

Analytische Modellierung eines Sattelzugfahrwerks

Pio Torre Flores
Andreas Breunig

Forschungsbericht Nr. 4/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Forschungsbericht wird die analytische räumliche Modellierung eines Sattelzugfahrwerks vorgestellt. Aufbauend auf den Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen, speziell im Hinblick auf eine analytische Herleitung der Differentialgleichungen eines mathematischen Modells, wird ein räumliches Fahrwerksmodell beschrieben. Die Bestimmung der das Bewegungsverhalten des Fahrwerks beschreibenden physikalischen Beziehungen wird mit dem Newton-Euler-Jourdain-Verfahren vorgenommen. Außerdem wird eine Möglichkeit zur Überprüfung der Korrektheit der Jacobi-Matrix des Mehrkörpersystems aufgezeigt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der analytischen Modellbildung	2
2.1 Spezielle Notationen	2
2.2 Bindungen	3
2.3 Verallgemeinerte Koordinaten	5
2.4 Drehbewegungen und Relativkinematik	5
2.5 Prinzipien und Verfahren der Mechanik	8
2.6 Das Newton–Euler–Jourdain–Verfahren	11
3 Räumliche Modellierung eines Sattelzugfahrwerks	14
4 Überprüfung der Korrektheit der Jacobi–Matrix	28
5 Zusammenfassung und Ausblick	36
6 Literaturverzeichnis	38
Anhang	40
A Transformationsmatrizen	40
B Elemente der Jacobi–Matrix des Fahrwerkmodells	42

Nomenklatur

Skalare Größen:

g	:	Erdbeschleunigungskonstante
f	:	Anzahl der Freiheitsgrade
$F_{Ei/j}$:	i -te Koordinate des Vektors der eingprägten Kräfte im j -ten Koordinatensystem
$F_{Zi/j}$:	i -te Koordinate des Vektors der Zwangskräfte im j -ten Koordinatensystem
$I_{xx}, I_{xx,i}$:	Hauptträgheitsmoment bzgl. der x -Achse
$I_{yy}, I_{yy,i}$:	Hauptträgheitsmoment bzgl. der y -Achse
$I_{zz}, I_{zz,i}$:	Hauptträgheitsmoment bzgl. der z -Achse
$\hat{J}_{Ti/j,k}$:	Element (j, k) der Teil-Jacobi-Matrix $\hat{\mathbf{J}}_{Ti}$
$\hat{J}_{Ri/j,k}$:	Element (j, k) der Teil-Jacobi-Matrix $\hat{\mathbf{J}}_{Ri}$
m_i	:	Masse des i -ten Körpers
$M_{Ei/j}$:	i -te Koordinate des Vektors der eingprägten Momente im j -ten Koordinatensystem
$M_{Zi/j}$:	i -te Koordinate des Vektors der Zwangsmomente im j -ten Koordinatensystem
q, q_i	:	verallgemeinerte Koordinate
t	:	Zeitvariable
x, x_i	:	allgemeine Koordinate (Wegkoordinate)
$x_{il/j}, x_{ir/j}$:	x -Koordinate zum i -ten Gelenkpunkt im j -ten Koordinatensystem
${}^i x, {}^i y, {}^i z$:	Koordinatenachsen des i -ten Koordinatensystems
x_{ZV}, y_{ZV}, z_{ZV}	:	verallgemeinerte Schwerpunktkoordinaten des Zugmaschinenvorderteils
y, y_i	:	allgemeine Koordinate (Wegkoordinate)
z, z_i	:	allgemeine Koordinate (Wegkoordinate)
$z_{il/j}, z_{ir/j}$:	z -Koordinate zum i -ten Gelenkpunkt im j -ten Koordinatensystem.

Vektoren und Matrizen:

\mathbf{e}_i	:	Einheitsvektor in i -Richtung
$\mathbf{F}_E, \mathbf{F}_{Ei}$:	Vektor der eingprägten Kräfte eines Teilkörpers
\mathbf{F}, \mathbf{F}_i	:	allgemeiner Kraftvektor
$\mathbf{F}_Z, \mathbf{F}_{Zi}$:	Vektor der Zwangskräfte eines Teilkörpers
\mathbf{h}_E	:	Vektor der eingprägten Kräfte und Momente eines Mehrkörpersystems
\mathbf{h}_Z	:	Vektor der Zwangskräfte und Zwangsmomente eines Mehrkörpersystems
\mathbf{h}_ω	:	Kraftvektor auf Grund von Drehbewegungen (Kreiselkräfte)
\mathbf{I}, \mathbf{I}_i	:	allgemeiner Trägheitstensor
$\mathbf{I}_{i,\text{diag}}$:	Trägheitstensor in Diagonalform

\mathbf{J}	:	allgemeine Jacobi-Matrix
$\mathbf{J}_R, \mathbf{J}_{R,i}$:	Rotations-Jacobi-Matrix (Drallsatz)
$\hat{\mathbf{J}}_{R,i}$:	Rotations-Teil-Jacobi-Matrix (Drallsatz)
$\mathbf{J}_T, \mathbf{J}_{T,i}$:	Translations-Jacobi-Matrix (Impulssatz)
$\hat{\mathbf{J}}_{T,i}$:	Translations-Teil-Jacobi-Matrix (Impulssatz)
$\mathbf{M}_E, \mathbf{M}_{Ei}$:	Vektor der eingepprägten Momente eines Teilkörpers
\mathbf{M}, \mathbf{M}_i	:	allgemeiner Momentenvektor
$\mathbf{M}_Z, \mathbf{M}_{Zi}$:	Vektor der Zwangsmomente eines Teilkörpers
$\mathbf{M}_{Zi,j}$:	Vektor der Zwangsmomente eines Gelenks
\mathbf{q}	:	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
\mathbf{r}	:	allgemeiner Vektor bzw. Ortsvektor
${}^{P1}\mathbf{T}_{P2}$:	Transformationsmatrix vom Koordinatensystem P2 in das System P1
\mathbf{v}, \mathbf{v}_i	:	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{x}, \mathbf{x}_i	:	Vektor der Körperkoordinaten
Θ	:	allgemeine Massenmatrix
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_i$:	allgemeiner Vektor der Winkelgeschwindigkeiten
$\mathbf{0}$:	$[3 \times 3]$ -Nullmatrix
$\mathbf{1}$:	$[3 \times 3]$ -Einheitsmatrix.

Griechische Buchstaben:

ϕ	:	allgemeiner Wankwinkel
ϕ_{AH}	:	Wankwinkel des Aufliegerhinterteils
ϕ_{AM}	:	Wankwinkel des Aufliegermittelteils
ϕ_{ZH}	:	Wankwinkel des Zugmaschinenhinterteils
ϕ_{ZV}	:	Wankwinkel des Zugmaschinenvorderteils
ψ	:	allgemeiner Gierwinkel
ψ_{AV}	:	Gierwinkel des Aufliegervorderteils
ψ_{ZV}	:	Gierwinkel des Zugmaschinenvorderteils
θ	:	allgemeiner Nickwinkel
θ_{AV}	:	Nickwinkel des Aufliegervorderteils
θ_{ZV}	:	Nickwinkel des Zugmaschinenvorderteils
ω_i	:	allgemeine Winkelgeschwindigkeit in i -Richtung.

Indizierungen:

$(\cdot)_{AH}$:	(\cdot) bezieht sich auf das Aufliegerhinterteil
$(\cdot)_{AM}$:	(\cdot) bezieht sich auf das Aufliegermittelteil
$(\cdot)_{AV}$:	(\cdot) bezieht sich auf das Aufliegervorderteil
$(\cdot)_{diag}$:	Matrix in Diagonalform
$(\cdot)_{f,i,j,k,l,m,n}$:	Laufindizes oder Bezeichnungsindizes

$(\cdot)_P$:	(\cdot) bezieht sich auf den Punkt P
$(\cdot)_S$:	(\cdot) bezieht sich auf den Schwerpunkt S
$(\cdot)_{ZH}$:	(\cdot) bezieht sich auf das Zugmaschinenhinterteil
$(\cdot)_{ZV}$:	(\cdot) bezieht sich auf das Zugmaschinenvorderteil
$^{AH}(\cdot)$:	kennzeichnet das Koordinatensystem des Aufliegerhinterteils
$^{AM}(\cdot)$:	kennzeichnet das Koordinatensystem des Aufliegermittelteils
$^{AV}(\cdot)$:	kennzeichnet das Koordinatensystem des Aufliegervorderteils
$I(\cdot)$:	kennzeichnet das Inertialkoordinatensystem
$^{i,ZWj}(\cdot)$:	kennzeichnet ein Zwischenkoordinatensystem ZW_j des i -ten Koordinatensystems
$^P(\cdot)$:	(\cdot) im P -ten Koordinatensystem beschrieben
$^{ZH}(\cdot)$:	kennzeichnet das Koordinatensystem des Zugmaschinenhinterteils
$^{ZV}(\cdot)$:	kennzeichnet das Koordinatensystem des Zugmaschinenvorderteils.

Operationen und Operatoren:

$\sum_{i=1}^m a_i$:	Summe aller a_i ($1 \leq i \leq m$)
$\int_K(\cdot)$:	Integral über alle (\cdot) des Körpers K
$d(\cdot)$:	infinitesimale Änderung von (\cdot)
$\delta(\cdot)$:	virtuelle Verschiebung von (\cdot)
$\dot{(\cdot)}$:	erste Zeitableitung der Größe (\cdot)
$\ddot{(\cdot)}$:	zweite Zeitableitung der Größe (\cdot)
$\tilde{(\cdot)}$:	Tilde-Operator, ersetzt $(\cdot) \times$
\times	:	Kreuzproduktoperator
$(\cdot)^T$:	transponierte Matrix zu (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$:	inverse Matrix zu (\cdot) .

Funktionen:

$\frac{d(\cdot)}{dt}$:	Ableitung von (\cdot) nach der Zeit
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\circ)}$:	partielle Ableitung von (\cdot) nach (\circ)
$\mathbf{f}(\cdot)$:	allgemeines Vektorfeld von (\cdot)
$f(\cdot)$:	allgemeine Funktion von (\cdot) .

Abkürzungen:

KHV	:	bezeichnet den Gelenkpunkt zwischen Vorder- und Hinterteil der Zugmaschine
KMV	:	bezeichnet den Gelenkpunkt zwischen Vorder- und Mittelteil des Aufliegers
KHM	:	bezeichnet den Gelenkpunkt zwischen Mittel- und Hinterteil des Aufliegers
KZ	:	bezeichnet den Gelenkpunkt zwischen Zugmaschinenhinter- und Aufliegervorderteil
P	:	bezeichnet einen allgemeinen Punkt eines starren Körpers
S	:	bezeichnet einen allgemeinen Schwerpunkt
SAH	:	bezeichnet den Schwerpunkt des Aufliegerhinterteils
SAM	:	bezeichnet den Schwerpunkt des Aufliegermitteleils
SAV	:	bezeichnet den Schwerpunkt des Aufliegervorderteils
SZH	:	bezeichnet den Schwerpunkt des Zugmaschinenhinterteils
SZV	:	bezeichnet den Schwerpunkt des Zugmaschinenvorderteils.

1 Einleitung

Die Entwicklung des Automobilbaus der letzten Jahre ist u. a. gekennzeichnet durch fortschreitende Verbesserung der Fahrsicherheit. Zielsetzung ist die Vermeidung von Unfällen und die Minderung der Unfallfolgen. Das begrenzte menschliche Reaktionsvermögen und die Reizüberflutung im heutigen Straßenverkehr macht den Fahrer zu einer potentiellen Schwachstelle im System Mensch–Fahrzeug. Dies erfordert eine weitere Verfolgung bereits beschrittener Wege zur Fahrerentlastung, also die Entwicklung von Systemen zur Steigerung der aktiven Sicherheit über die bereits auf dem Markt etablierten Systeme für Nutzkraftfahrzeuge wie ABS, ASR, die elektronisch geregelte Nutzfahrzeuggbremse (ELB), vollelektronische Retarder, elektronisch–pneumatische Schaltung (EPS) usw. hinaus (Göhring 1989). Da derartige Fahrsicherheitssysteme meist komplexer Natur sind und über eine hohe „elektronische Intelligenz“ verfügen, erfordert es ein erhebliches Maß an Entwicklungsarbeit bis zu ihrer Serienreife. Die dem Unternehmen damit anfallenden Kosten können effektiv nur reduziert werden, wenn ein großer Teil der Entwicklung durch die Nachbildung und Erprobung der realen Systeme in der Simulation am Computer erfolgt.

Im Mittelpunkt der Forschungstätigkeit im Automobilbau steht deshalb immer stärker die Modellbildung, der sich auch dieser Bericht widmet.

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen speziell im Hinblick auf eine analytische Herleitung der Differentialgleichungen vorgestellt. Das Newton-Euler-Jourdain-Verfahren (Pfeiffer 1992) stellt zur analytischen Generierung der das Systemverhalten beschreibenden Gleichungen eines komplexen Modells mit mehreren Freiheitsgraden eine erfolgversprechende Vorgehensweise dar und wird deshalb näher erläutert. Der 3. Abschnitt beschreibt dann aufbauend auf den zuvor erläuterten Grundlagen diese Methode anhand der Modellierung des Fahrwerks eines Sattelzuges. Abschnitt 4 zeigt eine Möglichkeit zur Überprüfung der generierten Differentialgleichungen. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2 Grundlagen der analytischen Modellbildung

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der analytischen Modellbildung eines mechanischen Mehrkörpersystems, auf denen die Modellierung eines Sattelzugfahrwerkes aufbaut, beschrieben. Unter der Modellbildung ist hierbei eine theoretische Herleitung der das interessierende Systemverhalten beschreibenden Differentialgleichungen zu verstehen.

2.1 Spezielle Notationen

In Anlehnung an Schwarz (1991) wird zur Definition der Jacobi-Matrix nachfolgende Notation vorgegeben. Ein Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ hat die Form:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Es bildet den \mathbb{R}^n in den Vektorraum \mathbb{R}^m ab. Wenn das Vektorfeld für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, dann wird unter der Abkürzung $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

zu dem Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ verstanden.

„Physikalische“ Vektoren, wie beispielsweise Geschwindigkeiten oder Winkelbeschleunigungen, können in verschiedenen Koordinaten und bezüglich unterschiedlicher Koordinatensysteme angegeben werden. Um eine einheitliche und eindeutige Interpretation der in diesem Bericht beschriebenen Vektoren zu ermöglichen, ist nachfolgende spezielle Notation benutzt worden. Die Indizierungen eines beliebigen Vektors \mathbf{r} , dargestellt in der Form

$${}^k_l \mathbf{r}_{p,u} \quad (2.3)$$

bedeuten:

- k : das Koordinatensystem, in dem der Vektor beschrieben ist,
- l : das Bezugssystem (beispielsweise bei relativen Größen),
- p : der Punkt, den der Vektor beschreibt und
- u : der Startpunkt des Vektors.

Wird auf die Angabe der Indizierung l verzichtet, so bezieht sich der Vektor auf das jeweilige Inertialsystem des betrachteten mechanischen Systems. Keine Angabe an der Stelle der Indizierung k bedeutet, daß der Vektor in den Komponenten des inertialen Koordinatensystems beschrieben ist. Unter einem inertialen Koordinatensystem ist ein System von orthogonalen Einheitsvektoren (${}^1\mathbf{e}_x, {}^1\mathbf{e}_y, {}^1\mathbf{e}_z$) zu verstehen, dessen Basisvektoren keine zeitliche Änderung erfahren. Das Inertialsystem befindet sich demzufolge gegenüber dem Anschauungsraum des Betrachters in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter, translatorischer Geschwindigkeit. Das in diesem Bericht angegebene Inertialsystem wird mit I und dessen Komponenten werden mit ${}^1x, {}^1y$ und 1z bezeichnet. Wird auf die Angabe des Index u verzichtet, so ist der Koordinatenursprung des Bezugssystems Startpunkt. Zum besseren Verständnis sollen noch einige Beispiele angegeben werden:

- $\ddot{\mathbf{r}}_S$: Absolutbeschleunigung des Punktes S
- ${}_2\dot{\mathbf{r}}_S$: Relativgeschwindigkeit des Punktes S bezüglich des Koordinatensystems 2
- ${}_2\dot{\mathbf{r}}_{S,K}$: Relativgeschwindigkeit des Differenzvektors ${}_2\mathbf{r}_S - {}_2\mathbf{r}_K$ bezüglich des Koordinatensystems 2
- ${}^2\dot{\mathbf{r}}_S$: Absolutgeschwindigkeit des Punktes S in den Komponenten des Koordinatensystems 2.

2.2 Bindungen

Die einzelnen Teilkörper eines Mehrkörpersystems sind durch Schub- oder Drehgelenke oder Kombinationen aus beiden miteinander verbunden. Diese Translations- bzw. Rotationsgelenke werden als Bindungen bezeichnet. Der Begriff Bindungen bleibt aber nicht auf Gelenke beschränkt. Jede Einschränkung der mechanischen Freiheitsgrade eines Systems resultiert aus einer Bindung.

Im folgenden sollen nur noch zweiseitige Bindungen betrachtet werden, da sich die Körperbewegung bei einer einseitigen Bindung aus einer gebundenen Bewegung mit einer zweiseitigen Bindung und einer freien ungebundenen Bewegung zusammensetzen läßt. Die Behandlung freier Bewegungen ist relativ einfach.

Bindungen können nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden (Szabó 1975, Hiller 1983, Pfeiffer 1992). Zum einen besteht die Unterscheidungsmöglichkeit in *geometrische* und *kinematische* Bindungen. Geometrische Bindungen beschränken die Lage des Systems. Beispiele derartiger Bindungstypen sind Schub- und Drehgelenke. Kinematische Bindungen dagegen beschränken die Geschwindigkeit des Systems. Ein häufig aufgeführtes Beispiel dafür ist die freie Bewegung eines Reifens auf einer Ebene. Beim Abrollen des Reifens ohne Gleiten läßt sich eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Spurpunktes und der Rotationsgeschwindigkeit des Reifens aufstellen.

Da diese Geschwindigkeitsgleichung zusätzlich nicht integrierbar ist, also die kinematische nicht in eine geometrische Bindung überführt werden kann, ist damit eine weitere Unterteilung von Bindungen möglich. Kinematische Bindungen, die nicht integrierbar sind,

werden als *nichtholonome* Bindungen bezeichnet. Das gesamte Mehrkörpersystem ist dann ein nichtholonomes System. Kann die Integration durchgeführt werden, so wird die Bindung *holonom* genannt. Alle bei der Sattelzugmodellierung auftretenden Bindungen sind holonom, somit kann das holonome Sattelzugsystem ausschließlich durch geometrische Bindungen beschrieben werden.

Eine dritte Klassifizierung ist in *skleronome* und *rheonome* Bindungen möglich. Rheonome Bindungen sind durch ihre Zeitabhängigkeit gekennzeichnet, skleronome Bindungen sind zeitinvariant. Die bei den hier vorgenommenen Modellbildungen auftretenden Bindungen sind immer skleronom.

Bei der Betrachtung von Bindungen ist von einer Idealisierung auszugehen, der sogenannten *idealen* Bindung (Hiller 1983). Eine Bindung wird als ideal bezeichnet, wenn die Arbeit der Zwangs- oder Reaktionskräfte auf beliebigen, der Bindung entsprechenden virtuellen Verschiebungen gleich Null ist (siehe Abbildung 2.1). Mit den Zwangs- bzw. den Reaktionskräften sind diejenigen Kräfte gemeint, die beim Freischneiden der Bindung die in den Bindungspunkten auftretenden Kräfte repräsentieren. Im Gegensatz dazu werden die Kräfte, die dem mechanischen System aufgeprägt sind (beispielsweise Massenkräfte, äußere Kräfte, Federkräfte usw.), als eingeprägte Kräfte bezeichnet. Bindungen schränken die virtuellen Verschiebungen, infinitesimale Verschiebungen des Systems, ein. Nur noch in den von den l Zwangsbedingungen der Bindungen aufgespannten l Tangentialflächen des Arbeitsraumes sind die virtuellen Verschiebungen möglich.

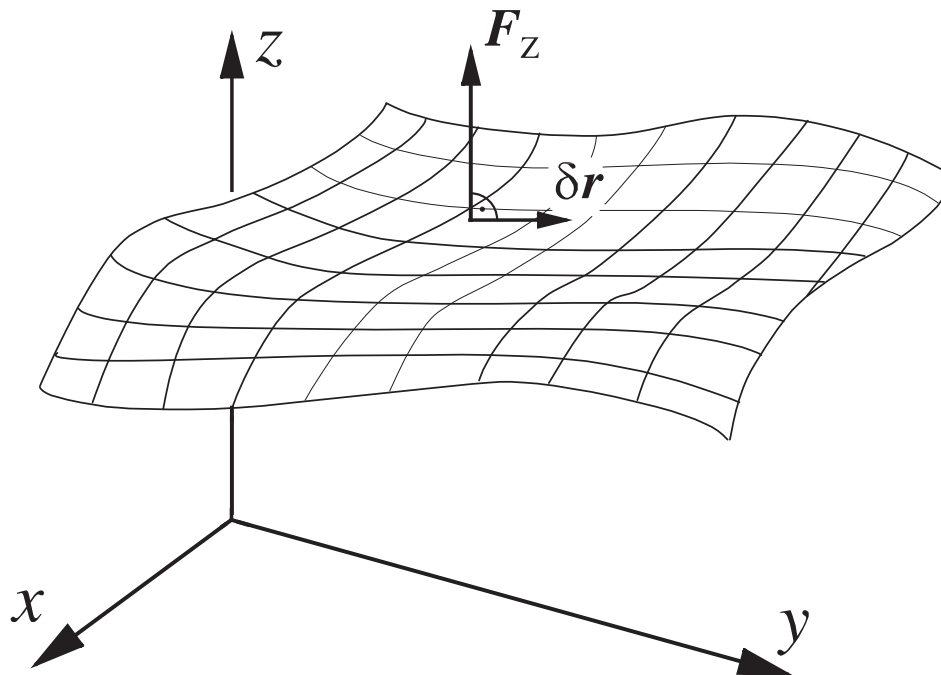


Bild 2.1: Tangentialfläche der Zwangsbedingungen

2.3 Verallgemeinerte Koordinaten

Bei einem räumlichen holonomen System seien n starre Körper durch $3n$ kartesische Koordinaten und $3n$ Winkelkoordinaten im Arbeitsraum beschrieben. Liegen h Zwangsbedingungen der holonomen Bindungen vor (bei der Sattelzugmodellbildung immer geometrische Bindungen), so sind nur noch $l = 6n - h$ Koordinaten unabhängig. Diese l verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_l können nach den geometrischen oder physikalischen Gegebenheiten individuell gewählt werden. Sie müssen:

1. unabhängig sein,
2. die Lage des Systems eindeutig beschreiben,
3. mit den Bindungen verträglich sein.

Da die Anzahl l der verallgemeinerten Koordinaten genau mit der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems übereinstimmt, wird häufig auch der Begriff der Minimalkoordinaten zu ihrer Bezeichnung benutzt. Zur vollständigen Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines Systems mit f Freiheitsgraden ist mindestens ein Satz von f Minimalkoordinaten notwendig, alle darüber hinaus definierten Koordinaten sind von den f verallgemeinerten Koordinaten abhängig.

2.4 Drehbewegungen und Relativkinematik

Die Drehbewegung eines starren Körpers kann durch drei Winkel, entsprechend den drei Freiheitsgraden der räumlichen Drehung beschrieben werden. In der Fahrzeugtechnik hat sich die Darstellung von Drehungen in den KARDAN–Winkeln durchgesetzt (Popp und Schiehlen 1993, Kortüm und Lugner 1994). Mit den KARDAN–Winkeln wird die räumliche Drehung in drei nacheinander ausgeführten, ebenen Drehungen um die Winkel ψ , θ und ϕ vollzogen. Ausgangspunkt der Drehbewegung eines Körpers um einen Fixpunkt ist ein raumfestes Koordinatensystem 0x , 0y und 0z , dessen Drehung um den Ursprung stattfindet (siehe Bild 2.2). Die Reihenfolge der Drehungen der KARDAN–Winkel lautet:

1. Das raumfeste Koordinatensystem $({}^0x, {}^0y, {}^0z)$ geht durch die Drehung um die 0z -Achse mit dem **Gierwinkel** ψ in das ${}^1x, {}^1y, {}^1z$ -System über.
2. Das ${}^1x, {}^1y, {}^1z$ -System geht durch die Drehung um die 1y -Achse mit dem **Nickwinkel** θ in das ${}^2x, {}^2y, {}^2z$ -System über.
3. Das ${}^2x, {}^2y, {}^2z$ -System geht durch die Drehung um die 2x -Achse mit dem **Wankwinkel** ϕ in das körperfeste Koordinatensystem ${}^3x, {}^3y$ und 3z über.

Die resultierende Drehung kann durch eine sogenannte Transformationsmatrix 3T_0 beschrieben werden. Diese Matrix ist das Produkt dreier Matrizen, die jeweils eine ebene Teildrehung um einen KARDAN–Winkel darstellen (Hiller 1983, Rill 1994). Wichtiger für

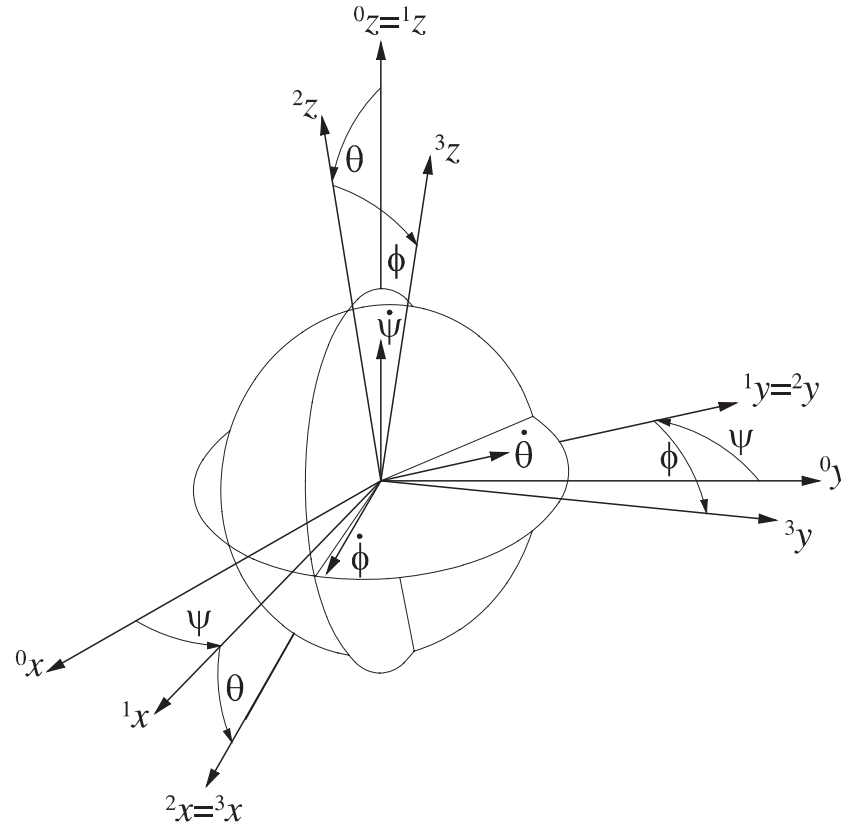


Bild 2.2: Zur Darstellung der KARDAN-Winkel

die kinematische Beschreibung mechanischer Mehrkörpersysteme ist aber die umgekehrte Transformation vom körperfesten in das raumfeste System. Die zugehörige Matrix ${}^0\mathbf{T}_3$ lautet ausführlich:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi & +\sin \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ & +\cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi \\ & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Indizierung einer allgemeinen Transformationsmatrix ${}^K\mathbf{T}_L$ besagt, daß die Matrix eine Transformation eines Vektors ${}^L\mathbf{r}_S$, der in den Koordinaten des Systems $({}^Lx, {}^Ly, {}^Lz)$ dargestellt ist, in denselben Vektor ${}^K\mathbf{r}_S$, angegeben in den anderen Koordinaten $({}^Kx, {}^Ky, {}^Kz)$, beschreibt. Die mathematische Vorgehensweise dieser Koordinatenumwandlung wird mit

$${}^K\mathbf{r}_P = {}^K\mathbf{T}_L {}^L\mathbf{r}_P \quad (2.5)$$

angegeben. Da die Transformationsmatrix eine orthogonale Matrix ist (Pfeiffer 1992) (Definition der Orthogonalität siehe Bronstein und Semendjajew (1989, 155)), kann die

meist aufwendige Invertierung durch ein Transponieren ersetzt werden. Damit folgt für die Rücktransformation:

$${}^L\mathbf{r}_P = ({}^K\mathbf{T}_L)^T {}^K\mathbf{r}_P = {}^L\mathbf{T}_K {}^K\mathbf{r}_P . \quad (2.6)$$

Mit den KARDAN–Winkeln können außer der Drehung eines starren Körpers auch dessen Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung beschrieben werden. Die Hinzunahme der zeitlichen Ableitungen von ψ , θ und ϕ führt auf die kinematischen Kardangleichungen in Koordinaten des körperfesten Systems 3 (Hiller 1983):

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$${}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos\theta\dot{\theta} & 0 & 0 \\ -\sin\theta \sin\phi\dot{\theta} + \cos\theta \cos\phi\dot{\phi} & -\sin\phi\dot{\phi} & 0 \\ -\sin\theta \cos\phi\dot{\theta} - \sin\theta \cos\phi\dot{\phi} & -\cos\phi\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} . \quad (2.8)$$

Mit Hilfe der KARDAN–Winkel und der kinematischen Kardangleichungen können nunmehr Beziehungen der Relativkinematik aufgestellt werden. Nach Abbildung 2.3 ergibt sich die Absolutgeschwindigkeit eines Punktes P zu

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{P,S} \quad (2.9)$$

unter der Bedingung, daß der Punkt P seine Lage bezüglich des Punktes S nicht ändert. Diese Voraussetzung ist bei starren Körpern gegeben. Damit läßt sich die Beschleunigung des Punktes P mit

$$\ddot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_S + \boldsymbol{\omega}_S \times (\boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{P,S}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \times \mathbf{r}_{P,S} \quad (2.10)$$

angeben. In Beziehung (2.10) bedeuten:

- $\dot{\mathbf{v}}_S$: translatorische Beschleunigung des Körperschwerpunktes,
- $\boldsymbol{\omega}_S \times (\boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{P,S})$: Zentripetalbeschleunigung,
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_S \times \mathbf{r}_{P,S}$: beschleunigte Rotation des Körpers.

Die Beziehungen (2.9) und (2.10) erlauben eine systematische kinematische Analyse eines Mehrkörpersystems, da sie die Möglichkeit geben, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von durch ideale Bindungen miteinander verkoppelten Teilkörpern relativ zueinander anzugeben. Die Vorgehensweise der kinematischen Beschreibung entspricht einem schrittweisen Aufstellen der Gleichungen ausgehend vom Inertialsystem zum ersten Teilkörper, von diesem auf den zweiten Körper und dann sukzessive weiter auf das

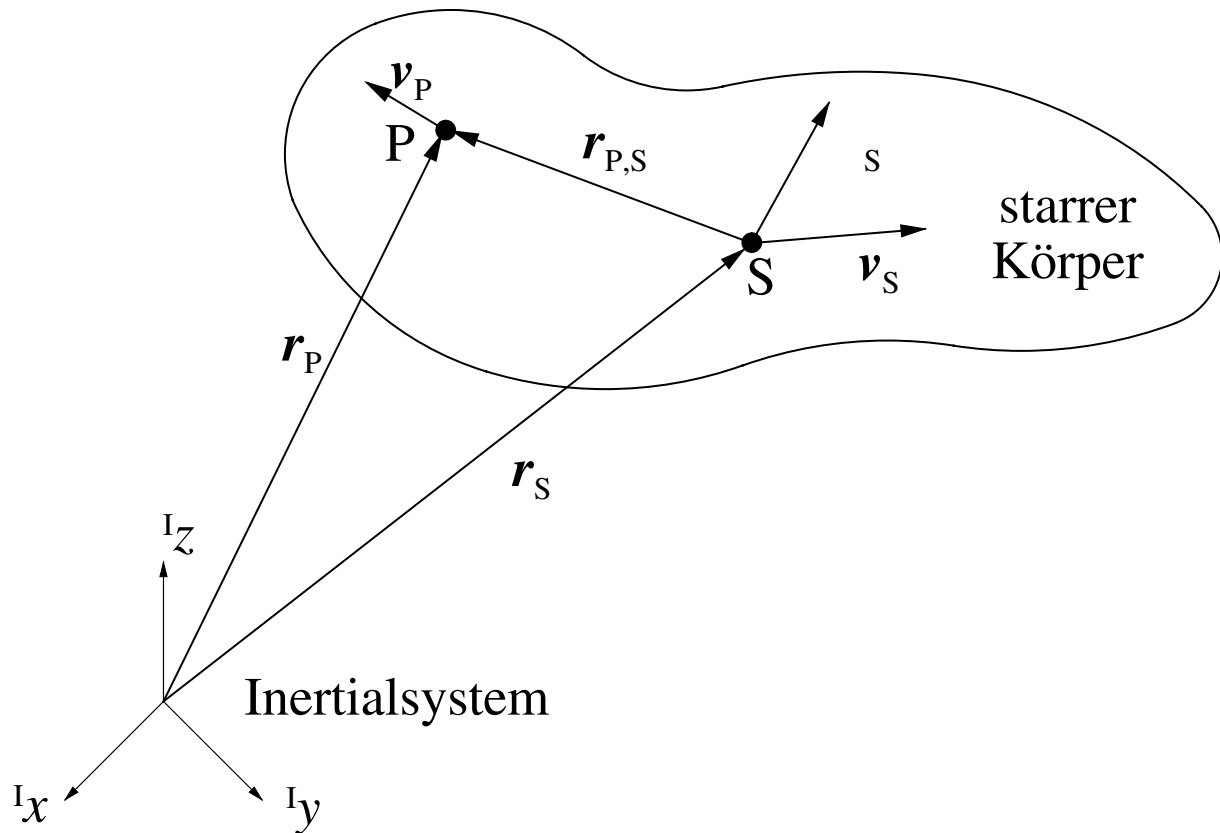


Bild 2.3: Zur Relativkinematik

jeweils nachfolgende Teilsystem bis zum letzten Körper. Dieser Algorithmus kann jedoch nur bei Systemen, die in der sogenannten Baumstruktur vorliegen, benutzt werden. Unter der Baumstruktur ist die topologische Struktur einer offenen kinematischen Kette zu verstehen, die Mehrkörpersysteme charakterisiert, bei dem jedem Teilkörper genau ein Vorgängerkörper und ein Vorgängergelenk (Bindung) zugeordnet werden kann. Mehrkörpersysteme oder auch Teilbereiche von diesen, die diese Eigenschaft nicht aufweisen, werden durch eine geschlossene kinematische Kette modelliert, der sogenannten Schleifenstruktur (Hiller 1983). Solche kinematischen Schleifen treten häufig bei komplexeren mechanischen Systemen wie beispielsweise einer McPherson-Vorderradaufhängung auf (Schnelle 1990). Eine Möglichkeit zur Umwandlung von Strukturen mit geschlossenen kinematischen Ketten in eine Baumstruktur wird beispielsweise in Schieschke (1988) gezeigt.

2.5 Prinzipien und Verfahren der Mechanik

Mechanische Problemstellungen, wie in diesem Fall die Modellierung eines Sattelzugfahrwerks, können auf unterschiedlichste Weise gelöst werden. Allen Lösungsansätzen gemeinsam ist der Ausgangspunkt der Herleitung eines Verfahrens der Mechanik, die Fundamentalgleichung der Dynamik (Hiller 1983):

Satz 2.1

Bei der Bewegung eines mechanischen Systems mit idealen Bindungen ist die Summe der Arbeiten, die von den eingepprägten Kräften $\mathbf{F}_{E,i}$ und den Trägheitskräften $-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ auf beliebigen virtuellen Verschiebungen geleistet werden, gleich Null.

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_{E,i} - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{für } n \text{ Massenpunkte}) . \quad (2.11)$$

□

Direkt mit der Fundamentalgleichung, in der die Zwangs- oder Reaktionskräfte nicht auftauchen, ist das Prinzip von d'Alembert verknüpft (Szabó 1975, Pfeiffer 1992):

Satz 2.2

Zwangskräfte leisten keine Arbeit.

$$\int_{\mathbb{K}} (d\mathbf{F}_Z)^T \delta \mathbf{r} = 0 \quad (2.12)$$

□

Auch das Prinzip Jourdain läßt sich aus Gleichung (2.11) ableiten (Szabó 1975, Pfeiffer 1992):

Satz 2.3

Zwangskräfte erbringen keine Leistung.

$$\int_{\mathbb{K}} (d\mathbf{F}_Z)^T \delta \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.13)$$

□

Die Gleichung (2.11) enthält insbesondere auch das zweite Newtonsche Axiom („lex secunda“ von Newton (1642–1727) (Szabó 1979)):

Axiom 2.1

Die auf ein Massenelement wirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung seiner Bewegungsgröße. □

Für den Schwerpunkt S eines starren Körpers bezüglich eines Inertialsystems läßt sich dieses Axiom mathematisch folgendermaßen formulieren (Pfeiffer 1992):

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_{S,i} - \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (\text{für den } i\text{-ten starren Körper}) . \quad (2.14)$$

Diese Gleichung wird als Impulssatz bezeichnet. Eine weitere, sehr bekannte Beziehung der Mechanik ergibt sich, wenn die Aussage der Fundamentalgleichung auf starre Körper übertragen wird und das Boltzmannsche Axiom (Becker und Bürger 1975) und die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors vorausgesetzt werden (Pfeiffer 1992). Der Drallsatz für einen starren Körper bezüglich seines im Schwerpunkt S befindlichen, körperfesten $({}^i x, {}^i y, {}^i z)$ -Koordinatensystems lautet:

$${}^i \mathbf{I}_{S,i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}^i \mathbf{I}_{S,i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i - {}^i \mathbf{M}_i = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

Dabei stellt ${}^i\mathbf{I}_{S,i}$ die Trägheitsmatrix bezüglich des Schwerpunktes S dar. Wenn die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, so hat ${}^i\mathbf{I}_{S,i}$ Diagonalform und die Elemente der Hauptdiagonalen sind die Hauptträgheitsmomente. Eine allgemeine Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_{S,\text{diag}}$ in Diagonalform kann mit

$$\mathbf{I}_{S,\text{diag}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

angegeben werden. Zur kompakteren Darstellung der Gleichungen wird in der Mechanik häufig der Tilde-Operator verwendet. Damit kann beispielsweise das vektorielle Produkt $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P,S}$ durch $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_{P,S}$ ausgedrückt werden. Der Ausdruck $(\boldsymbol{\omega} \times)$ wird durch eine schiefsymmetrische Matrix $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ ersetzt, die folgende Gestalt besitzt:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Die Herleitung des Drallsatzes gestaltet sich sehr umfangreich, vertiefende Informationen können Becker und Bürger (1975) entnommen werden.

Zur Extraktion der Bewegungsgleichung mechanischer Systeme stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Zu den Bekanntesten zählen:

- Lagrangesche Gleichungen erster Art,
- Lagrangesche Gleichungen zweiter Art,
- Kanonische Gleichungen von Hamilton,
- Appellsche Gleichungen,
- Newton–Euler–Jourdain–Verfahren sowie
- Methode der Kinematischen Differentiale.

Alle hier aufgezählten Verfahren führen auf ein System von im allgemeinen nichtlinearen Bewegungsdifferentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung, die linear in den Beschleunigungen und nichtlinear in den Geschwindigkeits- und Lagekoordinaten sind.

Das Newton–Euler–Jourdain–Verfahren (Pfeiffer 1992) wird von Kortüm und Lugner (1994) und Popp und Schiehlen (1993) für die analytische Herleitung der Differentialgleichungen von Mehrkörpersystemen mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden empfohlen und ist bereits bei der Herleitung eines ebenen Modells eines Sattelzugfahrwerks erfolgreich angewendet worden (Torre Flores u. a. 1997). Da das Verfahren weniger bekannt ist als beispielsweise die Lagrangeschen Gleichungen erster und zweiter Art, erfolgt eine etwas ausführlichere Darstellung.

2.6 Das Newton–Euler–Jourdain–Verfahren

Bei dieser Methode wird jeder Teilkörper des Systems gedanklich freigeschnitten und dann der Impuls- und Drallsatz angewendet. Ausgangspunkt zur Herleitung dieses Verfahrens bildet das zweite Newtonsche Axiom (2.1) (Szabó 1979). Dieses Axiom wird nun auf ein Massenelement dm eines materiellen Körpers angewendet, das beliebigen Zwangsbedingungen, also Einschränkungen seiner Bewegungsfreiheit, unterworfen ist. Die Gleichung für dieses Massenelement folgt dann zu:

$$\ddot{\mathbf{r}}dm = d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_E + d\mathbf{F}_Z . \quad (2.18)$$

Für den gesamten Körper gilt:

$$\int_K \ddot{\mathbf{r}}dm = \int_K d\mathbf{F} = \int_K (d\mathbf{F}_E + d\mathbf{F}_Z) . \quad (2.19)$$

Wird Gleichung (2.18) nach den Zwangskräften umgestellt und in (2.13) eingesetzt, folgt weiter:

$$\int_K (d\mathbf{F}_E - \ddot{\mathbf{r}}dm)^T \delta \dot{\mathbf{r}} = 0 . \quad (2.20)$$

Nun müssen die physikalischen Größen absolute Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (Gleichung (2.9)) und absolute Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ (Gleichung (2.10)) (im Inertialsystem) in der vorangegangenen Gleichung spezifiziert werden. Gelingt es, einen Satz von verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} bzw. verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ für das analysierte System zu finden, so lassen sich die allgemeinen Bewegungsgrößen \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ als Funktion der verallgemeinerten Größen angeben. Für skleronome Systeme, deren Bindungen zeitinvariant sind, kann $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ und $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ geschrieben werden. Diese Beziehungen entsprechen gerade den Zwangsbedingungen durch die Bindungen. Die zeitliche Ableitung $\dot{\mathbf{r}}$ kann nunmehr mit

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.21)$$

angegeben werden. Damit läßt sich sofort die Beziehung

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (2.22)$$

herleiten, mit der sich die gesuchte virtuelle Geschwindigkeit $\delta \dot{\mathbf{r}}$ aus Gleichung (2.20) zu

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \dot{\mathbf{q}} \quad (2.23)$$

ergibt. Wird die Geschwindigkeitsgleichung (2.9) zusammen mit Gleichung (2.23) sowie die Gleichung der Beschleunigung (2.10) in die Folgerung aus dem Jourdain'schen Prinzip (Gleichung (2.20)) eingesetzt, so resultiert daraus das nachfolgende Integral über den betrachteten starren Körper:

$$\int_K \delta \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{r}}_{P,S}^T \right]^T \left([\dot{\mathbf{r}}_S + (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{r}_{P,S}]dm - d\mathbf{F}_E \right) = \mathbf{0} . \quad (2.24)$$

Da \mathbf{q} der Vektor der Minimalkoordinaten ist und diese auf Grund der Berücksichtigung der Zwangsbedingungen unabhängig voneinander sind, sind auch die virtuellen verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\delta\dot{\mathbf{q}}$ unabhängig und frei wählbar. Werden nun noch die Abkürzungen

$$\mathbf{F}_E = \int_K d\mathbf{F}_E \quad , \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{M}_E = \int_K \tilde{\mathbf{r}}_{P,S} d\mathbf{F}_E \quad \text{und} \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{I}_S = \int_K \tilde{\mathbf{r}}_{P,S} \tilde{\mathbf{r}}_{P,S} dm \quad (2.25c)$$

eingeführt, wobei der Massenmittelpunkt den Bezugspunkt darstellt, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichungsform

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T [m\ddot{\mathbf{r}}_S - \mathbf{F}_E] + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T [\mathbf{I}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_E] = \mathbf{0} \quad . \quad (2.26)$$

Darin bedeuten:

- \mathbf{F}_E : eingeprägte Kräfte,
- \mathbf{M}_E : eingeprägte Momente,
- \mathbf{I}_S : Trägheitstensor bezogen auf den Schwerpunkt S .

Letztendlich führt die Einführung der Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}_T = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \quad \text{und} \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{J}_R = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \quad (2.27b)$$

zu der kompakten Form

$$\mathbf{J}_T^T [m\ddot{\mathbf{r}}_S - \mathbf{F}_E] + \mathbf{J}_R^T [\mathbf{I}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_E] = \mathbf{0} \quad . \quad (2.28)$$

Wie kann Gleichung (2.28) interpretiert werden? Die Zeilenvektoren der Jacobi-Matrizen stellen die Gradienten bezüglich der Minimalkoordinaten der Zwangsbedingungen (Bindungen) dar, die zuvor durch $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ und $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definiert wurden. Die Multiplikation von \mathbf{J}_T mit dem Impulssatz und von \mathbf{J}_R mit dem Drallsatz führt zu einer Reduktion der in $(m\ddot{\mathbf{r}}_S - \mathbf{F}_E)$ und $(\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_E)$ betrachteten Kräfte und Momente auf diejenigen Kräfte und Momente, die dem starren Körper Beschleunigungen in den durch die Bindungen erlaubten Richtungen erteilen. Genau jene Kräfte und Momente, die senkrecht auf der von den Zwangsbedingungen der Bindungen erzeugten Tangentialfläche stehen (siehe Abbildung 2.1), und damit geometrisch gesehen im rechten Winkel zu den Gradienten der Jacobi-Matrizen stehen, werden aus den Differentialgleichungen eliminiert.

Eine weitere Eigenschaft der obigen Gleichung ist, daß die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_T mit dem Impulssatz in raumfesten (inertial) und die Matrix \mathbf{J}_R in körperfesten Koordinaten ausgewertet werden können. Dies liegt in der formalen Tatsache begründet, daß jede Zeile der Jacobi-Matrizen in Gleichung (2.28) ein Skalarprodukt mit der entsprechenden Vektordifferentialgleichung des Impuls- bzw. Drallsatzes bildet. Das Skalarprodukt eines Gradienten mit einem Vektor ist nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängig, wenn Gradient und zugehöriger Vektor im gleichen Koordinatensystem angeschrieben sind. Die Gradienten des Zeilenvektors von \mathbf{J}_T und \mathbf{J}_R müssen also jeweils im selben System von Koordinaten angegeben werden wie der zugehörige Impuls- oder Drallsatz.

Wird ein aus mehreren starren Einzelkörpern bestehendes System betrachtet, so läßt sich Gleichung (2.28) leicht erweitern, indem in den Beziehungen (2.19) bis (2.28) jeweils über alle i Körper des Mehrkörpersystems summiert wird. Die verwendeten physikalischen Größen erhalten den Index i , und die Summation erstreckt sich vom ersten bis zum n -ten Körper. Die Einführung der Abkürzungen

$$\mathbf{F}_{E,i} = \int_{K,i} d\mathbf{F}_{E,i} \quad , \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{M}_{E,i} = \int_{K,i} \tilde{\mathbf{r}}_{P,S,i} d\mathbf{F}_{E,i} \quad \text{und} \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{I}_{S,i} = - \int_{K,i} \tilde{\mathbf{r}}_{P,S,i} \tilde{\mathbf{r}}_{P,S,i} dm \quad (2.29c)$$

erlaubt wiederum die kompakte Angabe

$$\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{J}_{T,i}^T [m_i \ddot{\mathbf{r}}_{S,i} - \mathbf{F}_{E,i}] + \mathbf{J}_{R,i}^T [\mathbf{I}_{S,i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{S,i} \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{M}_{E,i}] \right) = \mathbf{0} . \quad (2.30)$$

Die vorgestellte Methode erlaubt ein relativ effektives und transparentes Formulieren der Bewegungsgleichungen eines Mehrkörpersystems. Die in den Teilkörpergleichungen ursprünglich enthaltenen Zwangskräfte sind eliminiert, so daß in den Endgleichungen nur noch die eingepprägten Kräfte und Momente berücksichtigt werden müssen. Nach der globalen Auswertung der gesamten Gleichung kann zur Berechnung der Schnittkräfte wieder in die Teilkörpergleichungen übergegangen werden. Vertiefende Informationen zu der hier vorgestellten Methode können Pfeiffer (1992) entnommen werden.

Problematisch ist die Herleitung der Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der verallgemeinerten Größen. Sind diese Geschwindigkeiten ermittelt, so müssen noch die partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten gebildet werden. Diese Vorgehensweise ist sehr aufwendig, speziell bei räumlichen Bewegungen sind die Gleichungen sehr umfangreich und teilweise kaum noch beherrschbar. Deshalb ist der Einsatz von Formelmanipulationsprogrammen wie beispielsweise **Maple**[®] bei einer analytischen Modellierung von komplexen Mehrkörpersystemen unerläßlich.

3 Räumliche Modellierung eines Sattelzugfahrwerks

In diesem Abschnitt wird die analytische, räumliche Modellbildung eines Sattelzugfahrwerks nach dem Newton–Euler–Jourdain–Verfahren (Pfeiffer 1992) dargestellt. Unter einer „räumlichen“ Modellierung ist hier die Bestimmung der das Bewegungsverhalten des Mehrkörpersystems in einem dreidimensionalen Raum beschreibenden Differentialgleichungen zu verstehen. Jeder starre Körper ohne Bindungen besitzt in diesem Raum sechs Freiheitsgrade, drei translatorische und drei rotatorische.

Die Modellierung erfolgt unter der Voraussetzung, daß keine Fahrwerkselastizitäten berücksichtigt werden. Das heißt, die Bindungen zwischen den Teilkörpern werden als ideal angesehen (Hiller 1983).

Die Zugmaschine und der Auflieger werden durch fünf starre Teilkörper approximiert (siehe Abbildung 3.1). Die Gelenke zwischen den einzelnen Teilkörpern definieren die Zwangsbedingungen und damit die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems.

Die Zugmaschine gliedert sich in den Vorder- und den Hinterteil. Vorder-, Mittel- und Hinterteil bilden die Teilkörper des Aufliegers. Das mechanische System hat 30 Freiheitsgrade bei freier räumlicher Bewegung der fünf Teilkörper. Die Sattelkupplung ist ein zweiwertiges Gelenk und läßt zwei rotatorische Freiheitsgrade zu. Die einwertigen Gelenke zwischen Zugmaschinenvorder- und –hinterteil, Aufliegervorder- und –mittelteil sowie Aufliegermittel- und –hinterteil haben einen rotatorischen Freiheitsgrad. Sie dienen zur Nachbildung der Verwindungsfähigkeit der Fahrwerke beider Teilfahrzeuge in Längsrichtung. In den Gelenken werden kombinierte Drehfeder- / Drehdämpferelemente angebracht, die die Kraftwirkung des Fahrwerks gegen das Verwinden nachbilden. Von den 30 Freiheitsgraden bei freier räumlicher Bewegung sind 19 gesperrt. Damit kann das System mit 11 Minimalkoordinaten beschrieben werden (Abbildung 3.2). Die Modellstruktur entspricht einer offenen kinematischen Kette.

Als verallgemeinerte Koordinaten q_i werden die Orts- und Winkelkoordinaten des Zugmaschinenvorderteils ($x_{ZV}, y_{ZV}, z_{ZV}, \psi_{ZV}, \theta_{ZV}, \phi_{ZV}$), die Winkelkoordinate des Zugmaschinenhinterteils (ϕ_{ZH}), die Winkelkoordinaten des Aufliegervorderteils (ψ_{AV} und θ_{AV}), die Winkelkoordinate des Aufliegermittelteils (ϕ_{AM}) sowie die Winkelkoordinate des Aufliegerhinterteils (ϕ_{AH}) gewählt. Der Vektor der Minimalkoordinaten

$$\mathbf{q} = (x_{ZV}, y_{ZV}, z_{ZV}, \psi_{ZV}, \theta_{ZV}, \phi_{ZV}, \phi_{ZH}, \psi_{AV}, \theta_{AV}, \phi_{AM}, \phi_{AH})^T \quad (3.1)$$

beschreibt die Lage der fünf starren Teilkörper eindeutig. Die Drehungen entlang der kinematischen Kette werden für die Modellbildung in KARDAN–Winkeln (Hiller 1983) beschrieben (Gleichung (2.4)). Die Drehachsen liegen bei dieser Betrachtungsweise jeweils im mitgedrehten Koordinatensystem der betrachteten Teildrehung (siehe Unterabschnitt 2.4). Im Anhang A (Gleichungen (A.1) bis (A.10)) sind die verwendeten Transformationsmatrizen aufgeführt.

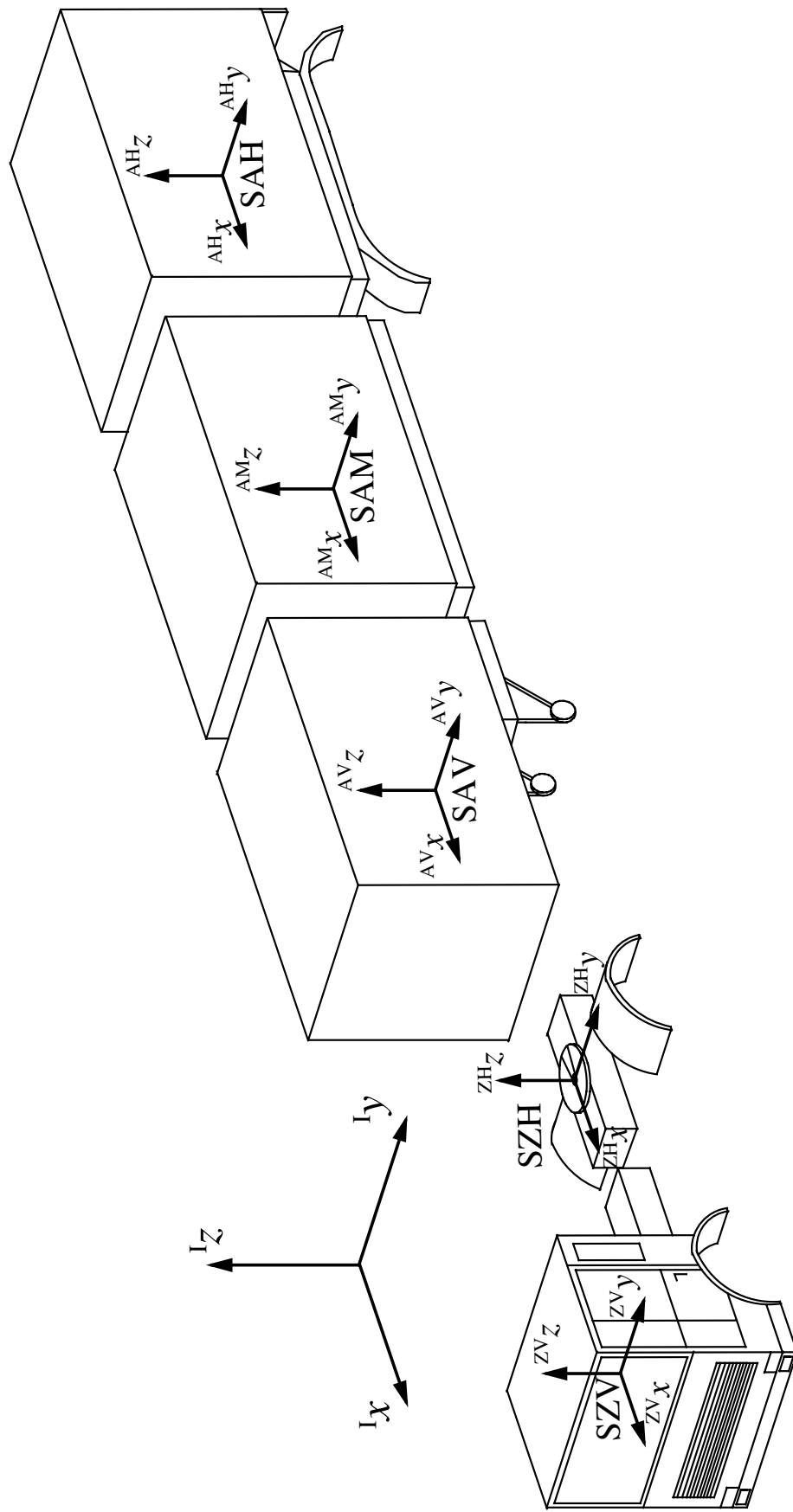


Bild 3.1: Aufbau des räumlichen Fahrwerkmodells

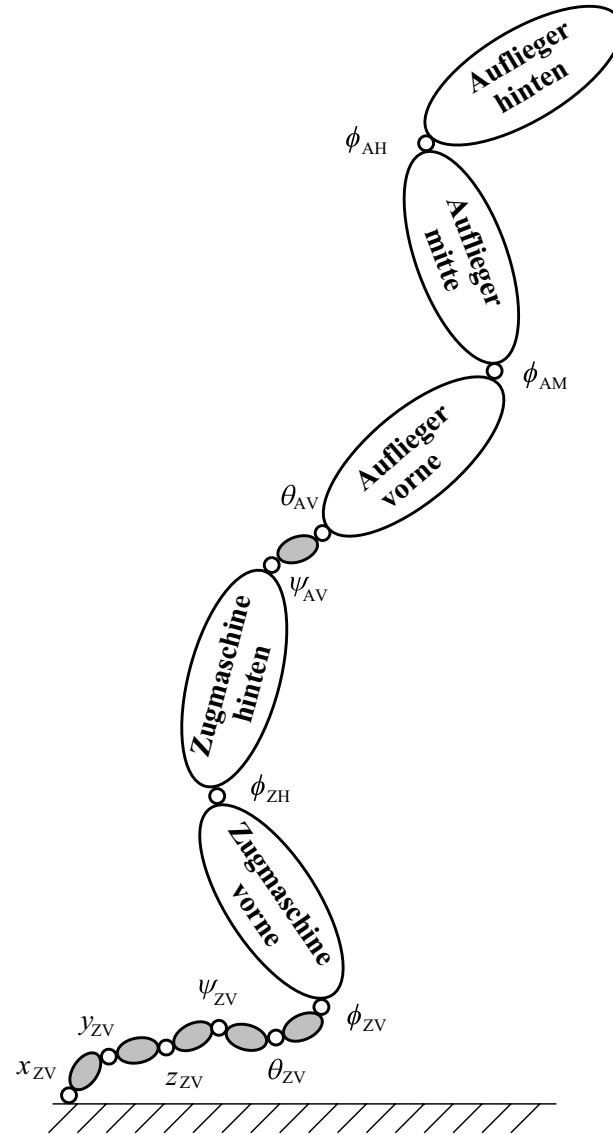


Bild 3.2: Struktur des Modellentwurfs der Teilfahrzeuge

Die in den Körperkoordinaten der fünf starren Teilkörper aufgestellten Impuls- und Drallsätze führen auf eine die Systemdynamik beschreibende Vektordifferentialgleichung

$$\Theta \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{h}_\omega + \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_Z \quad (3.2)$$

mit den Bezeichnungen:

- Θ : $[30 \times 30]$ -Massenmatrix,
- $\ddot{\mathbf{x}}$: $[30 \times 1]$ -Vektor der Körperbeschleunigungen,
- \mathbf{h}_ω : $[30 \times 1]$ -Vektor der Kreiselkräfte,
- \mathbf{h}_E : $[30 \times 1]$ -Vektor der eingepägten Kräfte und Momente sowie
- \mathbf{h}_Z : $[30 \times 1]$ -Vektor der Zwangskräfte und -momente.

Generell werden die Impulssätze im Inertialsystem und die Drallsätze im jeweiligen körperfesten Koordinatensystem des Teilkörpers aufgestellt. Die körperfesten Koordinatensysteme sind so gewählt, daß Koordinatenachsen und Hauptträgheitsachsen zusammenfallen.

Die Massenmatrix weist deshalb Diagonalform auf:

$$\Theta = \text{diag}\{m_{ZV}, m_{ZV}, m_{ZV}, I_{xx,ZV}, I_{yy,ZV}, I_{zz,ZV}, m_{ZH}, m_{ZH}, m_{ZH}, I_{xx,ZH}, I_{yy,ZH}, I_{zz,ZH}, \\ m_{AV}, m_{AV}, m_{AV}, I_{xx,AV}, I_{yy,AV}, I_{zz,AV}, m_{AM}, m_{AM}, m_{AM}, I_{xx,AM}, I_{yy,AM}, I_{zz,AM}, \\ m_{AH}, m_{AH}, m_{AH}, I_{xx,AH}, I_{yy,AH}, I_{zz,AH}\} \quad (3.3)$$

Aus dem gleichen Grund hat der Vektor der Kreiselkräfte die Form:

$$\mathbf{h}_\omega(\dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (I_{zz,ZV} - I_{yy,ZV}) \omega_{yZV} \omega_{zZV} \\ (I_{xx,ZV} - I_{zz,ZV}) \omega_{xZV} \omega_{zZV} \\ (I_{yy,ZV} - I_{xx,ZV}) \omega_{xZV} \omega_{yZV} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (I_{zz,AH} - I_{yy,AH}) \omega_{yAH} \omega_{zAH} \\ (I_{xx,AH} - I_{zz,AH}) \omega_{xAH} \omega_{zAH} \\ (I_{yy,AH} - I_{xx,AH}) \omega_{xAH} \omega_{yAH} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Die eingepprägten Kräfte und Momente werden durch Summation der an den einzelnen starren Teilkörpern angreifenden entsprechenden Kräfte und Momente gebildet. Formal ergibt sich damit der Gesamtkraftvektor zu:

$$\mathbf{h}_E = [({}^I \mathbf{F}_{EZV})^T ({}^{ZV} \mathbf{M}_{EZV})^T ({}^I \mathbf{F}_{EZH})^T ({}^{ZH} \mathbf{M}_{EZH})^T ({}^I \mathbf{F}_{EAV})^T ({}^{AV} \mathbf{M}_{EAV})^T \\ ({}^I \mathbf{F}_{EAM})^T ({}^{AM} \mathbf{M}_{EAM})^T ({}^I \mathbf{F}_{EAH})^T ({}^{AH} \mathbf{M}_{EAH})^T]^T. \quad (3.5)$$

Die Zwangskräfte und –momente müssen nicht explizit für die Berechnung der Differentialgleichungen mit dem Newton–Euler–Jourdain–Verfahren angegeben werden, da diese durch Multiplikation mit der noch zu bestimmenden transponierten Jacobi–Matrix zu einem Nullvektor reduziert werden (Pfeiffer 1992).

Für die Berechnung der Kräfte werden Transformationsmatrizen von den körperfesten Koordinatensystemen der gedrehten Teilkörper in das raumfeste Inertialsystem benötigt. Die Matrizen zur Transformation vom körperfesten Koordinatensystem in das Inertialsystem ergeben sich durch Multiplikation der Transformationsmatrizen der Teildrehungen zwischen den Körpern entlang der kinematischen Kette (siehe Bild 3.2). Die benutzten Transformationsmatrizen der Teildrehungen sind im Anhang A aufgeführt. Die an den entsprechenden Teilsystemen angreifenden Kräfte müssen nachfolgend aufgeführten Transformationen unterzogen werden.

- Vom Vorderteil der Zugmaschine in das Inertialsystem (${}^I \mathbf{T}_{ZV}$ in Bild 3.3):

$${}^I \mathbf{T}_{ZV}. \quad (3.6)$$

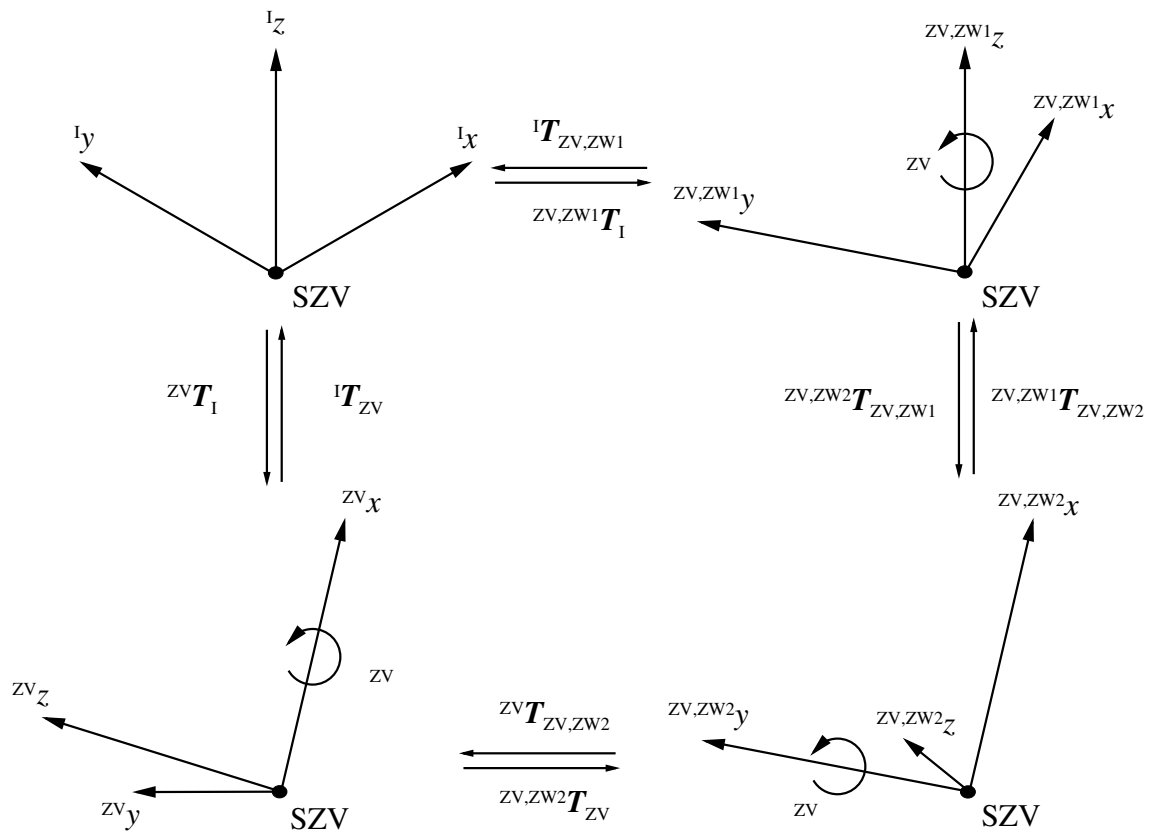


Bild 3.3: Transformation vom Vorderteil der Zugmaschine in das Inertialsystem

- Vom Hinterteil der Zugmaschine in das Inertialsystem (${}^{zV}\mathbf{T}_{ZH}$ in Bild 3.4):

$${}^I\mathbf{T}_{ZH} = {}^I\mathbf{T}_{zV} {}^{zV}\mathbf{T}_{ZH} . \quad (3.7)$$

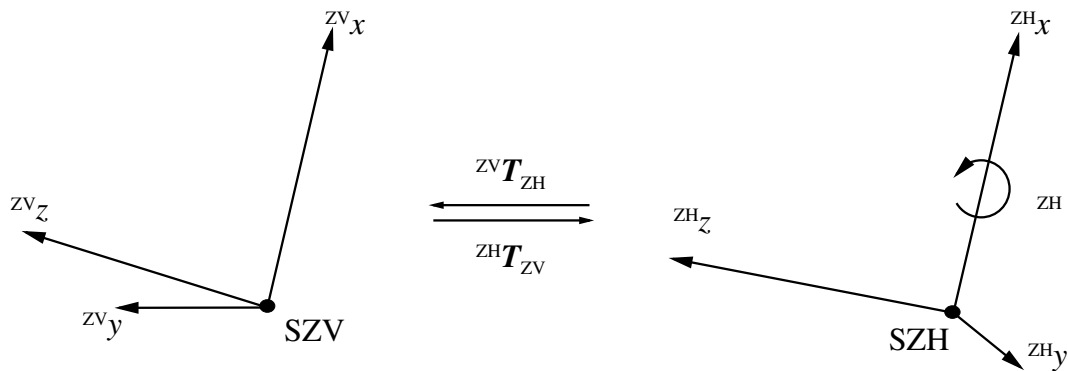


Bild 3.4: Transformation vom Hinterteil in das Vorderteil der Zugmaschine

- Vom Vorderteil des Aufliegers in das Inertialsystem (${}^{zH}\mathbf{T}_{AV}$ in Bild 3.5):

$${}^I\mathbf{T}_{AV} = {}^I\mathbf{T}_{zV} {}^{zV}\mathbf{T}_{zH} {}^{zH}\mathbf{T}_{AV} . \quad (3.8)$$

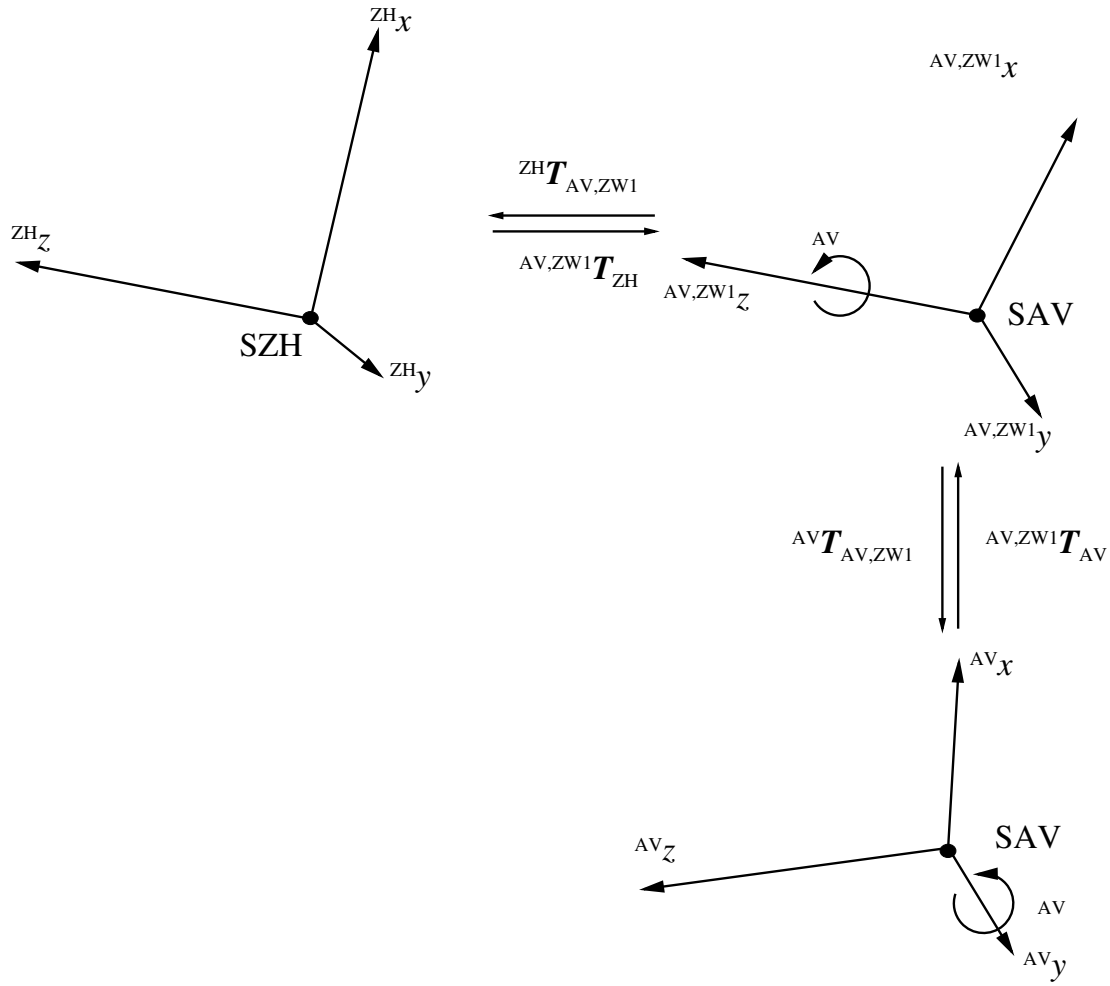


Bild 3.5: Transformation vom Aufliegervorderteil in das Hinterteil der Zugmaschine

- Vom Mittelteil des Aufliegers in das Inertialsystem (${}^{AV}\mathbf{T}_{AM}$ in Bild 3.6):

$${}^I\mathbf{T}_{AM} = {}^I\mathbf{T}_{ZV} {}^{ZV}\mathbf{T}_{ZH} {}^{ZH}\mathbf{T}_{AV} {}^{AV}\mathbf{T}_{AM}. \quad (3.9)$$

- Vom Hinterteil des Aufliegers in das Inertialsystem (${}^{AM}\mathbf{T}_{AH}$ in Bild 3.6):

$${}^I\mathbf{T}_{AH} = {}^I\mathbf{T}_{ZV} {}^{ZV}\mathbf{T}_{ZH} {}^{ZH}\mathbf{T}_{AV} {}^{AV}\mathbf{T}_{AM} {}^{AM}\mathbf{T}_{AH}. \quad (3.10)$$

Die eingprägten Kräfte und Momente können für die Zugmaschine wie folgt beschrieben werden:

$${}^I\mathbf{F}_{EZV} = \begin{bmatrix} F_{EZVx/I} \\ F_{EZVy/I} \\ F_{EZVz/I} \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{T}_{ZV} \begin{bmatrix} F_{EZVx/ZV} \\ F_{EZVy/ZV} \\ F_{EZVz/ZV} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$${}^I\mathbf{F}_{EZH} = \begin{bmatrix} F_{EZHx/I} \\ F_{EZH_y/I} \\ F_{EZH_z/I} \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{T}_{ZH} \begin{bmatrix} F_{EZHx/ZH} \\ F_{EZH_y/ZH} \\ F_{EZH_z/ZH} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

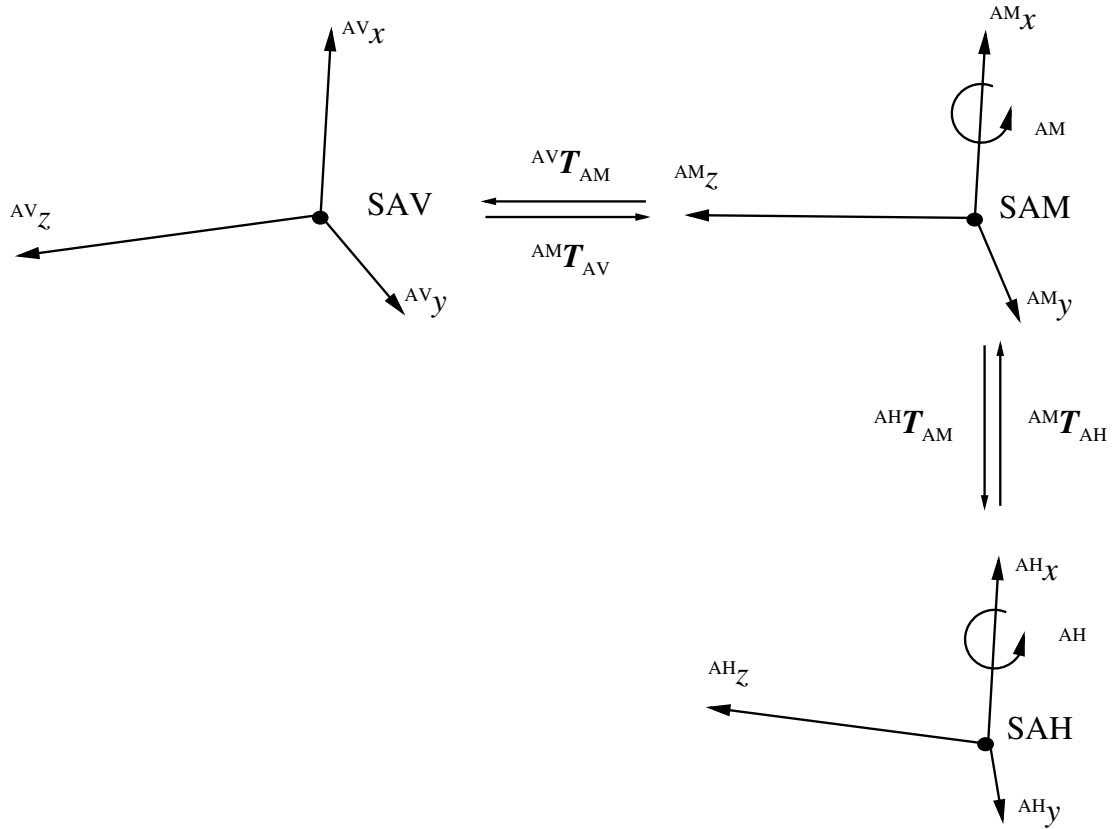


Bild 3.6: Transformation vom Aufliedermittelteil in dessen Vorderteil bzw. vom Aufliederrhinterteil in dessen Mittelteil

$${}^{ZV}M_{EZV} = \begin{bmatrix} M_{EZVx/ZV} \\ M_{EZVy/ZV} \\ M_{EZVz/ZV} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.13)$$

$${}^{ZH}M_{EZH} = \begin{bmatrix} M_{EZHx/ZH} \\ M_{EZH y/ZH} \\ M_{EZH z/ZH} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Entsprechend ergeben sich die eingprägten Kräfte und Momente für den Auflieger zu:

$${}^I F_{EAV} = \begin{bmatrix} F_{EAVx/I} \\ F_{EAVy/I} \\ F_{EAVz/I} \end{bmatrix} = {}^I T_{AV} \begin{bmatrix} F_{EAVx/AV} \\ F_{EAVy/AV} \\ F_{EAVz/AV} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$${}^I F_{EAM} = \begin{bmatrix} F_{EAMx/I} \\ F_{EAMy/I} \\ F_{EAMz/I} \end{bmatrix} = {}^I T_{AM} \begin{bmatrix} F_{EAMx/AM} \\ F_{EAMy/AM} \\ F_{EAMz/AM} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$${}^I F_{EAH} = \begin{bmatrix} F_{EAHx/I} \\ F_{EAHy/I} \\ F_{EAHz/I} \end{bmatrix} = {}^I T_{AH} \begin{bmatrix} F_{EAHx/AH} \\ F_{EAHy/AH} \\ F_{EAHz/AH} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$${}^{AV}\mathbf{M}_{EAV} = \begin{bmatrix} M_{EAVx/AV} \\ M_{EAVy/AV} \\ M_{EAVz/AV} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$${}^{AM}\mathbf{M}_{EAM} = \begin{bmatrix} M_{EAMx/AM} \\ M_{EAMy/AM} \\ M_{EAMz/AM} \end{bmatrix} \text{ und} \quad (3.19)$$

$${}^{AH}\mathbf{M}_{EAH} = \begin{bmatrix} M_{EAHx/AH} \\ M_{EAHy/AH} \\ M_{EAHz/AH} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Aus Gleichung (3.2) müssen die abhängigen Körperbeschleunigungen sowie der Vektor der Zwangskräfte und -momente eliminiert werden, damit eine numerische Berechnung der Lösung von (3.2) ermöglicht wird. Hierfür wird die Jacobi-Matrix aufgestellt. Diese kann auf der Basis des Vektors der verallgemeinerten Koordinaten über die Orts- oder Geschwindigkeitskoordinaten gemäß der Beziehung

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.21)$$

ermittelt werden. Die Jacobi-Matrix des Gesamtsystems läßt sich demnach in Teilmatri-zen der Rotation und Translation untergliedern:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_{ZV}, y_{ZV}, z_{ZV})^T}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial(\omega_{xZV}, \omega_{yZV}, \omega_{zZV})^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial(x_{ZH}, y_{ZH}, z_{ZH})^T}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial(\omega_{xZH}, \omega_{yZH}, \omega_{zZH})^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial(x_{AV}, y_{AV}, z_{AV})^T}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial(\omega_{xAV}, \omega_{yAV}, \omega_{zAV})^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial(x_{AM}, y_{AM}, z_{AM})^T}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial(\omega_{xAM}, \omega_{yAM}, \omega_{zAM})^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial(x_{AH}, y_{AH}, z_{AH})^T}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial(\omega_{xAH}, \omega_{yAH}, \omega_{zAH})^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{ZV}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{ZV}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_{ZH}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{ZH}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_{AV}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{AV}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_{AM}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{AM}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_{AH}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{AH}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{TZV} \\ \mathbf{J}_{RZV} \\ \mathbf{J}_{TZH} \\ \mathbf{J}_{RZH} \\ \mathbf{J}_{TAV} \\ \mathbf{J}_{RAV} \\ \mathbf{J}_{TAM} \\ \mathbf{J}_{RAM} \\ \mathbf{J}_{TAH} \\ \mathbf{J}_{RAH} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Um die Teil-Jacobi-Matrizen der Translation zu bestimmen, müssen die Abhängigkeiten der Körperkoordinaten von den verallgemeinerten Koordinaten bestimmt werden. Für den Zugmaschinenvorderteil ist dies die Beziehung:

$$\mathbf{x}_{ZV}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{ZV} \\ y_{ZV} \\ z_{ZV} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten des Vektors \mathbf{q} führt auf die Teil–Jacobi–Matrix der Translation:

$$\mathbf{J}_{\text{TZV}} = [\mathbf{1} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{TZV}}] \quad \text{mit} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.25)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{TZV}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Für die Ermittlung der Abhängigkeiten der Ortskoordinaten der anderen Teilkörper von \mathbf{q} müssen die Bindungen zwischen den Teilkörpern untersucht werden.

Die Verwindungsfähigkeit der Zugmaschine wird durch die Einführung eines Drehgelenkes nachgebildet. Hierbei handelt es sich um eine geometrische, skleronome Bindung (Hiller 1983), die einen Freiheitsgrad realisiert. Von den fünf, die Bindung repräsentierenden Zwangsbedingungen werden drei durch die Abhängigkeit $\mathbf{x}_{\text{ZH}} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ZH}}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} x_{\text{ZH}} \\ y_{\text{ZH}} \\ z_{\text{ZH}} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{\text{ZV}} + {}^1\mathbf{T}_{\text{ZV}}^{\text{ZV}} \mathbf{r}_{\text{KHV},\text{SZV}} - {}^1\mathbf{T}_{\text{ZH}}^{\text{ZH}} \mathbf{r}_{\text{KHV},\text{SZH}} \\ &= \begin{bmatrix} x_{\text{ZV}} \\ y_{\text{ZV}} \\ z_{\text{ZV}} \end{bmatrix} + {}^1\mathbf{T}_{\text{ZV}} \begin{bmatrix} x_{\text{KHVl/ZV}} \\ 0 \\ z_{\text{KHVl/ZV}} \end{bmatrix} - {}^1\mathbf{T}_{\text{ZH}} \begin{bmatrix} x_{\text{KHVr/ZH}} \\ 0 \\ z_{\text{KHVr/ZH}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Durch Bildung der partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten erhält man die Matrix:

$$\mathbf{J}_{\text{TZH}} = [\mathbf{1} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{TZH}}] \quad \text{mit} \quad (3.28)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{TZH}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{TZH}/1,1} & \hat{J}_{\text{TZH}/1,2} & \hat{J}_{\text{TZH}/1,3} & \hat{J}_{\text{TZH}/1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{\text{TZH}/2,1} & \hat{J}_{\text{TZH}/2,2} & \hat{J}_{\text{TZH}/2,3} & \hat{J}_{\text{TZH}/2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{J}_{\text{TZH}/3,2} & \hat{J}_{\text{TZH}/3,3} & \hat{J}_{\text{TZH}/3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Die Einzelemente der Teil–Jacobi–Matrizen sind in Anhang B aufgeführt. In gleicher Weise werden alle anderen Teil-Jacobi-Matrizen der Translation für die übrigen Teilkörper berechnet.

An der Kopplungsstelle zwischen Zugmaschine und Auflieger ist ein Gelenk erforderlich, das sowohl Gieren als auch Nicken zulässt. Dementsprechend handelt es sich bei diesem Gelenk, der Sattelkupplung, um eine geometrische, skleronome Bindung, die zwei Freiheitsgrade realisiert und vier Zwangsbedingungen genügt. Durch die Beziehung $\mathbf{x}_{\text{AV}} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$

werden drei der Zwangsbedingungen vorgegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{AV}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} x_{AV} \\ y_{AV} \\ z_{AV} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{ZH} + {}^I\mathbf{T}_{ZH} {}^{ZH} \mathbf{r}_{KZ, SZH} - {}^I\mathbf{T}_{AV} {}^{AV} \mathbf{r}_{KZ, SAV} \\ &= \begin{bmatrix} x_{ZH} \\ y_{ZH} \\ z_{ZH} \end{bmatrix} + {}^I\mathbf{T}_{ZH} \begin{bmatrix} x_{KZI/ZH} \\ 0 \\ z_{KZI/ZH} \end{bmatrix} - {}^I\mathbf{T}_{AV} \begin{bmatrix} x_{KZr/AV} \\ 0 \\ z_{KZr/AV} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Bildung der partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten führt auf die Teil-Jacobi-Matrix der Translation für das Vorderteil des Aufliegers:

$$\mathbf{J}_{TAV} = [\mathbf{1} \quad \hat{\mathbf{J}}_{TAV}] \quad \text{mit} \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{TAV} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{TAV/1,1} & \hat{J}_{TAV/1,2} & \hat{J}_{TAV/1,3} & \hat{J}_{TAV/1,4} & \hat{J}_{TAV/1,5} & \hat{J}_{TAV/1,6} & 0 & 0 \\ \hat{J}_{TAV/2,1} & \hat{J}_{TAV/2,2} & \hat{J}_{TAV/2,3} & \hat{J}_{TAV/2,4} & \hat{J}_{TAV/2,5} & \hat{J}_{TAV/2,6} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{J}_{TAV/3,2} & \hat{J}_{TAV/3,3} & \hat{J}_{TAV/3,4} & \hat{J}_{TAV/3,5} & \hat{J}_{TAV/3,6} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Analog zu der Bindung zwischen den Teilkörpern der Zugmaschine erfolgt die Modellierung der Verwindungsfähigkeit des Aufliegers durch Beschreibung zweier Wankdrehgelenke. Diese geometrischen, skleronomen Bindungen genügen jeweils fünf Zwangsbedingungen. Von diesen Zwangsbedingungen werden je drei durch die Abhängigkeiten $\mathbf{x}_{AM} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ bzw. $\mathbf{x}_{AH} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{AM}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} x_{AM} \\ y_{AM} \\ z_{AM} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{AV} + {}^I\mathbf{T}_{AV} {}^{AV} \mathbf{r}_{KMV, SAV} - {}^I\mathbf{T}_{AM} {}^{AM} \mathbf{r}_{KMV, SAM} \\ &= \begin{bmatrix} x_{AV} \\ y_{AV} \\ z_{AV} \end{bmatrix} + {}^I\mathbf{T}_{AV} \begin{bmatrix} x_{KMVl/AV} \\ 0 \\ z_{KMVl/AV} \end{bmatrix} - {}^I\mathbf{T}_{AM} \begin{bmatrix} x_{KMVr/AM} \\ 0 \\ z_{KMVr/AM} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{AH}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} x_{AH} \\ y_{AH} \\ z_{AH} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{AM} + {}^I\mathbf{T}_{AM} {}^{AM} \mathbf{r}_{KHM, SAM} - {}^I\mathbf{T}_{AH} {}^{AH} \mathbf{r}_{KHM, SAH} \\ &= \begin{bmatrix} x_{AM} \\ y_{AM} \\ z_{AM} \end{bmatrix} + {}^I\mathbf{T}_{AM} \begin{bmatrix} x_{KHVl/AM} \\ 0 \\ z_{KHVl/AM} \end{bmatrix} - {}^I\mathbf{T}_{AH} \begin{bmatrix} x_{KHVr/AH} \\ 0 \\ z_{KHVr/AH} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Wiederum ergibt die Bildung der partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten die Teil-Jacobi-Matrizen der Translation für den Aufliegermittelteil

$$\mathbf{J}_{TAM} = [\mathbf{1} \quad \hat{\mathbf{J}}_{TAM}] \quad \text{mit} \quad (3.35)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{TAM}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{TAM}/1,1} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,2} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,3} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,4} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,5} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,6} & \hat{J}_{\text{TAM}/1,7} & 0 \\ \hat{J}_{\text{TAM}/2,1} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,2} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,3} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,4} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,5} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,6} & \hat{J}_{\text{TAM}/2,7} & 0 \\ 0 & \hat{J}_{\text{TAM}/3,2} & \hat{J}_{\text{TAM}/3,3} & \hat{J}_{\text{TAM}/3,4} & \hat{J}_{\text{TAM}/3,5} & \hat{J}_{\text{TAM}/3,6} & \hat{J}_{\text{TAM}/3,7} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

und für den Aufliegerhinterteil

$$\mathbf{J}_{\text{TAH}} = [\mathbf{1} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{TAH}}] \quad \text{mit} \quad (3.37)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{TAH}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{TAH}/1,1} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,2} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,3} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,4} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,5} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,6} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,7} & \hat{J}_{\text{TAH}/1,8} \\ \hat{J}_{\text{TAH}/2,1} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,2} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,3} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,4} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,5} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,6} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,7} & \hat{J}_{\text{TAH}/2,8} \\ 0 & \hat{J}_{\text{TAH}/3,2} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,3} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,4} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,5} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,6} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,7} & \hat{J}_{\text{TAH}/3,8} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Die Berechnung der Teil-Jacobi-Matrizen der Rotation erfolgt über die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeiten von den verallgemeinerten Koordinaten. Für das Vorderteil der Zugmaschine gilt die kinematische KARDAN-Gleichung:

$${}^{\text{ZV}}\boldsymbol{\omega}_{\text{ZV}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \omega_{x\text{ZV}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{y\text{ZV}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{z\text{ZV}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{\text{ZV}} & 0 & 1 \\ \cos\theta_{\text{ZV}} \sin\phi_{\text{ZV}} & \cos\phi_{\text{ZV}} & 0 \\ \cos\theta_{\text{ZV}} \cos\phi_{\text{ZV}} & -\sin\phi_{\text{ZV}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{\text{ZV}} \\ \dot{\theta}_{\text{ZV}} \\ \dot{\phi}_{\text{ZV}} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Üblicherweise wird diese Gleichung durch die Einführung dreier Einheitsvektoren beschrieben (Kortüm und Lugner 1994). Gemäß der kardanischen Betrachtung der Teildrehungen i liegen die Einheitsvektoren parallel zu der jeweiligen Drehachse im Zwischenkoordinatensystem ZW_i des betrachteten Körpers, das sich nach der betreffenden Teildrehung einstellt:

$${}^{\text{ZV}}\mathbf{e}_{x\text{ZV}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$${}^{\text{ZV}}\mathbf{e}_{y\text{ZW2}} = ({}^{\text{ZV,ZW2}}\mathbf{T}_{\text{ZV}})^{\text{T}} {}^{\text{ZV,ZW2}}\mathbf{e}_{y\text{ZW2}} = ({}^{\text{ZV,ZW2}}\mathbf{T}_{\text{ZV}})^{\text{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} {}^{\text{ZV}}\mathbf{e}_{z\text{ZW1}} &= ({}^{\text{ZV,ZW2}}\mathbf{T}_{\text{ZV}})^{\text{T}} ({}^{\text{ZV,ZW1}}\mathbf{T}_{\text{ZV,ZW2}})^{\text{T}} {}^{\text{ZV,ZW1}}\mathbf{e}_{z\text{ZW1}} \\ &= ({}^{\text{ZV,ZW2}}\mathbf{T}_{\text{ZV}})^{\text{T}} ({}^{\text{ZV,ZW1}}\mathbf{T}_{\text{ZV,ZW2}})^{\text{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die in den obigen sowie den noch folgenden Gleichungen aufgeführten Transformationsmatrizen von einem Koordinatensystem einer Teildrehung in ein anderes sind im Anhang A aufgeführt. Mit der Einführung der Einheitsvektoren ist die Winkelgeschwindigkeit des Teilkörpers als Summe der in das Endkoordinatensystem transformierten Winkelgeschwindigkeiten der Teildrehungen darstellbar:

$$\begin{aligned}
{}^{ZV}\boldsymbol{\omega}_{ZV}(\mathbf{q}) &= {}^{ZV}\mathbf{T}_{ZV,ZW1} {}^{ZV,ZW1}\mathbf{e}_{zZW1} \dot{\psi}_{ZV} \\
&\quad + {}^{ZV}\mathbf{T}_{ZV,ZW2} {}^{ZV,ZW2}\mathbf{e}_{yZW2} \dot{\theta}_{ZV} + {}^{ZV}\mathbf{e}_{xZV} \dot{\phi}_{ZV} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin \theta_{ZV} \\ \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZV} \\ \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZV} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{ZV} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi_{ZV} \\ -\sin \phi_{ZV} \end{bmatrix} \dot{\theta}_{ZV} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_{ZV}. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Durch diese Darstellungsart der Winkelgeschwindigkeit wird die Herleitung der Teil-Jacobi-Matrizen der Rotation deutlich vereinfacht.

Die Bildung der partiellen Ableitung der kinematischen KARDAN-Gleichung nach dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}}$ ergibt die Teil-Jacobi-Matrix der Rotation für den vorderen Teil der Zugmaschine:

$$\mathbf{J}_{RZV} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{J}}_{RZV}] \quad \text{mit} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.45)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{RZV} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{RZV/1,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{RZV/2,1} & \hat{J}_{RZV/2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{RZV/3,1} & \hat{J}_{RZV/3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Die einzelnen Elemente der Teil-Jacobi-Matrizen der Rotation sind in Anhang B hinterlegt. Alle weiteren Teil-Jacobi-Matrizen der Rotation werden entsprechend der zuvor beschriebenen Vorgehensweise berechnet. Für das Hinterteil der Zugmaschine ergibt sich:

$${}^{ZH}\boldsymbol{\omega}_{ZH}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \omega_{xZH}(\mathbf{q}) \\ \omega_{yZH}(\mathbf{q}) \\ \omega_{zZH}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = {}^{ZH}\mathbf{T}_{ZV} {}^{ZV}\boldsymbol{\omega}_{ZV}(\mathbf{q}) + {}^{ZH}\mathbf{e}_{xZH} \dot{\phi}_{ZH}. \quad (3.47)$$

Die partielle Ableitung nach dem Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ bestimmt die Matrix:

$$\mathbf{J}_{RZH} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{J}}_{RZH}] \quad \text{mit} \quad (3.48)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{RZH} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{RZH/1,1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{RZH/2,1} & \hat{J}_{RZH/2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{RZH/3,1} & \hat{J}_{RZH/3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Vorderteils des Aufliegers kann mit

$$\begin{aligned}
{}^{AV}\boldsymbol{\omega}_{AV}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \omega_{xAV}(\mathbf{q}) \\ \omega_{yAV}(\mathbf{q}) \\ \omega_{zAV}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \\
&= {}^{AV}\mathbf{T}_{ZH} {}^{ZH}\boldsymbol{\omega}_{ZH}(\mathbf{q}) + ({}^{AV,ZW1}\mathbf{T}_{AV})^T {}^{AV,ZW1}\mathbf{e}_{zZW1} \dot{\psi}_{AV} + {}^{AV}\mathbf{e}_{yAV} \dot{\theta}_{AV} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

angegeben werden. Wird Gleichung (3.50) partiell nach $\dot{\mathbf{q}}$ abgeleitet, so folgt:

$$\mathbf{J}_{\text{RAV}} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{RAV}}] \quad \text{mit} \quad (3.51)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{RAV}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{RAV}/1,1} & \hat{J}_{\text{RAV}/1,2} & \hat{J}_{\text{RAV}/1,3} & \hat{J}_{\text{RAV}/1,4} & \hat{J}_{\text{RAV}/1,5} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{\text{RAV}/2,1} & \hat{J}_{\text{RAV}/2,2} & \hat{J}_{\text{RAV}/2,3} & \hat{J}_{\text{RAV}/2,4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{J}_{\text{RAV}/3,1} & \hat{J}_{\text{RAV}/3,2} & \hat{J}_{\text{RAV}/3,3} & \hat{J}_{\text{RAV}/3,4} & \hat{J}_{\text{RAV}/3,5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Die Rotation des Mittelteils des Aufliegers läßt sich durch

$${}^{\text{AM}}\boldsymbol{\omega}_{\text{AM}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \omega_{\text{xAM}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{\text{yAM}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{\text{zAM}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = {}^{\text{AM}}\mathbf{T}_{\text{AV}} {}^{\text{AV}}\boldsymbol{\omega}_{\text{AV}}(\mathbf{q}) + {}^{\text{AM}}\mathbf{e}_{\text{xAM}} \dot{\phi}_{\text{AM}} \quad (3.53)$$

beschreiben und die Rotation des Aufliegerhinterteils durch

$${}^{\text{AH}}\boldsymbol{\omega}_{\text{AH}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \omega_{\text{xAH}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{\text{yAH}}(\mathbf{q}) \\ \omega_{\text{zAH}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = {}^{\text{AH}}\mathbf{T}_{\text{AM}} {}^{\text{AM}}\boldsymbol{\omega}_{\text{AM}}(\mathbf{q}) + {}^{\text{AH}}\mathbf{e}_{\text{xAH}} \dot{\phi}_{\text{AH}}. \quad (3.54)$$

Die Bildung der partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten führt für den Aufliegermittelteil auf

$$\mathbf{J}_{\text{RAM}} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{RAM}}] \quad \text{mit} \quad (3.55)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{RAM}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{RAM}/1,1} & \hat{J}_{\text{RAM}/1,2} & \hat{J}_{\text{RAM}/1,3} & \hat{J}_{\text{RAM}/1,4} & \hat{J}_{\text{RAM}/1,5} & 0 & 1 & 0 \\ \hat{J}_{\text{RAM}/2,1} & \hat{J}_{\text{RAM}/2,2} & \hat{J}_{\text{RAM}/2,3} & \hat{J}_{\text{RAM}/2,4} & \hat{J}_{\text{RAM}/2,5} & \hat{J}_{\text{RAM}/2,6} & 0 & 0 \\ \hat{J}_{\text{RAM}/3,1} & \hat{J}_{\text{RAM}/3,2} & \hat{J}_{\text{RAM}/3,3} & \hat{J}_{\text{RAM}/3,4} & \hat{J}_{\text{RAM}/3,5} & \hat{J}_{\text{RAM}/3,6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

und für den Aufliegerhinterteil auf

$$\mathbf{J}_{\text{RAH}} = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{J}}_{\text{RAH}}] \quad \text{mit} \quad (3.57)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{RAH}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\text{RAH}/1,1} & \hat{J}_{\text{RAH}/1,2} & \hat{J}_{\text{RAH}/1,3} & \hat{J}_{\text{RAH}/1,4} & \hat{J}_{\text{RAH}/1,5} & 0 & 1 & 1 \\ \hat{J}_{\text{RAH}/2,1} & \hat{J}_{\text{RAH}/2,2} & \hat{J}_{\text{RAH}/2,3} & \hat{J}_{\text{RAH}/2,4} & \hat{J}_{\text{RAH}/2,5} & \hat{J}_{\text{RAH}/2,6} & 0 & 0 \\ \hat{J}_{\text{RAH}/3,1} & \hat{J}_{\text{RAH}/3,2} & \hat{J}_{\text{RAH}/3,3} & \hat{J}_{\text{RAH}/3,4} & \hat{J}_{\text{RAH}/3,5} & \hat{J}_{\text{RAH}/3,6} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Nachdem die Teil-Jacobi-Matrizen alle einzeln hergeleitet wurden, erfolgt nun die formale Transformation der Vektordifferentialgleichung der Körperkoordinaten (3.2) in den durch die verallgemeinerten Koordinaten definierten Arbeitsraum. Die Körpergeschwindigkeit kann mit der gesamten Jacobi-Matrix als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.59)$$

Die zeitliche Ableitung der Beziehung (3.59) führt auf:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.60)$$

Bei Betrachtung der Elemente der Jacobi-Matrix im Anhang B wird deutlich, welche Quellcodegröße deren zeitliche Ableitung, die Matrix \mathbf{J} , besitzt. Eine Herleitung dieser Beziehungen ohne Programme wie **Maple**[®] ist kaum fehlerfrei durchführbar.

Mit Gleichung (3.60) kann der Vektor der Körperbeschleunigungen in der Vektordifferentialgleichung (3.2) ersetzt werden:

$$\Theta (\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{h}_\omega(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_Z. \quad (3.61)$$

Die Abhängigkeit des Vektors der Kreiselkräfte von den Körperwinkelgeschwindigkeiten stört nicht, da dessen Berechnung separat mit der Beziehung (3.4) erfolgen kann. Die dafür benötigten Winkelgeschwindigkeiten sind bereits bei der Herleitung der Teil-Jacobi-Matrizen der Rotation bestimmt worden. Die Umstellung nach dem Term der verallgemeinerten Beschleunigungen führt auf:

$$\Theta \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}_\omega(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_Z - \Theta \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.62)$$

Durch Multiplikation der daraus entstehenden Beziehung von links mit der transponierten Jacobi-Matrix wird der Vektor der Zwangskräfte \mathbf{h}_Z eliminiert:

$$\mathbf{J}^T \Theta \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T [\mathbf{h}_\omega(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_E] - \mathbf{J}^T \Theta \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.63)$$

Der Grund, warum der Vektor der Reaktionskräfte in der Sattelkupplung verschwindet, ist in Unterabschnitt 2.6 erläutert worden.

Durch Umstellen der vorherigen Beziehung nach den verallgemeinerten Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}$ ergibt sich eine Vektordifferentialgleichung, bestehend aus 11 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die linear in den Beschleunigungen und nichtlinear in den Geschwindigkeits- und Lagekoordinaten ist:

$$\ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}^T \Theta \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{h}_\omega(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{h}_E] - (\mathbf{J}^T \Theta \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \Theta \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.64)$$

Diese Vorgehensweise setzt allerdings voraus, daß die symmetrische, verallgemeinerte $[11 \times 11]$ -Massenmatrix $(\mathbf{J}^T \Theta \mathbf{J})$ regulär ist. Dazu muß deren Determinante ungleich Null sein. Da es sich bei dem Sattelzug um ein skleronomes System handelt, ist die kinetische Energie eine *positiv-definite quadratische Form* in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten (Greenwood 1977, Hiller 1983). Nach dem *Satz von Sylvester* (Gantmacher 1970) ist die Determinante der Massenmatrix größer Null, so daß die Invertierung von $(\mathbf{J}^T \Theta \mathbf{J})$ durchgeführt werden kann.

Die Lösung dieser Differentialgleichungen kann nun mit Hilfe eines numerischen Integrationsverfahrens vorgenommen werden.

4 Überprüfung der Korrektheit der Jacobi-Matrix

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Modellbildung ist aufgrund der Komplexität des Mehrkörpersystems kaum noch überschaubar. Die Modellierung konnte deshalb nicht von Hand durchgeführt werden, sondern erfolgte mit Hilfe des Softwarepakets **Maple**[®], einem **Computer Algebra System (CAS)**. Dieses Tool erlaubt, mathematische Rechenoperationen symbolisch durchzuführen. Nachdem die Differentialgleichungen der Impuls- und Drallsätze bestimmt wurden, erfolgte die Generierung der Jacobi-Matrix \mathbf{J} . Die Größe einer aus **Maple**[®] exportierten Datei im ASCII-Format mit der bestimmten Jacobi-Matrix beträgt ca. 140 kB. Aufgrund dieser Matrixgröße besteht keine Möglichkeit mehr, die Richtigkeit der Jacobi-Matrix zu prüfen.

Ein Ansatz zur Überprüfung der Jacobi-Matrix besteht jedoch in dem Aufstellen des Vektors der Zwangskräfte. Dieser wird eigentlich nicht für die Differentialgleichung des Sattelzugfahrwerks in Minimalkoordinaten benötigt, da die Multiplikation der transponierten Jacobi-Matrix mit dem Vektor der Zwangskräfte einen Nullvektor ergibt. Genau diese Tatsache kann jedoch zur Überprüfung der Matrix \mathbf{J} genutzt werden und wird im folgenden für das Beispiel Sattelzugfahrwerk erläutert.

Der Vektor der Zwangskräfte hat die Dimension $[30 \times 1]$. Für jeden der fünf Teilkörper müssen zwei $[3 \times 1]$ -Untervektoren bestimmt werden, die die Reaktionskräfte und -momente an den Kopplungen zwischen den Teilsystemen beinhalten. Dabei werden die Zwangskräfte in den Koordinaten des Inertialsystems bestimmt, während die Zwangsmomente im körperfesten Koordinatensystem des jeweils betrachteten starren Körpers beschrieben werden. Formal ergibt sich damit der Gesamtkraftvektor zu:

$$\mathbf{h}_Z = [({}^I \mathbf{F}_{ZZV})^T ({}^{ZV} \mathbf{M}_{ZZV})^T ({}^I \mathbf{F}_{ZZH})^T ({}^{ZH} \mathbf{M}_{ZZH})^T ({}^I \mathbf{F}_{ZAV})^T ({}^{AV} \mathbf{M}_{ZAV})^T ({}^I \mathbf{F}_{ZAM})^T ({}^{AM} \mathbf{M}_{ZAM})^T ({}^I \mathbf{F}_{ZAH})^T ({}^{AH} \mathbf{M}_{ZAH})^T]^T. \quad (4.1)$$

Zur Berechnung der Zwangskräfte und -momente an dem Zugmaschinenvorderteil ist der Freischnitt in Bild 4.1 zu betrachten.

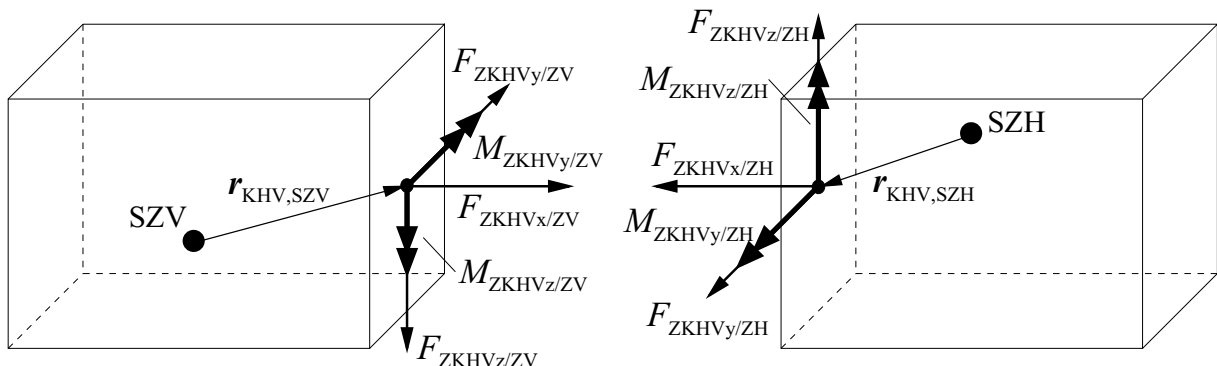


Bild 4.1: Körperschnitt am Gelenk zwischen Vorder- und Hinterteil der Zugmaschine

Da es sich bei dem Drehgelenk zur Nachbildung der Fahrwerksverwindung um eine Bindung mit einem Freiheitsgrad handelt, werden drei senkrecht aufeinander stehende Kräfte und zwei ebenso linear unabhängige Momente zur Nachbildung des Gelenks eingeführt. Am freigeschnittenen Gelenk (siehe Bild 4.1) sind die die Bindung repräsentierenden Reaktionskräfte (Pfeil mit einer Pfeilspitze)

$${}^{ZV}\mathbf{F}_{ZKHV} = \begin{bmatrix} F_{ZKHV_x/ZV} \\ F_{ZKHV_y/ZV} \\ F_{ZKHV_z/ZV} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

und Reaktionsmomente (Pfeil mit Doppelpfeilspitzen)

$${}^{ZV}\mathbf{M}_{ZKHV} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{ZKHV_y/ZV} \\ M_{ZKHV_z/ZV} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

in Richtung der körperfesten Koordinatenachsen des Zugmaschinenvorderteils eingezeichnet. Außerdem ist der Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt aufgeführt:

$${}^{ZV}\mathbf{r}_{KHV,SZV} = \begin{bmatrix} x_{KHV1/ZV} \\ 0 \\ z_{KHV1/ZV} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Damit ergibt sich der $[3 \times 1]$ -Vektor der Zwangskräfte am Vorderteil der Zugmaschine nach Transformation in das Inertialkoordinatensystem (Gleichung (3.6) bzw. (A.1) sowie Bild 3.3) zu:

$${}^I\mathbf{F}_{ZZV} = {}^I\mathbf{T}_{ZV} {}^{ZV}\mathbf{F}_{ZKHV}. \quad (4.5)$$

Der Vektor der Zwangsmomente am Zugmaschinenvorderteil kann durch

$${}^{ZV}\mathbf{M}_{ZZV} = {}^{ZV}\mathbf{M}_{ZKHV} + {}^{ZV}\mathbf{r}_{KHV,SZV} \times {}^{ZV}\mathbf{F}_{ZKHV} \quad (4.6)$$

angegeben werden.

Die am Drehgelenk der Zugmaschine angreifenden Reaktionskräfte und –momente wirken ebenfalls in entgegengesetzter Richtung am Zugmaschinenhinterteil. Die von dieser Bindung auf das Hinterteil einwirkenden Kräfte ergeben sich nach Transformation in das Koordinatensystem des Zugmaschinenhinterteils (Gleichung (3.7) bzw. (A.2) sowie Bild 3.4) zu:

$${}^{ZH}\mathbf{F}_{ZKHV} = \begin{bmatrix} F_{ZKHV_x/ZH} \\ F_{ZKHV_y/ZH} \\ F_{ZKHV_z/ZH} \end{bmatrix} = ({}^{ZV}\mathbf{T}_{ZH})^T ({}^{-ZV}\mathbf{F}_{ZKHV}). \quad (4.7)$$

Mit dem Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{r}_{\text{KHV},\text{SZH}} = \begin{bmatrix} x_{\text{KHVr}/\text{ZH}} \\ 0 \\ z_{\text{KHVr}/\text{ZH}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

und den analog zu den Reaktionskräften in das Koordinatensystem des Hinterteils transformierten Zwangsmomenten kann der Zwangsmomentenvektor dieses Gelenks mit folgender Beziehung bestimmt werden:

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{M}_{\text{ZZH},1} = {}^{\text{ZH}}\mathbf{T}_{\text{ZV}} (-{}^{\text{ZV}}\mathbf{M}_{\text{ZKHV}}) + {}^{\text{ZH}}\mathbf{r}_{\text{KHV},\text{SZV}} \times {}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKHV}}. \quad (4.9)$$

Auch von der Sattelkupplung werden dem Zugmaschinenhinterteil Zwangskräfte und -momente aufgeprägt. Bild 4.2 zeigt den Freischnitt dieser Bindung. Bei der Sattelkupp-

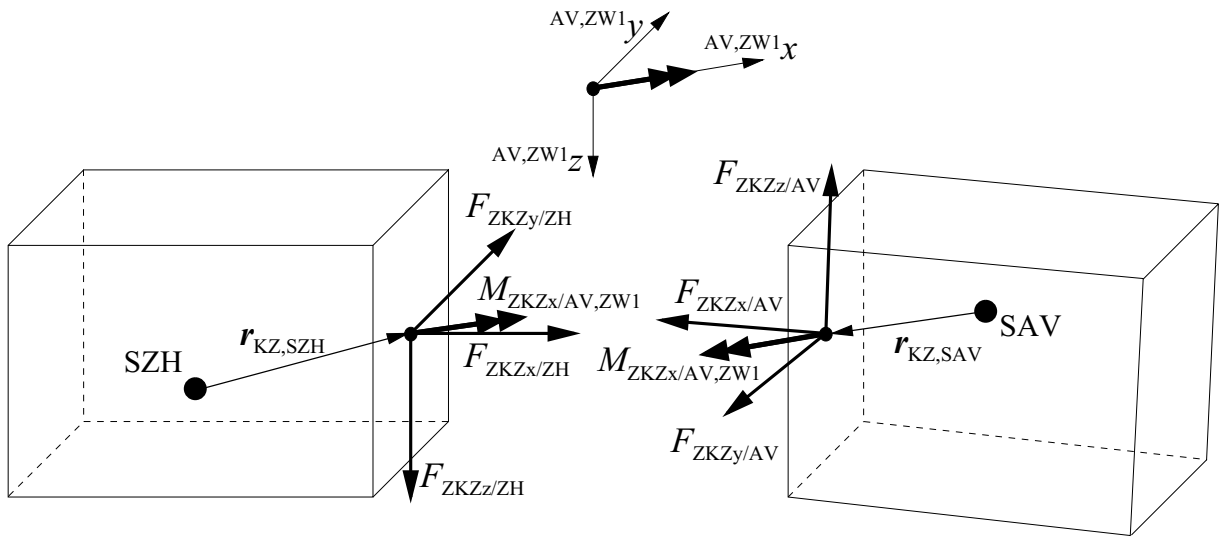


Bild 4.2: Körperschnitt an der Sattelkupplung zwischen Hinterteil der Zugmaschine und Aufliegervorderteil

lung handelt es sich um eine Bindung mit zwei Freiheitsgraden (Helling und Seewald 1991), so daß zu ihrer Nachbildung drei senkrecht aufeinander stehende Kräfte und ein Reaktionsmoment eingeführt werden. Am freigeschnittenen Gelenk (siehe Bild 4.2) sind die die Bindung repräsentierenden Reaktionskräfte (Pfeil mit einer Pfeilspitze)

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}} = \begin{bmatrix} F_{\text{ZKZx}/\text{ZH}} \\ F_{\text{ZKZy}/\text{ZH}} \\ F_{\text{ZKZz}/\text{ZH}} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

die in Richtung der körperfesten Koordinatenachsen des Zugmaschinenhinterteils zeigen, eingezeichnet. Das Reaktionsmoment zeigt in Richtung der x -Achse des Zwischenkoordinatensystems AV,ZW1. Die Sattelkupplung kann auch als ein Kardangelenke interpretiert werden. Mit Hilfe dieses Gelenktyps kann unter anderem ein Moment übertragen werden. Stellt man sich die y - und z -Achse eines körperfesten Koordinatensystems im mit

den beiden gabelförmigen Naben verbundenen Kreuzelement in Richtung der Kreuzzapfen liegend vor, dann steht die x -Achse normal auf dem Kreuzelement. Die Naben können eine Drehbewegung um die Zapfen des Kreuzelementes und damit um die y - bzw. die z -Achse ausführen. Nur um die x -Achse dieses Koordinatensystems kann keine Drehung vollführt werden. Genau in Richtung der x -Achse liegt demzufolge das von dem Gelenktyp übertragene Moment (Pfeil mit Doppelpfeilspitzen im Zwischenkoordinatensystem AV,ZW1). Die auf das Zugmaschinenhinterteil einwirkenden Reaktionsmomente der Kupplung lassen sich somit mit dem Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zur Sattelkupplung

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{r}_{\text{KZ},\text{SZH}} = \begin{bmatrix} x_{\text{KZl/ZH}} \\ 0 \\ z_{\text{KZl/ZH}} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

und der Transformationsmatrix ${}^{\text{ZH}}\mathbf{T}_{\text{AV},\text{ZW1}}$ (Gleichung (A.9)) mit der Beziehung

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{M}_{\text{ZZH},2} = {}^{\text{ZH}}\mathbf{T}_{\text{AV},\text{ZW1}} \begin{bmatrix} M_{\text{ZKZx/AV,ZW1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^{\text{ZH}}\mathbf{r}_{\text{KZ},\text{SZH}} \times {}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}} \quad (4.12)$$

angeben. Der Vektor der Zwangskräfte für das Hinterteil der Zugmaschine ergibt sich nach Transformation in das Inertialsystem mit Gleichung (3.7) zu

$${}^{\text{I}}\mathbf{F}_{\text{ZZH}} = {}^{\text{I}}\mathbf{T}_{\text{ZH}} ({}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKHV}} + {}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}}) \quad (4.13)$$

und der Vektor der Zwangsmomente am Zugmaschinenhinterteil zu

$${}^{\text{ZH}}\mathbf{M}_{\text{ZZH}} = {}^{\text{ZH}}\mathbf{M}_{\text{ZZH},1} + {}^{\text{ZH}}\mathbf{M}_{\text{ZZH},2}. \quad (4.14)$$

Die an der Sattelkupplung angreifenden Zwangskräfte wirken gleichfalls in entgegengesetzter Richtung auf das Vorderteil des Aufliegers ein. Die von dieser Bindung auf das Vorderteil einwirkenden Kräfte ergeben sich nach Transformation in das Koordinatensystem des Aufliegervorderteils (Gleichung (3.8) bzw. (A.3) sowie Bild 3.5) zu:

$${}^{\text{AV}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}} = \begin{bmatrix} F_{\text{ZKZx/AV}} \\ F_{\text{ZKZy/AV}} \\ F_{\text{ZKZz/AV}} \end{bmatrix} = ({}^{\text{ZH}}\mathbf{T}_{\text{AV}})^{\text{T}} (-{}^{\text{ZH}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}}). \quad (4.15)$$

Mit dem Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zur Sattelkupplung

$${}^{\text{AV}}\mathbf{r}_{\text{KZ},\text{SAV}} = \begin{bmatrix} x_{\text{KZr/AV}} \\ 0 \\ z_{\text{KZr/AV}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

und den in das Koordinatensystem des Vorderteils transformierten Zwangsmomenten kann der Zwangsmomentenvektor der Kupplung mit folgender Beziehung bestimmt werden:

$${}^{\text{AV}}\mathbf{M}_{\text{ZAV},1} = {}^{\text{AV}}\mathbf{T}_{\text{AV},\text{ZW1}} \begin{bmatrix} -M_{\text{ZKZx/AV,ZW1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^{\text{AV}}\mathbf{r}_{\text{KZ},\text{SAV}} \times {}^{\text{AV}}\mathbf{F}_{\text{ZKZ}}. \quad (4.17)$$

Zur weiteren Berechnung der Zwangskräfte und –momente am Aufliegervorderteil ist der Freischnitt in Bild 4.3 zu betrachten. Bei dem Drehgelenk zur Nachbildung der Fahrwerks-

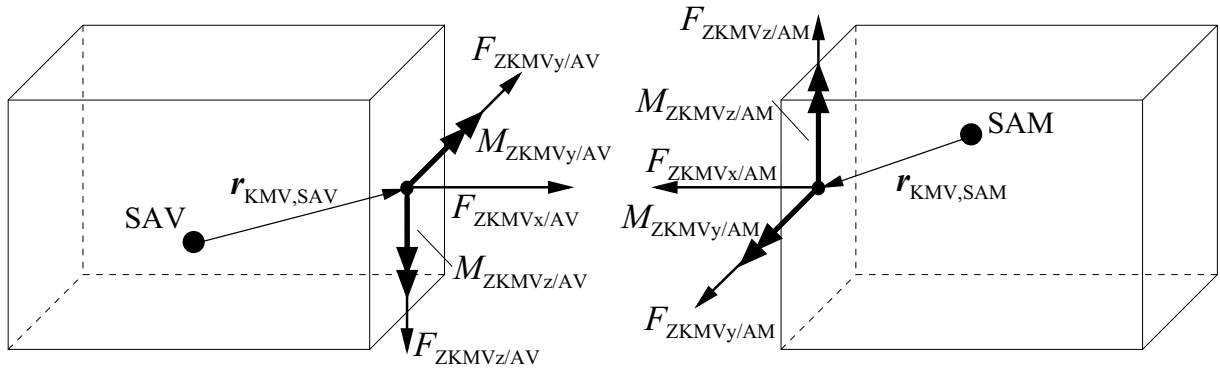


Bild 4.3: Körperschnitt am Gelenk zwischen Vorder- und Mittelteil des Aufliegers

verwindung handelt es sich um eine Bindung mit einem Freiheitsgrad. Deshalb werden drei senkrecht aufeinander stehende Kräfte und zwei ebenso linear unabhängige Momente zur Nachbildung des Gelenks eingeführt. Am freigeschnittenen Gelenk (siehe Bild 4.3) sind die die Bindung repräsentierenden Reaktionskräfte (Pfeil mit einer Pfeilspitze)

$${}^{AV}\mathbf{F}_{ZKMV} = \begin{bmatrix} F_{ZKMOVx/AV} \\ F_{ZKMOVy/AV} \\ F_{ZKMOVz/AV} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

und Reaktionsmomente (Pfeil mit Doppelpfeilspitzen)

$${}^{AV}\mathbf{M}_{ZKMV} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{ZKMOVy/AV} \\ M_{ZKMOVz/AV} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

in Richtung der körperfesten Koordinatenachsen des Aufliegervorderteils eingezeichnet. Außerdem ist der Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt aufgeführt

$${}^{AV}\mathbf{r}_{KMV,SAV} = \begin{bmatrix} x_{KMVI/AV} \\ 0 \\ z_{KMVI/AV} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

mit dem die Zwangsmomente von dem Drehgelenk auf den Schwerpunkt des Aufliegervorderteils bestimmt werden können:

$${}^{AV}\mathbf{M}_{ZAV,2} = {}^{AV}\mathbf{M}_{ZKMV} + {}^{AV}\mathbf{r}_{KMV,SAV} \times {}^{AV}\mathbf{F}_{ZKMV}. \quad (4.21)$$

Der Vektor der Zwangskräfte für das Vorderteil des Aufliegers ergibt sich nach Transformation in das Inertialsystem mit Gleichung (3.8) zu

$${}^I\mathbf{F}_{ZAV} = {}^I\mathbf{T}_{AV} ({}^{AV}\mathbf{F}_{ZKZ} + {}^{AV}\mathbf{F}_{ZKMV}) \quad (4.22)$$

und der Vektor der Zwangsmomente am Aufliegervorderteil zu

$${}^{AV}\mathbf{M}_{ZAV} = {}^{AV}\mathbf{M}_{ZAV,1} + {}^{AV}\mathbf{M}_{ZAV,2}. \quad (4.23)$$

Zur Berechnung der Zwangsmomente des Aufliegermittelteils erfolgt zunächst die Bestimmung der Kräfte und Momente, die das Drehgelenk zwischen Vorder- und Hinterteil des Aufliegers dem Mittelteilsschwerpunkt SAM aufprägt. Dazu werden die Kräfte der Gleichung (4.18) mit negativem Vorzeichen

$${}^{AM}\mathbf{F}_{ZKMV} = {}^{AM}\mathbf{T}_{AV} (-{}^{AV}\mathbf{F}_{ZKMV}) \quad (4.24)$$

benutzt. Die zugehörige Transformation mit der Matrix ${}^{AM}\mathbf{T}_{AV}$ (Gleichung (A.4)) ist in Bild 3.6 dargestellt. Zur Bestimmung der Zwangsmomente dieser Bindung wird Gleichung (4.19) hinzugezogen, so daß sich mit dem Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt

$${}^{AM}\mathbf{r}_{KMV,SAM} = \begin{bmatrix} x_{KMVr/AM} \\ 0 \\ z_{KMVr/AM} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

der Zwangsmomentenvektor

$${}^{AM}\mathbf{M}_{ZAM,1} = {}^{AM}\mathbf{T}_{AV} (-{}^{AV}\mathbf{M}_{ZKMV}) + {}^{AM}\mathbf{r}_{KMV,SAM} \times {}^{AM}\mathbf{F}_{ZKMV} \quad (4.26)$$

ergibt. Nun müssen noch die Reaktionskräfte und -momente des Drehgelenks zwischen Mittel- und Hinterteil des Aufliegers bestimmt werden. Dazu sei auf das Bild 4.4 verwiesen. Analog zum Drehgelenk zwischen Aufliegervorder- und -mittelteil dient dieses

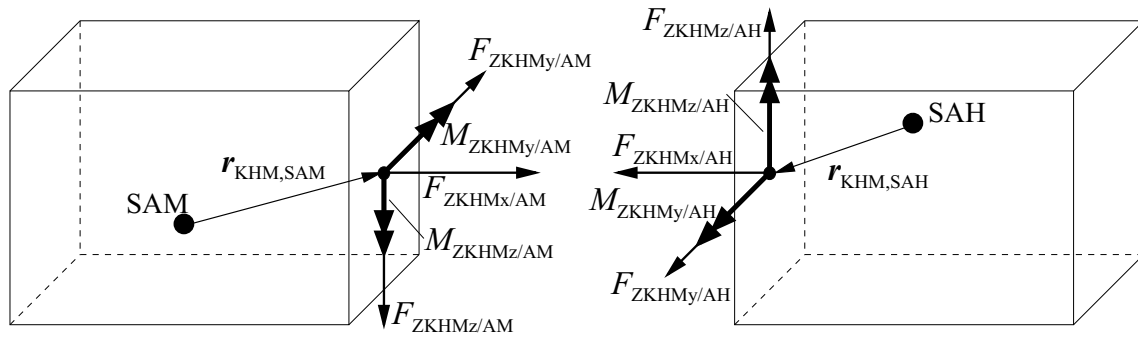


Bild 4.4: Körperschnitt am Gelenk zwischen Mittel- und Hinterteil des Aufliegers

Gelenk zur Nachbildung der Fahrwerksverwindung. Es handelt sich um eine Bindung mit einem Freiheitsgrad, so daß drei orthogonal aufeinander stehende Kräfte und zwei ebenso linear unabhängige Momente zur Nachbildung des Gelenks eingeführt werden. Am freigeschnittenen Gelenk (siehe Bild 4.3) sind die die Bindung repräsentierenden Reaktionskräfte (Pfeil mit einer Pfeilspitze)

$${}^{AM}\mathbf{F}_{ZKHM} = \begin{bmatrix} F_{ZKHMx/AM} \\ F_{ZKHMz/AM} \\ F_{ZKHMz/AM} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

und Reaktionsmomente (Pfeil mit Doppelpfeilspitzen)

$${}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZKHM}} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{\text{ZKHM}_y/\text{AM}} \\ M_{\text{ZKHM}_z/\text{AM}} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

in Richtung der körperfesten Koordinatenachsen des Aufliegermittelteils eingezeichnet. Außerdem ist der Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt aufgeführt

$${}^{\text{AM}}\mathbf{r}_{\text{KHM,SAH}} = \begin{bmatrix} x_{\text{KHM}/\text{AM}} \\ 0 \\ z_{\text{KHM}/\text{AM}} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

mit dem die Zwangsmomente von dem Drehgelenk auf den Schwerpunkt des Aufliegermittelteils bestimmt werden können:

$${}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZAM},2} = {}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZKHM}} + {}^{\text{AM}}\mathbf{r}_{\text{KHM,SAH}} \times {}^{\text{AM}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}}. \quad (4.30)$$

Der Vektor der Zwangskräfte für das Mittelteil des Aufliegers ergibt sich nach Transformation in das Inertialsystem mit Gleichung (3.9) zu

$${}^{\text{I}}\mathbf{F}_{\text{ZAM}} = {}^{\text{I}}\mathbf{T}_{\text{AM}} ({}^{\text{AM}}\mathbf{F}_{\text{ZKMV}} + {}^{\text{AM}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}}) \quad (4.31)$$

und der Vektor der Zwangsmomente am Aufliegervorderteil zu

$${}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZAM}} = {}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZAM},1} + {}^{\text{AM}}\mathbf{M}_{\text{ZAM},2}. \quad (4.32)$$

Zum Schluß erfolgt noch die Berechnung des Zwangskraftvektors des Aufliegerhinterteils. Dazu müssen die Kräfte und Momente, die das Drehgelenk zwischen Mittel- und Hinterteil des Aufliegers dem Hinterteilschwerpunkt SAH aufzwingt, bestimmt werden. Die Kräfte der Gleichung (4.27) werden mit einem negativem Vorzeichen versehen, so daß sich der Vektor der Zwangskräfte dieses Teilkörpers zu

$${}^{\text{AH}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}} = {}^{\text{AH}}\mathbf{T}_{\text{AM}} (-{}^{\text{AM}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}}) \quad (4.33)$$

ergibt. Die zugehörige Transformation mit der Matrix ${}^{\text{AH}}\mathbf{T}_{\text{AM}}$ (Gleichung (A.5)) ist in Bild 3.6 dargestellt. Damit läßt sich der $[3 \times 1]$ -Vektor der Zwangskräfte in Koordinaten des Inertialsystems nach der Transformation mit der Matrix ${}^{\text{I}}\mathbf{T}_{\text{AH}}$ (Gleichung (3.10)) durch die Beziehung

$${}^{\text{I}}\mathbf{F}_{\text{ZAH}} = {}^{\text{I}}\mathbf{T}_{\text{AH}} {}^{\text{AH}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}} \quad (4.34)$$

beschreiben. Zur Bestimmung des Zwangsmomentenvektors dieses Teilkörpers wird Gleichung (4.28) hinzugezogen, so daß sich mit dem Ortsvektor vom Teilkörperschwerpunkt zum Gelenkpunkt

$${}^{\text{AH}}\mathbf{r}_{\text{KHM,SAH}} = \begin{bmatrix} x_{\text{KHM}_r/\text{AH}} \\ 0 \\ z_{\text{KHM}_r/\text{AH}} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

der Zwangsmomentenvektor ergibt:

$${}^{\text{AH}}\mathbf{M}_{\text{ZAH}} = {}^{\text{AH}}\mathbf{T}_{\text{AV}} (-{}^{\text{AV}}\mathbf{M}_{\text{ZKMV}}) + {}^{\text{AH}}\mathbf{r}_{\text{KHM,SAH}} \times {}^{\text{AH}}\mathbf{F}_{\text{ZKHM}}. \quad (4.36)$$

Setzt man die Gleichungen (4.5), (4.6), (4.13), (4.14), (4.22), (4.23), (4.31), (4.32), (4.34) und (4.36) in (4.1) ein, so ist der Vektor der Zwangskräfte und -momente vollständig beschrieben. Dieser kann nunmehr zur Überprüfung, ob bei der Generierung der Jacobi-Matrix Fehler aufgetreten sind, benutzt werden, da die Multiplikation der transponierten Jacobi-Matrix mit dem Vektor der Zwangskräfte einen Nullvektor ergeben muß. Erst nach dem Testen sollte die Matrix und allen anderen zur Modellierung des Fahrwerks benötigten Gleichungen aus dem **Computer Algebra System-Tool** in das jeweilige Simulationstool transformiert werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht ist der Entwurf eines räumlichen Modells eines Sattelzugfahrwerks beschrieben worden.

Nach einer Einleitung wurde im 2. Abschnitt die Kinematik und Dynamik von Mehrkörpersystemen, die die Grundlage der Modellierung bilden, vorgestellt. Ausgehend von einigen wichtigen mechanischen Begriffen und deren Definitionen ist das Bearbeiten von Drehbewegungen und von Bewegungen relativ zu raum- und körperfesten Bezugssystemen dargelegt worden. Da es sich bei dem Mehrkörpersystem um ein Fahrzeug handelt, werden die KARDAN-Winkel bzw. die kinematischen Kardangleichungen zur Beschreibung von Drehungen herangezogen. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen existieren eine Vielzahl von Methoden. Das Newton-Euler-Jourdain-Verfahren stellt eine der effektivsten und transparentesten Vorgehensweisen zur Aufstellung der Bewegungsdifferentialgleichungen für mechanische Systeme mit vielen Freiheitsgraden dar und wurde deshalb näher erläutert.

Im 3. Abschnitt erfolgte die Herleitung eines analytischen, räumlichen Modells des Fahrwerks eines Sattelzuges auf der Grundlage des Newton-Euler-Jourdain-Verfahrens. Die Zugmaschine und der Auflieger wurden durch fünf starre Teilkörper approximiert. Die Zugmaschine gliedert sich in den Vorder- und den Hinterteil. Vorder-, Mittel- und Hinterteil bilden die Teilkörper des Aufliegers. Die Sattelkupplung ist als ein zweiwertiges ideales Drehgelenk (keine Elastizitäten) mit zwei Freiheitsgraden aufgefaßt worden. Die einwertigen Gelenke zwischen Zugmaschinenvorder- und -hinterteil, Aufliegervorder- und -mittelteil sowie Aufliegermittel- und -hinterteil haben einen rotatorischen Freiheitsgrad. Sie dienen zur Nachbildung der Verwindungsfähigkeit der Fahrwerke beider Teilfahrzeuge in Längsrichtung. Von den 30 Freiheitsgraden bei freier räumlicher Bewegung sind 19 gesperrt. Damit kann das System mit 11 Minimalkoordinaten beschrieben werden. Die Modellstruktur entspricht einer offenen kinematischen Kette.

Abschnitt 4 beinhaltet die genaue Beschreibung der Herleitung des Vektors der Zwangskräfte und -momente. Dieser Vektor wird eigentlich nicht für die Differentialgleichung des Sattelzugfahrwerkes in Minimalkoordinaten benötigt, da die Multiplikation der transponierten Jacobi-Matrix mit dem Vektor der Zwangskräfte einen Nullvektor ergibt. Genau diese Eigenschaft eines mechanischen Systems, daß alle Kräfte und Momente, die senkrecht auf der von den Zwangsbedingungen der Bindungen erzeugten Tangentialfläche stehen, und damit geometrisch gesehen im rechten Winkel zu den Gradienten der Jacobi-Matrizen stehen, wird zu einer Überprüfung der Jacobi-Matrix benutzt.

Aufgrund der Größe der einzelnen Terme der Vektordifferentialgleichungen des Fahrwerks, eine aus **Maple** exportierte Datei im ASCII-Format mit der bestimmten Jacobi-Matrix beträgt ca. 140 kByte, kann ein derart komplexes Modell kaum noch in eine Simulationsumgebung wie beispielsweise **Matlab** eingebunden werden. Die erzielbaren Simulationszeiten sind so groß, daß ein sinnvolles Arbeiten mit diesem Modell unmöglich

erscheint. Deshalb ist entweder auf spezielle Simulationsumgebungen zurückzugreifen, die eine objektorientierte Programmierung erlauben (Schiehlen 1990, Chamillard und Gissinger 1996, Hahn u. a. 1996, Adamski u. a. 1997) oder das Modell ist in seiner Dimension zu vermindern.

6 Literaturverzeichnis

- Adamski, D., C. Schuster** und **M. Hiller**. 1997. Fahrdynamiksimulation mit FA-SIM_C++ als Beispiel für die Modellierung mechatronischer Systeme. *VDI-Tagung: Mechatronik im Maschinen- und Fahrzeugbau*. VDI-Berichte 1315. 117–141.
- Becker, E.** und **W. Bürger**. 1975. *Kontinuumsmechanik*. Mechanik: B. G. Teubner Studienbücher.
- Bronstein, I. N.** und **K. A. Semendjajew**. 1989. *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt a.M.: Verlag Harri Deutsch.
- Chamaillard, Y.** und **G. L. Gissinger**. 1996. Formal and architectural aspects of modelling, the case of a semi-trailer. *Proc. 13th Triennial IFAC World Congress*. San Francisco/USA. 17–22.
- Gantmacher, F. R.** 1970. *Matrizenrechnung I*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Göhring, E.** 1989. Einsatzmöglichkeiten der Elektronik im Nutzfahrzeug der Gegenwart und Zukunft – Teil 1. *Automobiltechnische Zeitschrift ATZ* 91. 73–79.
- Greenwood, D. T.** 1977. *Classical dynamics*. London: Prentice-Hall.
- Hahn, M., J. Richert** und **J. Seuss**. 1996. Mechatronic object-oriented modelling and control strategies for vehicle convoy driving. *AVEC'96, International Symposium on Advanced Vehicle Control*. Aachen/Germany. 385–402.
- Helling, J.** und **A. Seewald**. 1991. Verbesserung der aktiven Sicherheit von Sattelkraftfahrzeugen durch ein neues Kupplungskonzept. *Automobil-Industrie* 91(3). 227–234.
- Hiller, M.** 1983. *Mechanische Systeme – Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik*. Berlin: Springer.
- Kortüm, W.** und **P. Lugner**. 1994. *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Pfeiffer, F.** 1992. *Einführung in die Dynamik*. Mechanik: B. G. Teubner Studienbücher.
- Popp, K.** und **W. Schiehlen**. 1993. *Fahrzeugdynamik – Eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug – Fahrweg*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Rill, G.** 1994. *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- Schiehlen, W.** 1990. *Multibody systems handbook*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer.

- Schieschke, R.-G.** 1988. *Konzeption und Realisation komplexer fahrdynamischer Simulationsmodelle am Beispiel eines Sattelzuges mit beweglicher Ladung. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 12.* 106. Düsseldorf: VDI.
- Schnelle, K.-P.** 1990. *Simulationsmodelle für die Fahrdynamik von Personenwagen unter Berücksichtigung der nichtlinearen Fahrwerkskinematik.* Dissertation. Universität Stuttgart. VDI Fortschritt-Berichte 146. Reihe 12. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen.* München: R. Oldenbourg Verlag.
- Szabó, I.** 1975. *Einführung in die Technische Mechanik.* Berlin: Springer.
- Szabó, I.** 1979. *Geschichte der mechanischen Prinzipien.* Basel: Birkhäuser.
- Torre Flores, P., T. Bertram und H. Schwarz.** 1997. Modellierung eines Sattelzuges zur Echtzeitsimulation. *VDI-Tagung: Mechatronik im Maschinen- und Fahrzeugbau.* VDI-Berichte 1315. 167–179.

A Transformationsmatrizen

$${}^I\mathbf{T}_{ZV} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} & \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} & \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} \\ \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} & -\cos \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV} & +\sin \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\ -\sin \theta_{ZV} & \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} & \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$${}^{ZV}\mathbf{T}_{ZH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{ZH} & -\sin \phi_{ZH} \\ 0 & \sin \phi_{ZH} & \cos \phi_{ZH} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$${}^{ZH}\mathbf{T}_{AV} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{AV} \cos \psi_{AV} & -\sin \psi_{AV} & \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV} \\ \cos \theta_{AV} \sin \psi_{AV} & \cos \psi_{AV} & \sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} \\ -\sin \theta_{AV} & 0 & \cos \theta_{AV} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$${}^{AV}\mathbf{T}_{AM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{AM} & -\sin \phi_{AM} \\ 0 & \sin \phi_{AM} & \cos \phi_{AM} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$${}^{AM}\mathbf{T}_{AH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{AH} & -\sin \phi_{AH} \\ 0 & \sin \phi_{AH} & \cos \phi_{AH} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$${}^1\mathbf{T}_{ZV,ZW1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{ZV} & -\sin \psi_{ZV} & 0 \\ \sin \psi_{ZV} & \cos \psi_{ZV} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$${}^{ZV,ZW1}\mathbf{T}_{ZV,ZW2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ZV} & 0 & \sin \theta_{ZV} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{ZV} & 0 & \cos \theta_{ZV} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$${}^{ZV,ZW2}\mathbf{T}_{ZV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{ZV} & -\sin \phi_{ZV} \\ 0 & \sin \phi_{ZV} & \cos \phi_{ZV} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$${}^{ZH}\mathbf{T}_{AV,ZW1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{AV} & -\sin \psi_{AV} & 0 \\ \sin \psi_{AV} & \cos \psi_{AV} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$${}^{AV,ZW1}\mathbf{T}_{AV} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{AV} & 0 & \sin \theta_{AV} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{AV} & 0 & \cos \theta_{AV} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

B Elemente der Jacobi-Matrix des Fahrwerkmodells

$$\begin{aligned}
J_{\text{TZV}/1,1} &= 1 \\
J_{\text{TZV}/1,2} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,3} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,4} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,5} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,6} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,7} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,8} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,9} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,10} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/1,11} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,1} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,2} &= 1 \\
J_{\text{TZV}/2,3} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,4} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,5} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,6} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,7} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,8} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,9} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,10} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/2,11} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,1} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,2} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,3} &= 1 \\
J_{\text{TZV}/3,4} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,5} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,6} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,7} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,8} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,9} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,10} &= 0 \\
J_{\text{TZV}/3,11} &= 0
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{RZV}/1,1} &= -\sin\theta_{\text{ZV}} \\
\hat{J}_{\text{RZV}/2,1} &= \sin\phi_{\text{ZV}} \cos\theta_{\text{ZV}} \\
\hat{J}_{\text{RZV}/2,2} &= \cos\phi_{\text{ZV}} \\
\hat{J}_{\text{RZV}/3,1} &= \cos\phi_{\text{ZV}} \cos\theta_{\text{ZV}} \\
\hat{J}_{\text{RZV}/3,2} &= -\sin\phi_{\text{ZV}}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{TZH}/1,1} &= -\cos\theta_{\text{ZV}} \sin\psi_{\text{ZV}} x_{\text{KHV1/ZV}} + (-\cos\phi_{\text{ZV}} \sin\theta_{\text{ZV}} \sin\psi_{\text{ZV}} \\
&\quad + \sin\phi_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}}) z_{\text{KHV1/ZV}} + \cos\theta_{\text{ZV}} \sin\psi_{\text{ZV}} x_{\text{KHVr/ZH}} \\
&\quad - (-\sin\phi_{\text{ZV}} \sin\theta_{\text{ZV}} \sin\psi_{\text{ZV}} - \cos\phi_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}}) \sin\phi_{\text{ZH}} \\
&\quad + (-\cos\phi_{\text{ZV}} \sin\theta_{\text{ZV}} \sin\psi_{\text{ZV}} + \sin\phi_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}}) \cos\phi_{\text{ZH}}) z_{\text{KHVr/ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/1,2} &= -\sin\theta_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}} x_{\text{KHV1/ZV}} + \cos\phi_{\text{ZV}} \cos\theta_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}} z_{\text{KHV1/ZV}} \\
&\quad + \sin\theta_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}} x_{\text{KHVr/ZH}} - (-\sin\phi_{\text{ZV}} \cos\theta_{\text{ZV}} \cos\psi_{\text{ZV}} \sin\phi_{\text{ZH}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{TZH}/1,3} &= + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
&\quad - (\sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} + \cos \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} \\
&\quad - (- (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} + \sin \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} \\
&\quad + (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} + \cos \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/1,4} &= - (- (\sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH} \\
&\quad - (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} + \sin \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/2,1} &= \cos \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} - \cos \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
&\quad - (- (\sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} \\
&\quad + (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} + \sin \phi_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/2,2} &= - \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} \\
&\quad + \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} - (- \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \sin(\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/2,3} &= (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} \\
&\quad - (- (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} \\
&\quad + (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/2,4} &= - (- (\sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} + \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH} \\
&\quad - (\cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/3,2} &= - \cos \theta_{ZV} x_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} - \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + \cos \theta_{ZV} x_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
&\quad - (\sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} - \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/3,3} &= - \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} - (- \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} \\
&\quad - \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
\hat{J}_{\text{TZH}/3,4} &= - (- \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} - \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{RZH}/1,1} &= - \sin \theta_{ZV} \\
\hat{J}_{\text{RZH}/2,1} &= \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} \\
\hat{J}_{\text{RZH}/2,2} &= \cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV} \\
\hat{J}_{\text{RZH}/3,1} &= - \sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
\hat{J}_{\text{RZH}/3,2} &= - \sin \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \cos \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{TAV}/1,1} &= - \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV}) \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
&\quad - (- (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} \\
&\quad + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KHV}_r/\text{ZH}} \\
&\quad - \cos \theta_{ZV} \sin(\psi_{ZV} x_{\text{KZI}/\text{ZH}} + (- (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin(\phi_{ZH} + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) z_{\text{KZI}/\text{ZH}} \\
&\quad - (- \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \cos \theta_{\text{AV}} \cos \psi_{\text{AV}} \\
&\quad + ((- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH} \\
&\quad + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV}) \sin \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH}) \cos \theta_{\text{AV}} \sin \psi_{\text{AV}} \\
&\quad - (- (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} \\
&\quad + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) \sin \theta_{\text{AV}}) x_{\text{KZI}/\text{AV}} \\
&\quad - (- \cos \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \sin \theta_{\text{AV}} \cos \psi_{\text{AV}} + ((- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH} + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV}) \sin \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH}) \sin \theta_{\text{AV}} \sin \psi_{\text{AV}} \\
&\quad + (- (- \sin \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad - \cos \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \sin \phi_{ZH} + (- \cos \phi_{ZV} \sin \theta_{ZV} \sin \psi_{ZV} \\
&\quad + \sin \phi_{ZV} \cos \psi_{ZV}) \cos \phi_{ZH}) \cos \theta_{\text{AV}}) z_{\text{KZI}/\text{AV}} \\
\hat{J}_{\text{TAV}/1,2} &= - \sin \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} x_{\text{KHV}_1/\text{ZV}} + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \psi_{ZV} z_{\text{KHV}_1/\text{ZV}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-\cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} - \sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})z_{KZl/ZH} \\
& - ((-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& - (-\cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
& - \sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\sin\theta_{AV})x_{KZr/AV} - ((-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& + (-\cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} - \sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV})z_{KZr/AV} \\
\hat{J}_{TAV/3,5} = & - (\sin\theta_{ZV}\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos(\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV})x_{KZr/AV} \\
& - (\sin(\theta_{ZV}\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV})z_{KZr/AV} \\
\hat{J}_{TAV/3,6} = & - (\sin\theta_{ZV}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} - (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos(\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& - (-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV})x_{KZr/AV} \\
& - (-\sin\theta_{ZV}\cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& - (-\sin\phi_{ZV})\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\sin\theta_{AV})z_{KZr/AV}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{RAV/1,1} = & -\sin\theta_{ZV}\cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& - (-\sin\phi_{ZV})\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\sin\theta_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/1,2} = & \cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
& - \sin\theta_{AV}(-\sin\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \cos\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
\hat{J}_{RAV/1,3} = & \cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/1,4} = & \cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/1,5} = & -\sin\theta_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/2,1} = & \sin\theta_{ZV}\sin\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/2,2} = & \cos\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
\hat{J}_{RAV/2,3} = & -\sin\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/2,4} = & -\sin\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/3,1} = & -\sin\theta_{ZV}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
& + (-\sin\phi_{ZV})\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
& + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/3,2} = & \sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
& + \cos\theta_{AV}(-\sin\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \cos\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
\hat{J}_{RAV/3,3} = & \sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/3,4} = & \sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{RAV/3,5} = & \cos\theta_{AV}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{TAM/1,1} = & -\cos\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV}x_{KHv1/ZV} + (-\cos\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} \\
& + \sin\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})z_{KHv1/ZV} + \cos\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV}x_{KHvT/ZH} \\
& - ((-\sin\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} - \cos\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\sin\phi_{ZH} \\
& + (-\cos\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} + \sin\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\cos\phi_{ZH})z_{KHvT/ZH} \\
& - \cos\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV}x_{KZl/ZH} + ((-\sin\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} \\
& - \cos\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\sin\phi_{ZH} + (-\cos\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} \\
& + \sin\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\cos\phi_{ZH})z_{KZl/ZH} - (-\cos\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV}\cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
& + ((-\sin\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} - \cos\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\cos\phi_{ZH} \\
& + (-\cos\phi_{ZV}\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{ZV} + \sin\phi_{ZV}\cos\psi_{ZV})\sin\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\text{RAM}/1,1} &= -\sin\theta_{ZV}\cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
&\quad - (-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\sin\theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/1,2} &= \cos\theta_{AV}\sin\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
&\quad - \sin\theta_{AV}(-\sin\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \cos\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
\hat{J}_{\text{RAM}/1,3} &= \cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/1,4} &= \cos\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/1,5} &= -\sin\theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,1} &= (\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\psi_{AV})\cos\phi_{AM} \\
&\quad + (-\sin\theta_{ZV}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
&\quad + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
&\quad + (-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV})\sin\phi_{AM} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,2} &= \cos\phi_{AM}\cos\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
&\quad + \sin\phi_{AM}(\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
&\quad + \cos\theta_{AV}(-\sin\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \cos\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV})) \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,3} &= -\cos\phi_{AM}\sin\psi_{AV} + \sin\phi_{AM}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,4} &= -\cos\phi_{AM}\sin\psi_{AV} + \sin\phi_{AM}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,5} &= \sin\phi_{AM}\cos\theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/2,6} &= \cos\phi_{AM} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,1} &= -(\sin\theta_{ZV}\sin\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\cos\psi_{AV})\sin\phi_{AM} \\
&\quad + (-\sin\theta_{ZV}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} + (\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH})\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV} \\
&\quad + (-\sin\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\sin\phi_{ZH} \\
&\quad + \cos\phi_{ZV}\cos\theta_{ZV}\cos\phi_{ZH})\cos\theta_{AV})\cos\phi_{AM} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,2} &= -\sin\phi_{AM}\cos\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
&\quad + \cos\phi_{AM}(\sin\theta_{AV}\sin\psi_{AV}(\cos\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \sin\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV}) \\
&\quad + \cos\theta_{AV}(-\sin\phi_{ZH}\cos\phi_{ZV} - \cos\phi_{ZH}\sin\phi_{ZV})) \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,3} &= \sin\phi_{AM}\sin\psi_{AV} + \cos\phi_{AM}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,4} &= \sin\phi_{AM}\sin\psi_{AV} + \cos\phi_{AM}\sin\theta_{AV}\cos\psi_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,5} &= \cos\phi_{AM}\cos\theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAM}/3,6} &= -\sin\phi_{AM}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
& +(-(\sin \theta_{ZV} \sin \psi_{AV} + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \cos \psi_{AV}) \sin \phi_{AM} \\
& +(-\sin \theta_{ZV} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV} + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} + (-\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) \cos \theta_{AV}) \cos \phi_{AM}) \sin \phi_{AH} \\
\hat{J}_{\text{RAH}/2,5} & = \cos \phi_{AH} (\cos \phi_{AM} \cos \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) \\
& + \sin \phi_{AM} (\sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) \\
& + \cos \theta_{AV} (-\sin \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \cos \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}))) \\
& + \sin \phi_{AH} (-\sin \phi_{AM} \cos \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) \\
& + \cos \phi_{AM} (\sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) \\
& + \cos \theta_{AV} (-\sin \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \cos \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}))) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/2,6} & = \cos \phi_{AH} (-\cos \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \sin \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
& + \sin \phi_{AH} (\sin \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \cos \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/2,7} & = \cos \phi_{AH} (-\cos \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \sin \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
& + \sin \phi_{AH} (\sin \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \cos \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/2,8} & = \cos \phi_{AH} \sin \phi_{AM} \cos \theta_{AV} + \sin \phi_{AH} \cos \phi_{AM} \cos \theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAH}/2,9} & = \cos \phi_{AH} \cos \phi_{AM} - \sin \phi_{AH} \sin \phi_{AM} \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,4} & = -((\sin \theta_{ZV} \sin \psi_{AV} + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \cos \psi_{AV}) \cos \phi_{AM} \\
& +(-\sin \theta_{ZV} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV} + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} + (-\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) \cos \theta_{AV}) \sin \phi_{AM}) \sin \phi_{AH} \\
& +(-(\sin \theta_{ZV} \sin \psi_{AV} + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \cos \psi_{AV}) \sin \phi_{AM} + (-\sin \theta_{ZV} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV} \\
& + (\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH} + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH}) \sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} \\
& + (-\sin \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \sin \phi_{ZH} \\
& + \cos \phi_{ZV} \cos \theta_{ZV} \cos \phi_{ZH}) \cos \theta_{AV}) \cos \phi_{AM}) \cos \phi_{AH} \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,5} & = -\sin \phi_{AH} (\cos \phi_{AM} \cos \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} \\
& - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) + \sin \phi_{AM} (\sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} \\
& - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) + \cos \theta_{AV} (-\sin \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} \\
& - \cos \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}))) + \cos \phi_{AH} (-\sin \phi_{AM} \cos \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} \\
& - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) + \cos \phi_{AM} (\sin \theta_{AV} \sin \psi_{AV} (\cos \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} \\
& - \sin \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}) + \cos \theta_{AV} (-\sin \phi_{ZH} \cos \phi_{ZV} - \cos \phi_{ZH} \sin \phi_{ZV}))) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,6} & = -\sin \phi_{AH} (-\cos \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \sin \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
& + \cos \phi_{AH} (\sin \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \cos \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,7} & = -\sin \phi_{AH} (-\cos \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \sin \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
& + \cos \phi_{AH} (\sin \phi_{AM} \sin \psi_{AV} + \cos \phi_{AM} \sin \theta_{AV} \cos \psi_{AV}) \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,8} & = -\sin \phi_{AH} \sin \phi_{AM} \cos \theta_{AV} + \cos \phi_{AH} \cos \phi_{AM} \cos \theta_{AV} \\
\hat{J}_{\text{RAH}/3,9} & = -\sin \phi_{AH} \cos \phi_{AM} - \cos \phi_{AH} \sin \phi_{AM}
\end{aligned} \tag{B.10}$$