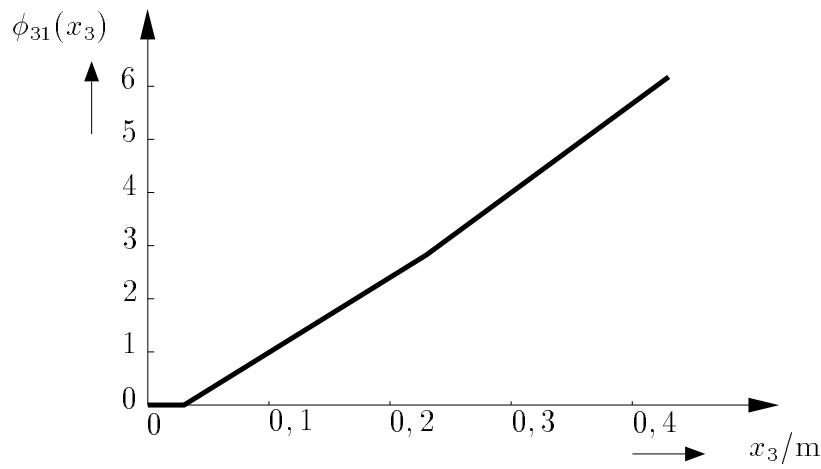
**Bild 3.12:** Berechnung des Verstärkungsfaktors  $K_{\epsilon 11}$ .

Durch *DynaSight* bestimmte Deformation (—) und  $K_{\epsilon 11} \epsilon_{v11}$  (---)

Da der Wert von  $\phi_{11}(l_1)$  bekannt ist, lässt sich  $\delta_{11}$  mit

$$\delta_{11} = \frac{\delta_{y_1}}{\phi_{11}(l_1)} = \frac{K_{\epsilon 11}}{\phi_{11}(l_1)} \epsilon_{v11} \quad (3.17)$$

berechnen. Obwohl man in der Lage ist, die Position von bis zu vier Punkten in Richtung der  $x_3$ -Achse zu messen und damit die zweite Eigenform wie die erste zu bestimmen, werden nur zwei Dioden geklebt, um einen fairen Vergleich mit der anderen zur Deformationbestimmung des Gliedes vorgeschlagenen Methode durchzuführen. Als Soll-Wert für  $\theta_2$  wird ein Sinussignal mit Frequenzen von 1, 2, 3 und 3,25Hz und Amplitude 5° vorgegeben. Wiederholt man das Experiment wie beim ersten Glied, ergibt sich die in Bild 3.13 gezeigte normierte Eigenform ( $z_{31} = 1\text{kg}$ ).



**Bild 3.13:** Erste Eigenschwingform des zweiten elastischen Gliedes

Der Parameter  $\phi'_{31}(l_3)$  lässt sich durch die Steigung

$$\phi'_{31}(l_3) \approx \frac{\phi_{31}(0,43) - \phi_{31}(0,23)}{0,2} \quad (3.18)$$

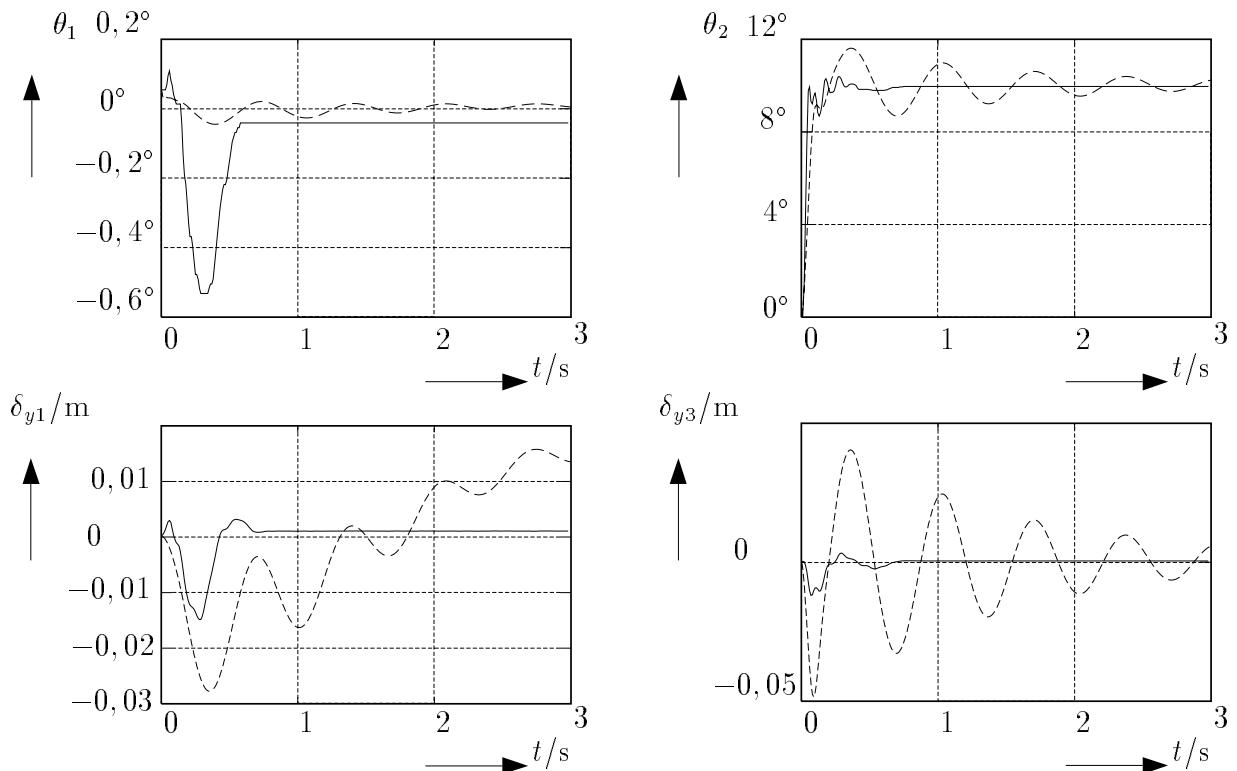
annähern. Schätzt man die Eigenform mit zwei Dioden zur Umrechnung der Deformation ins ortsfeste Koordinatensystem, ergeben sich die gleichen Werte, so daß kaum ein Unterschied zwischen beiden Methoden erkennbar ist.

Damit sind alle unbekannten Parameter der Bewegungsgleichung (2.1) bestimmt. Tabelle B.1 in Anhang ?? faßt die Ergebnisse zusammen.

## 4 Simulationsergebnisse

Das in den beiden letzten Abschnitten beschriebene analytische Modell des elastischen Arms wird in diesem Abschnitt mit den am Versuchsträger aufgenommenen Daten verglichen. Dabei werden zunächst sprungförmige Signale und anschließend sinusförmige Signale untersucht.

Zunächst werden Modell und Versuchsträger mit einem Sollwertsprung von  $0^\circ$  für den ersten Winkel und von  $10^\circ$  für den zweiten Winkel beaufschlagt. Beide Motoren sind mit dem nach Gl. (3.1) gegebenen PD-Gelenkwinkelregler ausgestattet. Bild 4.1 zeigt den Vergleich der Winkel und der Deformationen, wobei die Messung durch die durchgezogene Linie und die Simulation durch die gestrichelte Linie verdeutlicht werden. Die Deformationen werden für den Versuchsträger direkt aus den gemessenen DMS-Signalen, multipliziert mit dem Faktor  $K_{ei1}$  (siehe Gl. 3.14), ermittelt.



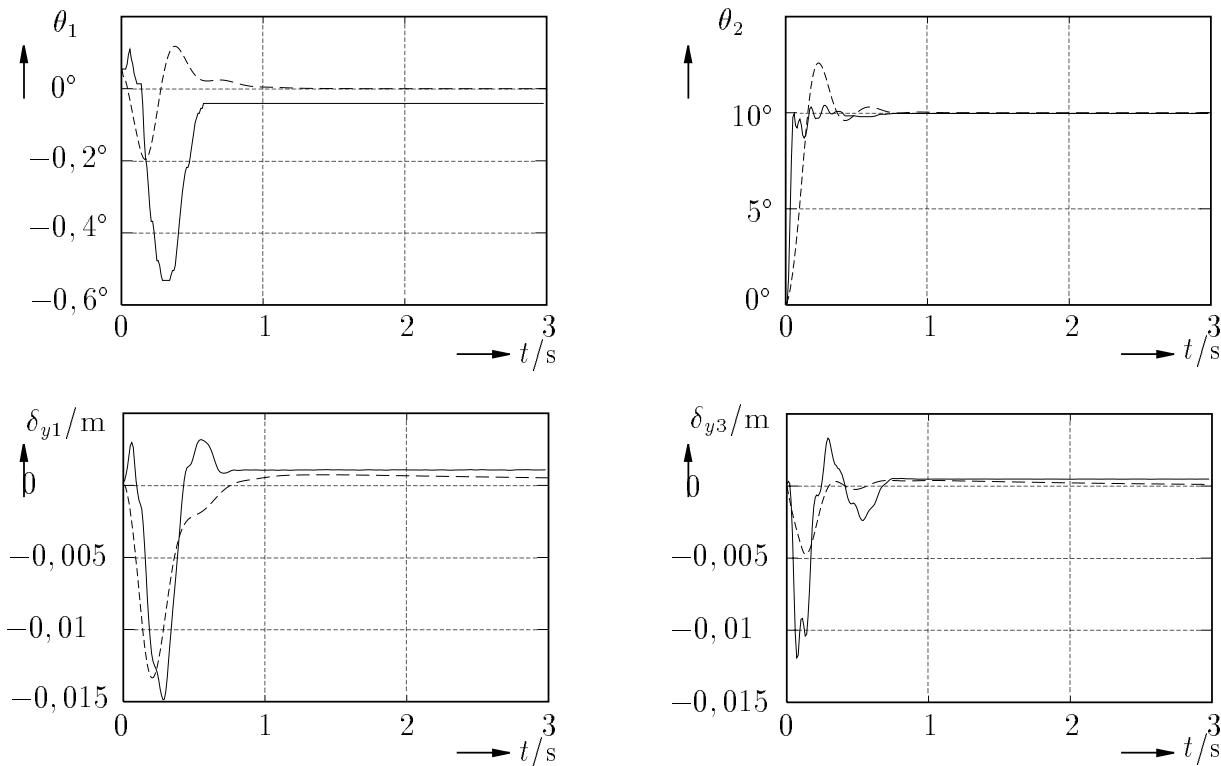
**Bild 4.1:** Winkel und Deformationen für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 0^\circ$  und  $\theta_{d2} = 10^\circ$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Es ist deutlich zu erkennen, daß die Schwingungsneigung des Modells viel höher ist als in der Realität. Dies kann teilweise auf eine schlechte Wahl der Normierung der Eigenformen zurückgeführt werden, denn je größer der Betrag der Eigenschwingform ist, desto kleiner ergibt sich der Betrag der elastischen Koordinate, so daß man an die Grenzen der Rechnergrenauigkeit stößt. Durch eine geeignete Wahl der Faktoren  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{31}$

(s. Gl. (2.60)) gelingt es, die Schwingungen des Modells zu reduzieren. Ferner gibt das modifizierte Modell den Verlauf vor allem der ersten elastischen Koordinate viel besser wieder. Die Ergebnisse für eine Wahl von

$$\alpha_1 = 0,015 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0,01 \quad (4.1)$$

sind in Bild 4.2 dargestellt. Wie oben erwähnt, sind diese Faktoren klein gewählt worden, um zu erzwingen, daß sich die simulierte elastische Koordinate vergrößert. Die Parameter des modifizierten Modells befinden sich in Tabelle B.1 im Anhang B.



**Bild 4.2:** Winkel und Deformationen für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 0^\circ$  und  $\theta_{d2} = 10^\circ$  mit Modifikation, Messung (—) und Simulation (- - -)

Bild 4.2 zeigt den Vergleich von Messung und Simulation für die gleichen Sollwerte wie in Bild 4.1. Die Winkelverläufe sind bis auf einen Offset bei  $\theta_1$ , der auf das Spiel in den Motoren zurückzuführen ist, gut wiedergegeben. Der Winkelverlauf von  $\theta_2$  wird deutlich von der Reibung auf der Tischfläche und dem Spiel beeinflußt, aber die Schwingungen von Meß- und Simulationsdaten klingen gleichzeitig ab. Auch die Deformationen zeigen qualitativ den gleichen Verlauf. Inbesondere der Verlauf von  $\delta_{y1}$  wird ausgezeichnet wiedergegeben. Es muß erwähnt werden, daß der elastische Roboter des Fachgebiets sehr flexibel ist, so daß der Einfluß höherer Eigenfrequenzen von Bedeutung ist. Um dies zu zeigen, fährt der erste Motor einen Winkel von  $10^\circ$  an, während der zweite Winkel auf  $-10^\circ$  eingestellt wird. Das Ergebnis ist in Bild 4.3 zu sehen.

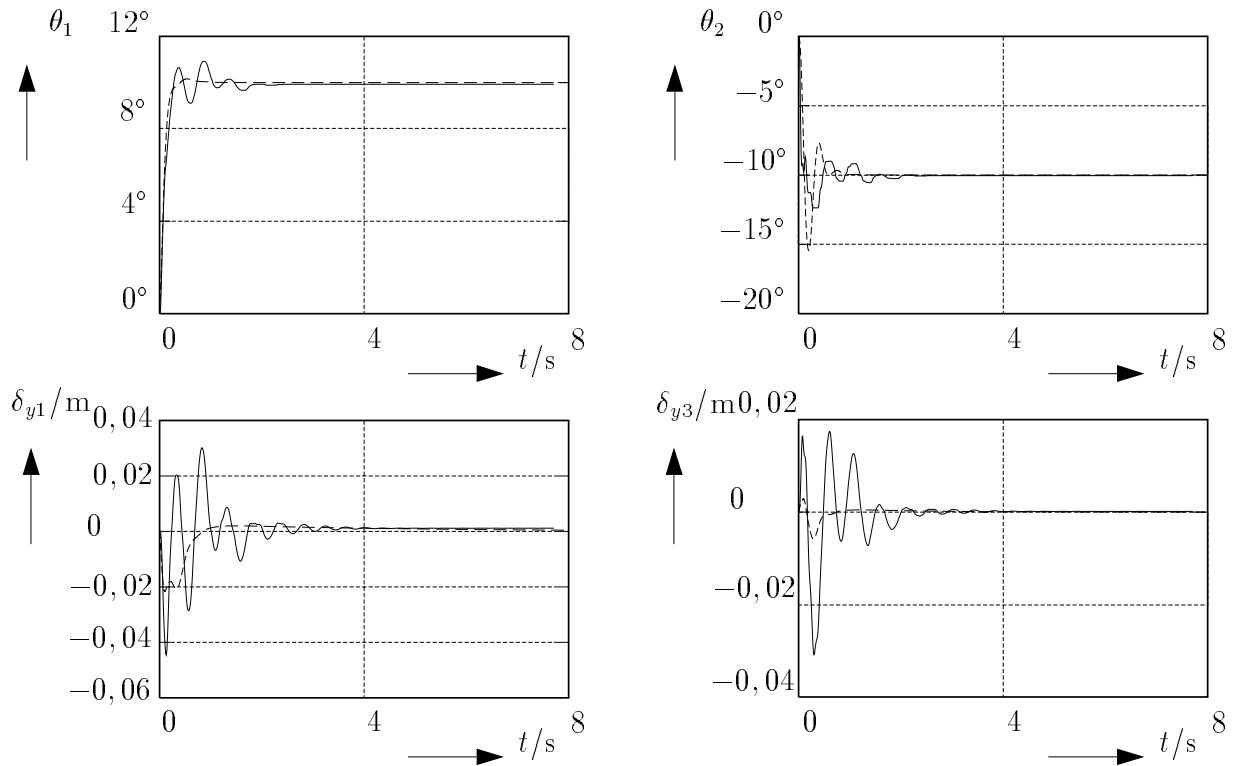


Bild 4.3: Winkel und Deformationen für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 10^\circ$  und  $\theta_{d2} = -10^\circ$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

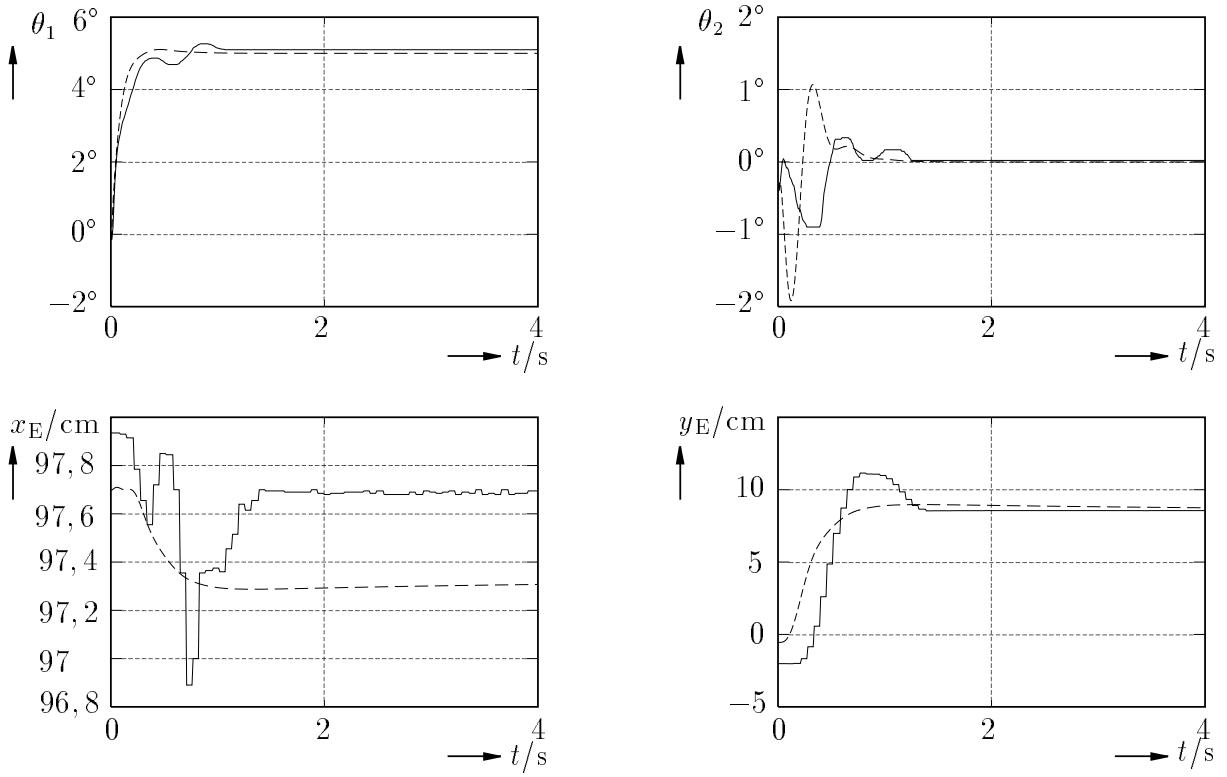
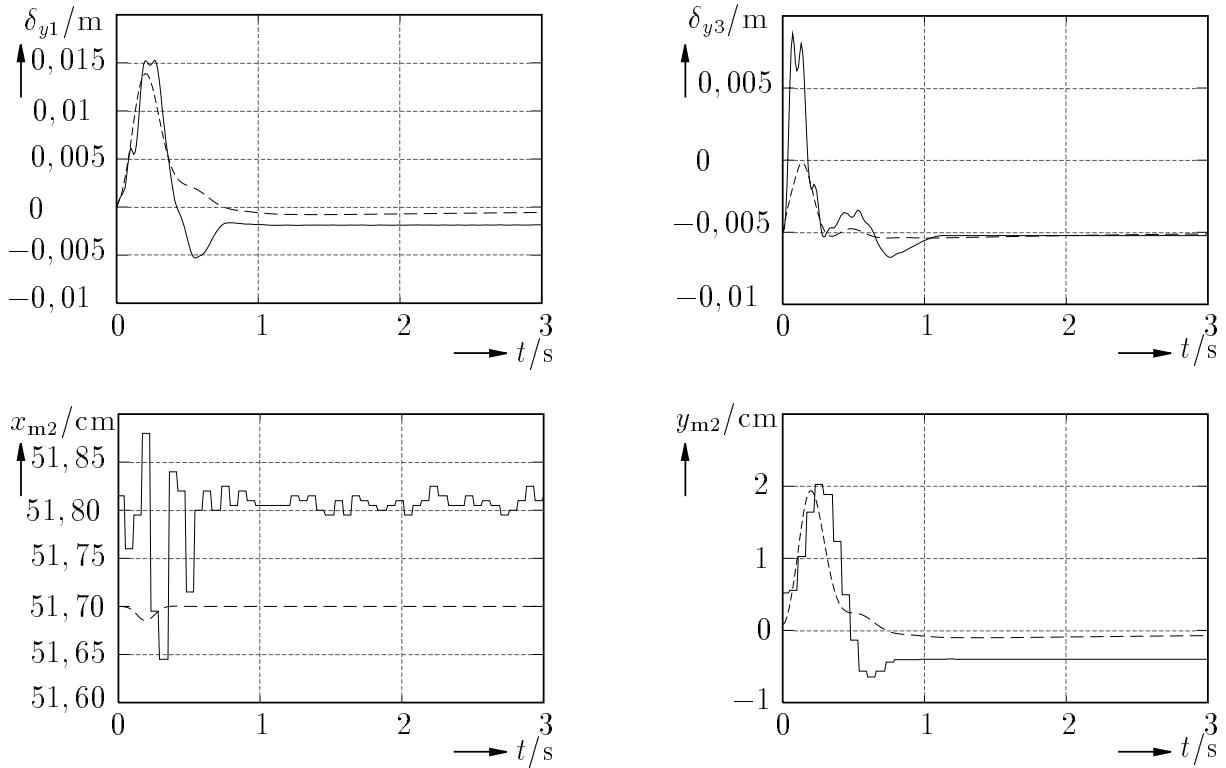


Bild 4.4: Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sowie Endeffektorposition  $x_E$ ,  $y_E$  für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 5^\circ$  und  $\theta_{d2} = 0^\circ$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Offensichtlich sind in der Simulation weniger Schwingungen als bei den gemessenen Daten zu beobachten, was den Einfluß der höheren Eigenfrequenzen zeigt. Abgesehen davon ist zu erwähnen, daß sich die Randbedingungen für das erste Glied bei einem solchen Verlauf stark geändert haben müßten. Bessere Ergebnisse zeigen sich, wenn zwei elastische Koordinaten pro Glied berücksichtigt werden (De Luca und Siciliano 1991). Für einen Sollwertvektor von  $[\theta_{d1}, \theta_{d2}]^T = [5^\circ, 0^\circ]^T$  sind in Bild 4.4 die Winkelverläufe sowie die absolute Position des Endeffektors gezeigt. Der zweite Motorwinkel weist eine höhere Dynamik auf als in der Realität, aber qualitativ passen die beiden gut. Die Position in  $x$ -Richtung wird im Modell bis auf eine stationäre Abweichung von 4 mm genau berechnet, in  $y$ -Richtung beträgt die Abweichung auch nur wenige Millimeter, was bei der geringen Genauigkeit der optischen Positionsmeßung als sehr gut bezeichnet werden kann.

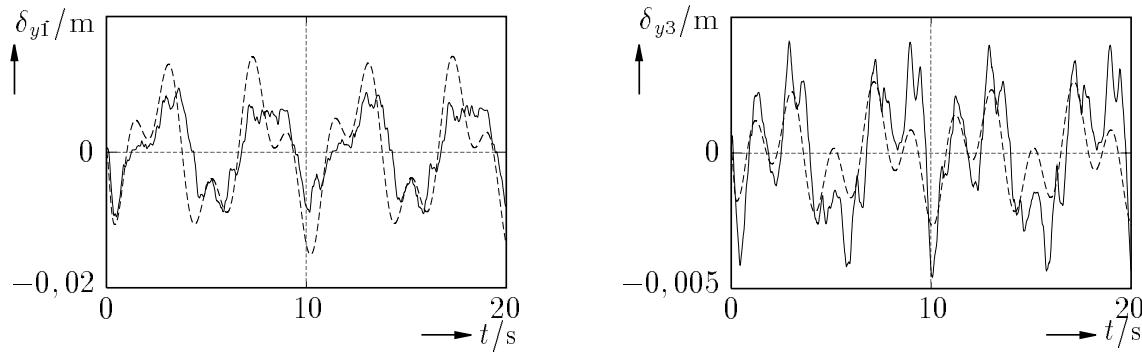


**Bild 4.5:** Deformationen  $\delta_{y1}$  und  $\delta_{y3}$  sowie Position des zweiten Motors  $x_{m2}$ ,  $y_{m2}$  für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 0^\circ$  und  $\theta_{d2} = -10^\circ$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Das Ergebnis der Validierung mit dem 4. Sprungsignal ( $\theta_{d1} = 0^\circ, \theta_{d2} = -10^\circ$ ) zeigt Bild 4.5. Dargestellt sind die Deformationen sowie die Position des zweiten Motors. Es ist zu erkennen, daß gemessene und simulierte Daten gut übereinstimmen. Anzumerken bleibt, daß die gemessene Deformation des ersten Gliedes nicht verschwindet, was teilweise auf die Reibung auf der Tischfläche und teilweise auf die Ungenauigkeit der DMS-Sensoren zurückzuführen ist.

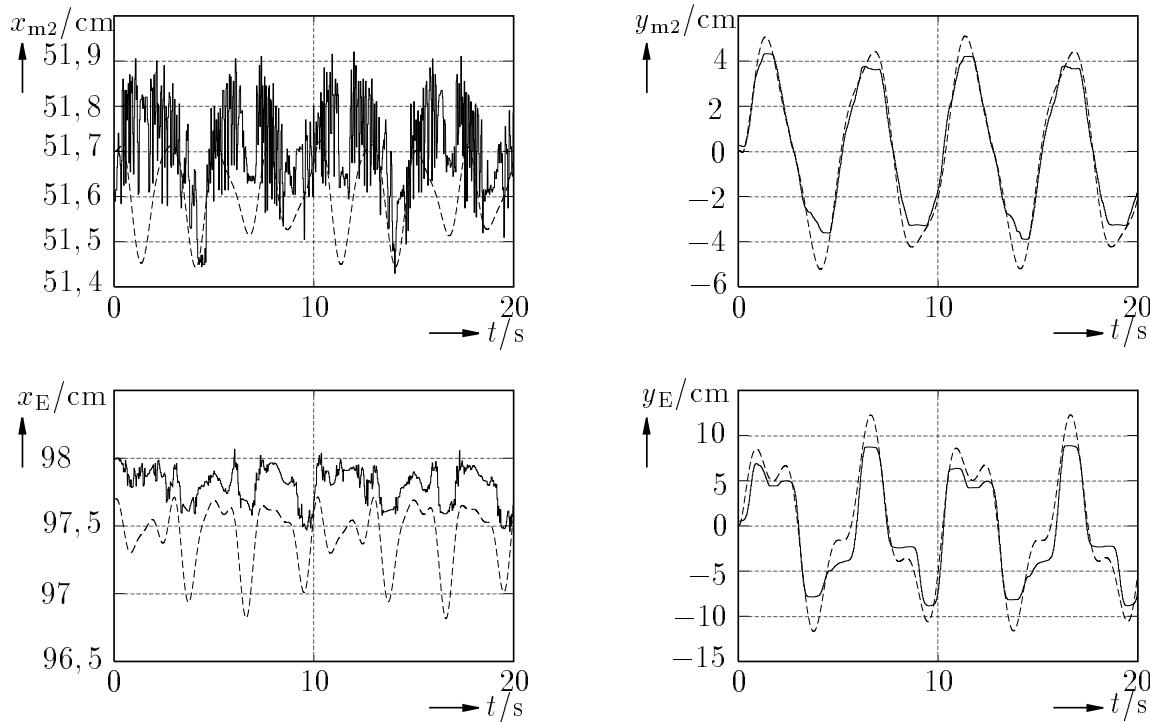
Allgemein läßt sich zu der Validierung mit Sprungsignalen sagen, daß die noch deutlich

sichtbaren Abweichungen zwischen den Ausgängen des Modells und den Messungen am Versuchsträger auf die Tatsache zurückzuführen sind, daß ein Sprung eher die höheren Eigenfrequenzen des Systems anregt, und die nicht modellierte Dynamik zu den vorhandenen Differenzen führt.



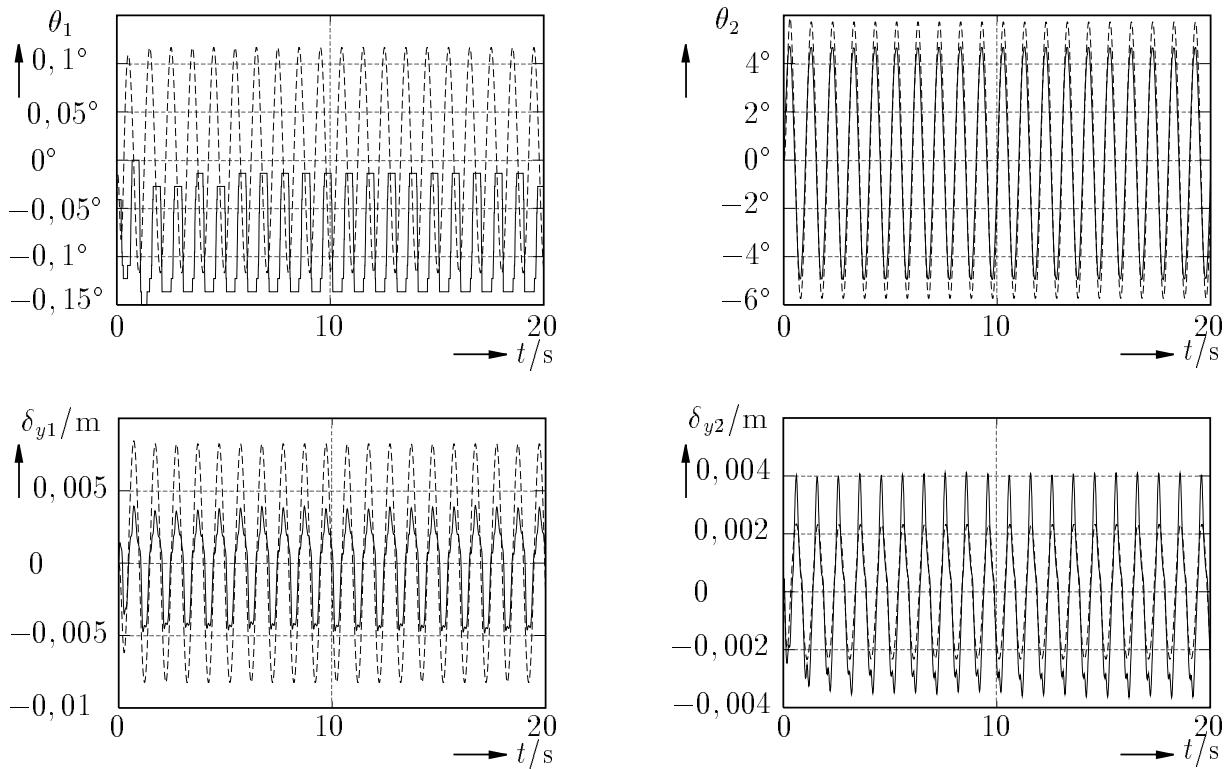
**Bild 4.6:** Deformationen  $\delta_{y1}$  und  $\delta_{y3}$  für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 5^\circ \sin(2\pi 0,2 t)$  und  $\theta_{d2} = 5^\circ \sin(2\pi 0,5 t)$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Als nächstes werden zwei Sinussignale als Sollwerte für die Winkel mit den Frequenzen  $f_1 = 0,2 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 0,5 \text{ Hz}$  und den Amplituden  $A_1 = A_2 = 5^\circ$  betrachtet. Bild 4.6 zeigt die Deformationen im Vergleich. Eine deutliche Übereinstimmung ist zu erkennen.



**Bild 4.7:** Position des zweiten Motors  $x_{m2}$ ,  $y_{m2}$  sowie des Endeffektors  $x_E$ ,  $y_E$  für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 5^\circ \sin(2\pi 0,2 t)$  und  $\theta_{d2} = 5^\circ \sin(2\pi 0,5 t)$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Für die gleichen Sollwerte sind in Bild 4.7 die Positionen in  $x$ - und  $y$ -Richtung des zweiten Motors sowie des Endeffektors gezeigt. Auch hier sind die Modellausgänge qualitativ korrekt, bis auf konstante Offsets zu den gemessenen Größen. Diese konstanten Offsets sind teilweise auf die in der Realität vorhandene Reibung des Motors und des Endeffektors auf dem Tisch zurückzuführen, die im Modell nicht berücksichtigt wurde. Der Vergleich der Systemantworten auf das letzte Eingangssignal, ein sinusförmiger Sollwert mit der Frequenz  $f_2 = 1$  Hz und der Amplitude  $A_2 = 5^\circ$  für den zweiten Motorwinkel, während der erste bei Null bleibt, ist in Bild 4.8 dargestellt. Der zweite Winkel ist durch die Regelung fast genau übereinstimmend, während der Effekt des Spiels im Getriebe bei dem ersten Winkel deutlich zu erkennen ist. Die Deformationen stimmen auch sehr gut überein. Obwohl zu erwarten war, daß für ein einziges Sinussignal beide elastischen Koordinaten in Simulation und Messung die gleiche Frequenz besitzen, bleibt anzumerken, daß die Phase der gemessenen und der simulierten Daten die gleiche ist, was die Ergebnisse als gut bezeichnen läßt.



**Bild 4.8:** Winkel und Deformationen für die Sollwerte  $\theta_{d1} = 0^\circ$  und  $\theta_{d2} = 5^\circ \sin(2\pi t)$ , Messung (—) und Simulation (- - -)

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Modell mit den oben schon erwähnten Einschränkungen durch die nichtmodellierte höhere Dynamik und die ebenfalls nicht modellierten Reibungseffekte sowie bei der beschränkten Verlässlichkeit der zur Parameterbestimmung verwendeten absoluten Positionsmeßung das Verhalten des realen Systems mit hinreichender Güte wiederspiegelt.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Forschungsbericht wird ein Verfahren zur experimentellen Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters vorgeschlagen. In einem ersten Schritt wird der Roboter analytisch modelliert. Obwohl der Roboter aus nur zwei elastischen Gliedern besteht, wird er in vier Glieder aufgeteilt, so daß der Einfluß der starren und elastischen Teile des Handhabungssystems besser voneinander getrennt modelliert werden kann. Um die Trägheitsmomente der Glieder zu berechnen, werden verschiedene Vereinfachungen angenommen. Zum Beispiel wird jedes Glied als symmetrisch betrachtet. Die Massen der Elemente sind gewogen worden, während die Längen der Glieder genau bekannt sind.

In der analytischen Modellbildung treten viele Parameter explizit auf, die sich experimentell bestimmen lassen. Insbesondere kann man die Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen der elastischen Glieder relativ einfach ermitteln, wenn nur eine elastische Koordinate pro Glied in Betracht gezogen wird. Ausgänge des Systems sind die durch DMS-Sensoren gemessene zur Dehnung der Glieder proportionale Spannung, die Winkel der Motoren und die durch das dreidimensionale Meßsystem *DynaSight* berechneten Positionen von an den Gliedern befestigten Diode.

Versucht man, das Modell mit den berechneten Parametern zu simulieren, ergibt sich die Bedeutung der Normalisierung der Eigenformen, da die Simulationsergebnisse in einem ersten Versuch als schlecht zu bezeichnen sind. Ändert man das Normalisierungskriterium, verbessern sich die Simulationsergebnisse deutlich. Der Grund dafür liegt in der Rechnergenauigkeit, da aus einer rein theoretischen Perspektive das Normalisierungskriterium keine Rolle spielt. Letzteres bedeutet, daß eine geeignete Normalisierung der Eigenformen das Modell des Roboters weniger empfindlich gegen numerische Ungenauigkeiten macht.

Obwohl sich die Simulationsergebnisse für viele Testsignale als gut erwiesen haben, ist deutlich zu erkennen, daß mindestens eine weitere elastische Koordinate pro Glied modelliert werden sollte, um die Güte des Modells zu verbessern. Es ist auch zu erwähnen, daß sich der Einfluß komplexerer und schwierig zu modellierender Nichtlinearitäten wie Reibung und Spiel in den Getrieben und Störungen wie der Zug an den Gliedern durch die Netzkabel verkleinern läßt, wenn das Verfahren von Euler–Lagrange zur Modellbildung elastischer Roboter verwendet wird.

Als zukünftige Arbeit bleibt die Implementierung eines nichtlinearen Reglers, der die hier vorgestellte Modellstruktur ausnutzt. Der erste Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

## 6 Literaturverzeichnis

- Arteaga Pérez, M. A.** 1995a. *Zur Positionsbestimmung bei elastischen Robotern*. Forschungsbericht Nr. 9/95. MSRT. Gerhard–Mercator–Universität–GH Duisburg.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1995b. *Über die Eigenschaften des Modells eines elastischen Roboters*. Forschungsbericht Nr. 17/95. MSRT. Gerhard–Mercator–Universität–GH Duisburg.
- Bai, M.** 1996a. *Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems*. Forschungsbericht Nr. 5/96. MSRT. Gerhard–Mercator–Universität–GH Duisburg.
- Bai, M.** 1996b. *Modellmodifikation und online–Schätzung der Zustände eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems*. Forschungsbericht Nr. 21/96. MSRT. Gerhard–Mercator–Universität–GH Duisburg.
- Book, W. J.** 1984. Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms. *International Journal of Robotics Research* 3(3). 87–101.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano und G. Bastin.** 1996. *Theory of Robot Control*. London: Springer–Verlag.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1991. Closed–form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 21(4). 826–839.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1993. Regulation of flexible arms under gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9(4). 463–467.
- Fu, K. S., R. C. Gonzalez und C. S. G. Lee.** 1989. *Robotic: Control, Sensing, Vision and Intelligence (auf Spanisch)*. México, D. F.: McGraw–Hill.
- Göhler, W.** 1987. *Höhere Mathematik*. Leipzig: VEB Deutscher Verlag.
- Isermann, R.** 1992. *Identifikation dynamischer Systeme 1*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Meirovitch, L.** 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. New York: The Macmillan Company.
- Meirovitch, L.** 1975. *Elements of Vibration Analysis*. New York: McGraw–Hill.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München; Wien: Oldenbourg.
- Spong, M. W. und M. Vidyasagar.** 1989. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons.

- Stanway, J., I. Sharf und C. Damaren.** 1996. Validation of a dynamics simulation for a structurally flexible manipulator. *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation, IEEE*. Minneapolis, Minnesota, USA. 1959–1965.
- Yuan, B. S., W. J. Book und J. D. Huggins.** 1993. Dynamics of flexible manipulator arms: alternative derivation, verification, and characteristics for control. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 115. 394–404.

## A Analytisches Modell

In vorliegendem Anhang wird das im Abschnitt 2 berechnete Modell angegeben, das in Matrixform durch

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e + \mathbf{D} = \mathbf{K}_m \mathbf{U}$$

beschrieben wird, wobei  $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  ist. Die Matrizen  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}_m$  sind in Gl. (2.66) gegeben. Die Elemente der Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  lauten

$$h_{1010} = p_1 + p_2 c_2$$

$$h_{1020} = p_3 + p_4 c_2$$

$$h_{1011} = p_5 + p_6 c_2$$

$$h_{1021} = p_7 + p_8 c_2$$

$$h_{2020} = p_9$$

$$h_{2011} = p_{11} + p_{12} c_2$$

$$h_{2021} = p_{13}$$

$$h_{1111} = p_{15} + p_{16} c_2$$

$$h_{1121} = p_{17} + p_{18} c_2$$

$$h_{2121} = p_{19}.$$

Die Elemente der Matrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sind

$$c_{1010} = -p_2 s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{1020} = -s_2 (p_2 \dot{\theta}_1 + p_6 \dot{\delta}_{11} + 2p_4 \dot{\theta}_2 + p_8 \dot{\delta}_{21}) / 2$$

$$c_{1011} = -p_6 s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{1021} = -p_8 s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{2010} = s_2 (p_2 \dot{\theta}_1 + p_6 \dot{\delta}_{11} + p_8 \dot{\delta}_{21}) / 2$$

$$c_{2020} = 0$$

$$c_{2011} = s_2 (p_6 \dot{\theta}_1 + p_{16} \dot{\delta}_{11} + p_{18} \dot{\delta}_{21}) / 2$$

$$c_{2021} = s_2 (p_8 \dot{\theta}_1 + p_{18} \dot{\delta}_{11}) / 2$$

$$c_{1110} = -p_6 s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{1120} = -s_2 (p_6 \dot{\theta}_1 + p_{16} \dot{\delta}_{11} + 2p_{12} \dot{\theta}_2 + p_{18} \dot{\delta}_{21}) / 2$$

$$c_{1111} = -p_{16} s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{1121} = -p_{18} s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{2110} = -p_8 s_2 \dot{\theta}_2 / 2$$

$$c_{2120} = -s_2(p_8\dot{\theta}_1 + p_{18}\dot{\delta}_{11})/2$$

$$c_{2111} = -p_{18}s_2\dot{\theta}_2/2$$

$$c_{2121} = 0.$$

Die Parameter  $p_i$  definieren sich als

$$\begin{aligned} p_1 = & Ic_{11} + Ic_{12} + Ic_{21} + 2l_1M_2x_{s2} + Ic_{22} + l_1^2M_2 + 2M_3l_2l_1 + Ic_{31} + Ic_{32} + M_3l_1^2 \\ & + M_3l_2^2 + M_4l_1^2 + Ic_{41} + Ic_{42} + 2M_4l_2l_1 + M_4l_3^2 + 2M_4x_{s4}l_3 \end{aligned}$$

$$p_2 = 2M_3x_{s3}l_1 + 2M_3x_{s3}l_2 + 2M_4x_{s4}l_1 + 2M_4l_3l_1 + 2M_4l_3l_2 + 2M_4x_{s4}l_2$$

$$p_3 = Ic_{31} + Ic_{32} + Ic_{41} + Ic_{42} + M_4l_3^2 + 2M_4x_{s4}l_3$$

$$p_4 = p_2/2$$

$$\begin{aligned} p_5 = & \phi_{11}(l_1)l_1M_2 + \phi_{11}(l_1)M_2x_{s2} + \phi'_{11}(l_1)l_1M_2x_{s2} + 2M_4x_{s4}l_3\phi'_{11}(l_1) + M_4l_1\phi'_{11}(l_1)l_2 \\ & + M_4l_3^2\phi'_{11}(l_1) + M_4l_1\phi_{11}(l_1) + M_4l_2\phi_{11}(l_1) + M_4l_2^2\phi'_{11}(l_1) + Ic_{41}\phi'_{11}(l_1) \\ & + Ic_{42}\phi'_{11}(l_1) + w_{11} + Ic_{32}\phi'_{11}(l_1) + M_3l_1\phi_{11}(l_1) + M_3l_1\phi'_{11}(l_1)l_2 + M_3l_2\phi_{11}(l_1) \\ & + M_3l_2^2\phi'_{11}(l_1) + Ic_{31}\phi'_{11}(l_1) + Ic_{22}\phi'_{11}(l_1) + \phi'_{11}(l_1)Ic_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6 = & M_4x_{s4}l_1\phi'_{11}(l_1) + 2M_4x_{s4}l_2\phi'_{11}(l_1) + M_4l_1\phi'_{11}(l_1)l_3 + 2M_4l_3\phi'_{11}(l_1)l_2 + M_4l_3\phi_{11}(l_1) \\ & + M_4x_{s4}\phi_{11}(l_1) + M_3x_{s3}\phi_{11}(l_1) + 2M_3x_{s3}l_2\phi'_{11}(l_1) + M_3x_{s3}l_1\phi'_{11}(l_1) \end{aligned}$$

$$p_7 = w_{31} + \phi_{31}(l_3)M_4x_{s4} + Ic_{42}\phi'_{31}(l_3) + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}l_3 + \phi'_{31}(l_3)Ic_{41} + \phi_{31}(l_3)M_4l_3$$

$$p_8 = v_{31}l_2 + v_{31}l_1 + \phi_{31}(l_3)M_4l_1 + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}l_1 + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}l_2 + \phi_{31}(l_3)M_4l_2$$

$$p_9 = p_3$$

$$\begin{aligned} p_{11} = & Ic_{32}\phi'_{11}(l_1) + Ic_{31}\phi'_{11}(l_1) + 2M_4x_{s4}l_3\phi'_{11}(l_1) + M_4l_3^2\phi'_{11}(l_1) \\ & + Ic_{41}\phi'_{11}(l_1) + Ic_{42}\phi'_{11}(l_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{12} = & M_3x_{s3}\phi_{11}(l_1) + M_3x_{s3}l_2\phi'_{11}(l_1) + M_4x_{s4}l_2\phi'_{11}(l_1) \\ & + M_4l_3\phi'_{11}(l_1)l_2 + M_4l_3\phi_{11}(l_1) + M_4x_{s4}\phi_{11}(l_1) \end{aligned}$$

$$p_{13} = p_7$$

$$\begin{aligned}
p_{15} = & z_{11} + \phi'_{11}(l_1)^2 Ic_{21} + 2\phi'_{11}(l_1)\phi_{11}(l_1)M_2x_{s2} + \phi'_{11}(l_1)^2 Ic_{22} + \phi_{11}(l_1)^2 M_2 \\
& + M_3\phi_{11}(l_1)^2 + 2M_3\phi'_{11}(l_1)l_2\phi_{11}(l_1) + M_3\phi'_{11}(l_1)^2 l_2^2 + Ic_{32}\phi'_{11}(l_1)^2 + Ic_{31}\phi'_{11}(l_1)^2 \\
& + 2M_4x_{s4}\phi'_{11}(l_1)^2 l_3 + M_4\phi_{11}(l_1)^2 + M_4\phi'_{11}(l_1)^2 l_2^2 + Ic_{41}\phi'_{11}(l_1)^2 + Ic_{42}\phi'_{11}(l_1)^2 \\
& + M_4\phi'_{11}(l_1)^2 l_3^2 + 2M_4\phi'_{11}(l_1)l_2\phi_{11}(l_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{16} = & 2M_3x_{s3}\phi_{11}(l_1)\phi'_{11}(l_1) + 2M_3x_{s3}\phi'_{11}(l_1)^2 l_2 + 2M_4x_{s4}\phi'_{11}(l_1)^2 l_2 + 2M_4\phi'_{11}(l_1)l_3\phi_{11}(l_1) \\
& + 2M_4x_{s4}\phi_{11}(l_1)\phi'_{11}(l_1) + 2M_4\phi'_{11}(l_1)^2 l_3 l_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{17} = & w_{31}\phi'_{11}(l_1) + \phi'_{31}(l_3)Ic_{41}\phi'_{11}(l_1) + \phi_{31}(l_3)M_4\phi'_{11}(l_1)l_3 + \phi'_{11}(l_1)Ic_{42}\phi'_{31}(l_3) \\
& + \phi_{31}(l_3)M_4x_{s4}\phi'_{11}(l_1) + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}\phi'_{11}(l_1)l_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{18} = & v_{31}\phi'_{11}(l_1)l_2 + v_{31}\phi_{11}(l_1) + \phi_{31}(l_3)M_4\phi_{11}(l_1) + \phi_{31}(l_3)M_4\phi'_{11}(l_1)l_2 \\
& + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}\phi_{11}(l_1) + \phi'_{31}(l_3)M_4x_{s4}\phi'_{11}(l_1)l_2
\end{aligned}$$

$$p_{19} = z_{31} + \phi'_{31}(l_3)^2 Ic_{41} + 2\phi'_{31}(l_3)\phi_{31}(l_3)M_4x_{s4} + \phi'_{31}(l_3)^2 Ic_{42} + \phi_{31}(l_3)^2 M_4$$

Die Längen (in m), Massen (in kg) und Trägheitsmomente (in  $\text{kgm}^2$ ) des ersten Gliedes sind durch

$$l_1 = 0,43$$

$$l_{11} = 0,04$$

$$l_{12} = 0,4$$

$$a_1 = 0,02$$

$$b_1 = 0,04$$

$$M_{11} = 0,07$$

$$M_{12} = 0,228$$

$$M_1 = M_{11} + M_{12}$$

$$x_{11} = 0,01$$

$$x_{12} = 0,23$$

$$x_{s1} = (M_{11}x_{11} + M_{12}x_{12})/M_1$$

$$Ic_{11} = M_{11}l_{11}^2/12 + M_{12}l_{12}^2/12 + M_{11}x_{11}^2 + M_{12}x_{12}^2$$

$$Ic_{12} = M_{11}a_1^2/12$$

$$Ic_{13} = M_1b_1^2/12$$

gegeben. Die Längen (in m), Massen (in kg) und Trägheitsmomente (in  $\text{kgm}^2$ ) des zweiten Gliedes sind durch

$$l_2 = 0,087$$

$$\begin{aligned}
l_{ab} &= 0,057 \\
l_{2a} &= 0,03 \\
l_{21} &= 0,06 \\
a_2 &= 0,02 \\
b_2 &= 0,04 \\
d_2 &= 0,044 \\
e_2 &= 0,022 \\
f_2 &= 0,038 \\
r_{21} &= 0,015 \\
r_{23} &= 0,05 \\
r_{24} &= 0,075 \\
h_{21} &= 0,11 \\
h_{22} &= 0,08 \\
d_I &= 0,035 \\
d_{II} &= -0,02 \\
d_{III} &= 0,015 \\
d_{IV} &= -0,062 \\
M_{21} &= 0,1296 \\
M_{221} &= 0,250 \\
M_{222} &= 0,014 \\
M_{223} &= 0,2 \\
M_{224} &= 0,185 \\
M_{22} &= M_{221} + 3M_{222} + M_{223} + M_{224} \\
M_2 &= M_{21} + M_{22} \\
I_{xa} &= M_{21}(a_2^2 + b_2^2)/12 \\
I_{ya} &= M_{21}(b_2^2 + l_{21}^2)/12 \\
I_{za} &= M_{21}(a_2^2 + l_{21}^2)/12 \\
I_{xb1} &= M_{221}(3r_{21}^2 + h_{21}^2)/12 \\
I_{yb1} &= M_{221}(3r_{21}^2 + h_{21}^2)/12 \\
I_{zb1} &= M_{221}r_{21}^2/2 \\
I_{xb2} &= M_{222}(h_{22}^2/4 + 2f_2^2) \\
I_{yb2} &= M_{222}(h_{22}^2/4 + d_2^2 + 2e_2^2) \\
I_{zb2} &= 3M_{222}d_2^2 \\
I_{xb3} &= M_{223}r_{23}^2/4 \\
I_{yb3} &= M_{223}r_{23}^2/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{zb3} &= M_{223}r_{23}^2/2 \\
I_{xb4} &= M_{224}r_{24}^2/4 \\
I_{yb4} &= M_{224}r_{24}^2/4 \\
I_{zb4} &= M_{224}r_{24}^2/2 \\
z_b &= (M_{221}d_I + 3M_{222}d_{II} + M_{223}d_{III} + M_{224}d_{IV})/M_{22} \\
x_s &= M_{22}l_{ab}/M_2 \\
z_s &= M_{22}z_b/M_2 \\
d_z &= M_{221}d_I^2 + 3M_{222}d_{II}^2 + M_{223}d_{III}^2 + M_{224}d_{IV}^2 \\
I_{xs} &= I_{xa} + M_{21}z_s^2 + I_{xb1} + I_{xb2} + I_{xb3} + I_{xb4} + M_{22}(z_b - z_s)^2 - M_{22}z_b^2 + d_z \\
I_{ys} &= I_{ya} + M_{21}(z_s^2 + x_s^2) + I_{yb1} + I_{yb2} + I_{yb3} + I_{yb4} + M_{22}((l_{ab} - x_s)^2 + (z_b - z_s)^2) \\
&\quad - M_{22}z_b^2 + d_z \\
I_{zs} &= I_{za} + M_{21}x_s^2 + I_{zb1} + I_{zb2} + I_{zb3} + I_{zb4} + M_{22}(l_{ab} - x_s)^2 \\
x_{sz} &= l_{2a} + x_s \\
I_{xx2} &= I_{xs} \\
I_{yy2} &= I_{ys} + M_2x_{sz}^2 \\
I_{zz2} &= I_{zs} + M_2x_{sz}^2 \\
Ic_{21} &= (-I_{xx2} + I_{yy2} + I_{zz2})/2 \\
Ic_{22} &= (I_{xx2} - I_{yy2} + I_{zz2})/2 \\
Ic_{23} &= (I_{xx2} + I_{yy2} - I_{zz2})/2
\end{aligned}$$

gegeben. Die Längen (in m), Massen (in kg) und Trägheitsmomente (in  $\text{kgm}^2$ ) des dritten Gliedes sind durch

$$\begin{aligned}
l_3 &= 0,43 \\
l_{31} &= 0,04 \\
l_{32} &= 0,4 \\
a_3 &= 0,015 \\
b_3 &= 0,03 \\
M_{31} &= 0,05 \\
M_{32} &= 0,11 \\
M_3 &= M_{31} + M_{32} \\
x_{31} &= 0,01 \\
x_{32} &= 0,23 \\
x_{s3} &= (M_{31}x_{31} + M_{32}x_{32})/M_3 \\
Ic_{31} &= M_{31}l_{31}^2/12 + M_{32}l_{32}^2/12 + M_{31}x_{31}^2 + M_{32}x_{32}^2 \\
Ic_{32} &= M_{31}a_3^2/12 \\
Ic_{33} &= M_3b_3^2/12
\end{aligned}$$

gegeben. Die Längen (in m), Massen (in kg) und Trägheitsmomente (in  $\text{kgm}^2$ ) des vierten Gliedes sind durch

$$\begin{aligned}
 l_4 &= 0,035 \\
 l_{41} &= 0,07 \\
 a_4 &= 0,015 \\
 b_4 &= 0,03 \\
 r_4 &= 0,075 \\
 M_{41} &= 0,05 \\
 M_{42} &= 0,185 \\
 M_{43} &= 0,02 \\
 M_4 &= M_{41} + M_{42} + M_{43} \\
 h_{43} &= 0,066 \\
 z_{\text{ab}} &= -0,025 \\
 z_{\text{ac}} &= 0,048 \\
 x_{\text{s}4} &= 0,035 \\
 I_{xa} &= M_{41}(a_4^2 + b_4^2)/12 \\
 I_{ya} &= M_{41}(b_4^2 + l_{41}^2)/12 \\
 I_{za} &= M_{41}(a_4^2 + l_{41}^2)/12 \\
 I_{xb} &= M_{42}r_4^2/4 \\
 I_{yb} &= M_{42}r_4^2/4 \\
 I_{zb} &= M_{42}r_4^2/2 \\
 I_{xc} &= M_{43}h_{43}^2/12 \\
 I_{yc} &= M_{43}h_{43}^2/12 \\
 I_{zc} &= 0 \\
 z_{\text{s}} &= (M_{42}z_{\text{ab}} + M_{43}z_{\text{ac}})/M_4 \\
 I_{xs} &= I_{xa} + I_{xb} + I_{xc} + M_{41}z_{\text{s}}^2 + M_{42}(z_{\text{s}} - z_{\text{ab}})^2 + M_{43}(z_{\text{ac}} - z_{\text{s}})^2 \\
 I_{ys} &= I_{ya} + I_{yb} + I_{yc} + M_{41}z_{\text{s}}^2 + M_{42}(z_{\text{s}} - z_{\text{ab}})^2 + M_{43}(z_{\text{ac}} - z_{\text{s}})^2 \\
 I_{zs} &= I_{za} + I_{zb} + I_{zc} \\
 I_{xx4} &= I_{xs} \\
 I_{yy4} &= I_{ys} + M_4x_{\text{s}4}^2 \\
 I_{zz4} &= I_{zs} + M_4x_{\text{s}4}^2 \\
 Ic_{41} &= (-I_{xx4} + I_{yy4} + I_{zz4})/2 \\
 Ic_{42} &= (I_{xx4} - I_{yy4} + I_{zz4})/2 \\
 Ic_{43} &= (I_{xx4} + I_{yy4} - I_{zz4})/2
 \end{aligned}$$

gegeben. Die gleichmäßig verteilte Masse der Glieder beträgt

$$\rho_1 = 0,57 \text{ kg}$$

$$\rho_2 = 0,214 \text{ kg}.$$

Die Motorkostanten sind

$$r_1 = 66$$

$$r_2 = 43$$

$$J_{m1} = 6,437 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

$$J_{m2} = 1,25 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 21\Omega$$

$$K_{m1} = 0,04288 \text{ Nm/A}$$

$$K_{m2} = 0,04484 \text{ Nm/A}$$

$$K_{b1} = 0,0423 \text{ Vs/rad}$$

$$K_{b2} = 0,0448 \text{ Vs/rad.}$$

## B Experimentell bestimmte Parameter

Tabelle B.1 faßt die Parameter zusammen, die in Kapitel 3 experimentell bestimmt worden sind und sich nach der im Kapitel 4 eingefügten neuen Normalisierung geändert haben.

**Tabelle B.1:** Experimentell bestimmte Parameter des Robotersmodells

Parameter	Ermittelter Wert ( $z_{11} = 1 \text{ kg}$ , $z_{31} = 1 \text{ kg}$ )	Ermittelter Wert ( $z_{11} = 0,015^2 \text{ kg}$ , $z_{31} = 0,01^2 \text{ kg}$ )
$\omega_{11}$	7,86 rad/s	7,86 rad/s
$\omega_{31}$	24,59 rad/s	24,59 rad/s
$D_{10}$	6,6082 Nms/rad	6,6082 Nms/rad
$D_{20}$	0,1770 Nms/rad	0,1770 Nms/rad
$D_{11}$	4,1501 Ns/m	0,0623 Ns/m
$D_{31}$	9,1426 Ns/m	0,0914 Ns/m
$v_{11}$	0,388 kg	0,0058 kg
$w_{11}$	0,1091 kgm	0,0016 kgm
$v_{31}$	0,249 kg	0,00249 kg
$w_{31}$	0,0675 kgm	0,000675 kgm
$\phi_{11}(l_1)$	4,057	0,0609
$\phi'_{11}(l_1)$	$13,1485 \text{ m}^{-1}$	$0,1972 \text{ m}^{-1}$
$\phi_{31}(l_3)$	6,1854	0,061854
$\phi'_{31}(l_3)$	$16,834 \text{ m}^{-1}$	$0,16834 \text{ m}^{-1}$