

Ausgangs-Regel-Relative und Nullodynamik

Markus Lemmen

Forschungsbericht 05/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Forschungsbericht beschreibt die aus der Differentialgeometrie her gut bekannten Begriffe aus dem Bereich der Nullodynamik und stellt deren Erweiterung auf Ausgangs-Regel-Relative vor. Neben einer Übersicht über die differentialgeometrische Konstruktion der Nullodynamik und einer Interpretation der dabei verwendeten (Ko-)Distributionen und (Ko-)Vektorfelder erfolgt eine relationentheoretische Erweiterung auf zunächst beliebige konstante und danach auf beliebige variable Ausgangsgrößen.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitende Übersicht	1
2 Nulldynamik konstanter Ausgangsgrößen	3
2.1 Differentialgeometrische Korrespondenz	3
2.2 Differentialgeometrische Konstruktion	5
2.3 Relationentheoretische Begriffsherleitung	12
2.4 Beispiele	16
2.4.1 Lineare Systeme	16
2.4.2 Beispiel 1	17
2.4.3 Beispiel 2	19
2.5 Anwendung auf einen hydraulischen Translationsantrieb	22
3 Nulldynamik beliebiger Ausgangsgrößen	28
4 Zusammenfassung und Ausblick	30
5 Literatur	31

Nomenklatur

Skalare und vektorwertige Größen

A	Punkt aus einer Punktmenge $(t_A, x_A) =: A \in \mathfrak{P}$
B	Punkt aus einer Punktmenge $(t_B, x_B) =: B \in \mathfrak{P}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Drift eines ALS
$\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$	Nulldynamikvektorfeld eines ALS
$\mathbf{G}(\mathbf{x})$	Eingangsdistribution eines analytischen Systems $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_m]$
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	Ausgangsfunktion/nichtlineare Ausgangsspaltenmatrix eines analytischen Systems
$\mathbf{H}_k(\mathbf{x})$	Im Schritt k des Nulldynamikalgorithmus für die Ausgangsabbildung relevante Kodistribution
k	Index
m	Dimension des Eingangsvektors
n	Dimension des Zustandsvektors
p	Dimension des Ausgangsvektors
r_k	Dimension der Zustandsteilmannigfaltigkeit, die in der Distribution $\text{span } \mathbf{G}$ enthalten ist, aber im Iterationsschritt k nicht tangential zur Nulldynamiksteilmannigfaltigkeit $\mathcal{T}_x \mathcal{M}_k$ verläuft
$\mathbf{R}_k(\mathbf{x})$	Annulator zu $L_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}))$; also die Kodistribution, die nicht durch die Steuerung \mathbf{u} beeinflussbar in den Ausgang abgebildet wird
s_k	Dimensionsverlust der Nulldynamiktangentialeilmannigfaltigkeit im Algorithmusschritt k
\mathbf{S}_k	Auswahlmatrix im Schritt k des Nulldynamikalgorithmus
t, T	Zeit
t_A	Zeitkomponente des Punktes (der Phase) A
u	Stellgröße
\mathbf{u}	Eingangsvektor eines analytischen Systems
x	Zustandsvariable
\mathbf{x}	Zustandsvektor eines analytischen Systems
x_A	Zustandskomponente des Punktes (der Phase) A
\mathbf{y}	Ausgangsvektor eines analytischen Systems
Φ_k	Für den Nulldynamikalgorithmus im Schritt k relevante Kodistribution

Mengen und Mengentupel

\emptyset	Leere Menge
\mathcal{M}	Zustandsmannigfaltigkeit eines analytischen Systems
\mathcal{M}_0	Teilmannigfaltigkeit

\mathfrak{P}	Punktemenge
\mathfrak{P}_0	Teilmenge der Punktemenge
$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$	Regel-Relativ nach Arnold (1994): Mengentripel
$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$,	Ausgangs-Regel-Relativ nach Schleuter und Lemmen (1996): Men-
$(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, [\Pi \cdot dt]_{\mathcal{Y}})$	gentupel
$\Pi \cdot dt$	Abbildungsschar
\mathcal{R}	Menge binärer Relationen auf \mathfrak{P}
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathfrak{r}	Relation
\mathcal{T}	Zeitmenge
$\mathcal{T}_x \mathcal{M}$	Tangentialzustandsmannigfaltigkeit eines analytischen Systems am Punkt \mathbf{x}
\mathcal{U}	Menge zulässiger Stellwerte eines analytischen Systems, Umgebung
\mathcal{X}	Zustandsmenge
\mathcal{X}_0	Teilmenge der Zustandsmenge
\mathcal{Y}	Menge \mathbb{R}^p -wertiger Ausgangsfunktionen
\mathcal{Z}^*	Nulldynamikteilmannigfaltigkeit

Operatoren und Funktionen

$\bar{\mathfrak{h}}(\cdot)$	Abgeschlossene Hülle einer Menge
bild	Bild
col	Spaltenabbildungsoperator
in(\cdot)	Inneres einer Menge
kern	Kern
$L_f \mathbf{h}(\mathbf{x})$	Lie-Ableitung der Funktion \mathbf{h} in Richtung \mathbf{f}
rand(\cdot)	Rand einer Menge
span	Aufspannungsoperator
\times	Kartesisches Mengenprodukt
\circ	Komposition, Relationenprodukt
$\dot{(\cdot)}$	Zeitliche Ableitung $\frac{d(\cdot)}{dt}$
$(\cdot)^{-1}$	Inverse zur Funktion (\cdot)
d	Differential
\in	Element von
\subset	Teilmenge (unecht)
\supset	Obermenge (unecht)
\cap	Schnittmenge
\cup	Vereinigungsmenge
\wedge	UND-Verknüpfung
\vee	ODER-Verknüpfung
\bigwedge	Allquantor

\forall	Existenzquantor
$\langle \cdot \rangle$	durch \cdot definierte Relation
$\rangle \cdot \langle$	Umkehrrelation zu $\langle \cdot \rangle$

Sonstige Zeichen

Σ_{AS}	Analytisches System
$\xrightarrow{\text{bij.}}$	Bijektive Zuordnung
$(\ , \)$	Offenes Intervall, $(t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$
$[\ , \]$	Abgeschlossenes Intervall, $[t_0, t_1] \subset \mathcal{T}$
$[\ , \)$	Halboffenes Intervall, $[t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$

1 Einleitende Übersicht

Die Nulldynamik ist ein, insbesondere für die Stabilisierbarkeit von nichtlinearen Systemen mittels einer Rückführung, interessantes Gebiet der Theorie dynamischer Systeme. Ist bereits die Nulldynamik eines Systems instabil, so kann es durch eine Ausgangsrückführung nicht mehr stabilisiert werden. Andererseits existiert unter einigen Regularitätsanforderungen bei einer stabilen Gleichgewichtslage der Nulldynamik des nichtlinearen Systems ein Rückführungsgesetz, welches eine asymptotische Stabilität des geschlossenen Systems garantiert (Isidori 1995). Die Nulldynamik ist also ein für die Stabilitätsuntersuchung geschlossener Regelkreise wichtiger dynamischer Eigenanteil eines Systems.

Während die Existenz oder Berechenbarkeit der Nulldynamik in der Differentialgeometrie an die Systemstruktur sowie Regularitäts- als auch Tangentialitätsanforderungen gebunden ist, ist dies in der Differentialalgebra für die Existenz von gewissen Normalformen oder Ableitungsstufen der Fall. In diesem Bericht wird nun erstmalig das Konzept der Nulldynamik auf Ausgangs-Regel-Relative erweitert und damit auf einen größeren Bereich an Nichtlinearitäten erweitert, nämlich formal auf Systeme, die nicht notwendigerweise glatt, differenzierbar, in meromorphen Funktionen darstellbar oder stetig sein müssen.

Ausgangspunkt dieser Übertragung ist die Auffassung der Nulldynamik als den Systemanteil, der durch Zustandsrückführung unbeobachtbar gemacht werden kann (Schwarz 1991), bzw. dazu äquivalent gemäß De Luca und Isidori (1987) als das innere Verhalten eines Systems, wenn die Anfangsbedingung und der Systemeingang derart gewählt werden, daß der Ausgang „genullt“ wird, d.h. der Ausgang identisch Null ist. Die Identität des Ausgangs mit dem Ursprung des Ausgangsraumes ist dabei in diesem Zusammenhang nicht zwingend notwendig, um die zur Nulldynamik korrespondierende Idee zu charakterisieren: Es geht vielmehr darum, ob ein System (oder Ausgangs-Regel-Relativ) bei einem fest vorgegebenen Wert oder einer fest vorgegebenen Trajektorie des Ausgangs eine Lösung im Zustandsraum besitzt, die für verschiedene Zustände denselben Ausgang erzeugen. Diese Teilmenge der Zustandsmenge und die darauf zulässige Dynamik des Systems stellen dann die Nulldynamik des Systems oder Relativs dar. Im Unterschied zu Systemen werden jedoch auf diese Art und Weise bei Ausgangs-Regel-Relativen die Punktemengen selbst und die Relationen auf den Punktemengen untersucht. Es sind quasi Untersuchungen anhand der Trajektorien und nicht des Tangentialraums. Für den Spezialfall der Identität des Ausgangssignales mit dem Ursprung des Ausgangsraumes entsteht dann die Nulldynamik im klassischen Sinne.

Dieser Bericht liefert im folgenden Abschnitt zunächst die Übertragung der Nulldynamik auf Ausgangs-Regel-Relative (Schleuter und Lemmen 1996) und umreißt die Analogien zu der aus der Differentialgeometrie bekannten Nulldynamik nichtlinearer, analytischer Systeme (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991, Isidori 1995). Dabei wird

die Berechnung mittels differentialgeometrischer Methoden rekapituliert und die zur Berechnung notwendigen Größen hinsichtlich ihrer Bedeutung interpretiert. Die aus der differentialgeometrischen Theorie her bekannte Problemstellung wird in diesem Abschnitt übertragen und auf einen beliebigen konstanten Ausgang erweitert sowie die Beziehung der Nulldynamik zur Ununterscheidbarkeitseigenschaft in Ausgangs-Regel-Relativen herausgearbeitet. Ein Anwendungsbeispiel in Form eines hydraulischen Differentialzylinders erläutert neben anderen aufgeführten Beispielen die Berechnung der Nulldynamik. Im daran anschließenden 3. Abschnitt erfolgt die Erweiterung des Konzepts der Nulldynamik auf beliebig vorgegebene Ausgangstrajektorien, die im Spezialfall der konstanten Identität zum Koordinatenursprung der Ausgangsmenge des Regel-Relativs ebenfalls in die klassische Nulldynamik übergeht. Mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick schließt dieser Bericht.

2 Nulldynamik konstanter Ausgangsgrößen

2.1 Differentialgeometrische Korrespondenz

Im Rahmen einer differentialgeometrischen Untersuchung werden zeitinvariante analytische Systeme mit linear (affin) eingehender Steuerung (ALS) der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

betrachtet, wobei sich $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ aus m Spalten $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{g}_m(\mathbf{x})]$ zusammensetzt. Eine wichtige Einschränkung ist in diesem Zusammenhang jedoch, daß die Eingangsgröße \mathbf{u} und die Ausgangsgröße \mathbf{y} gemäß (Isidori 1995) die gleiche Dimension besitzen müssen: $p = m$.

Der Grundgedanke zur Nulldynamik kann wie folgt umrissen werden: Es sei zunächst ein Startzustand \mathbf{x}_0 des ALS in der Art gegeben, daß gilt $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Ist nun der Systemzustand des ALS zur Startzeit $t = 0$ identisch mit \mathbf{x}_0 , so bleibt das Ausgangssignal bei einem Eingangssignal von $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ identisch $\mathbf{0}$ für alle $t \geq 0$: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$. Für die Nulldynamik interessant ist die Frage nach der Menge an Eingangssignal- und Startzustandspaaren, die einen Ausgang produzieren, der identisch Null ist.

Zur Bestimmung der Nulldynamik des Systems wird ein rekursiv definierter Algorithmus angewendet.

Algorithmus 2.1 *Nulldynamikalgorithmus* (Isidori 1995)

Schritt 0: Setze $\mathcal{M}_0 := \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{0})$.

Schritt k : Man nehme an, daß für eine Umgebung \mathcal{U}_{k-1} um \mathbf{x}_0 , die Schnittmenge $\mathcal{M}_{k-1} \cap \mathcal{U}_{k-1}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit darstellt; ferner beschreibe \mathcal{M}_{k-1}^c die Komponenten der Schnittmenge $\mathcal{M}_{k-1} \cap \mathcal{U}_{k-1}$, in der auch \mathbf{x}_0 enthalten sein muß (\mathcal{M}_{k-1}^c ist dementsprechend nicht leer, da gilt $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$). Dann definiere rekursiv¹

$$\mathcal{M}_k := \{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \{ \text{span} \{ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \} + \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}_{k-1}^c \} \}. \quad (2.3)$$

□

Die Idee des Algorithmus ist also folgende: Zunächst werden alle Zustände in \mathcal{M}_0 zusammengefaßt, die einen Ausgang identisch $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ erzeugen. Diese Zustände können sich aufgrund der Drift \mathbf{f} des Systems verändern. Es werden aber im nächsten Schritt k

¹ Hier ist die Addition + zweier Distributionen/Tangentialmannigfaltigkeiten gemäß (Nijmeijer und van der Schaft 1990, S. 60) bzw. (Isidori 1995, S. 14) als die Zusammenfassung aller Richtungen der einzelnen Distributionen/Tangentialmannigfaltigkeiten sowie deren Linearkombinationen zu verstehen.

des Algorithmus nur die Zustände berücksichtigt (\mathcal{M}_{k-1} wird also zum Übergang auf \mathcal{M}_k eingeschränkt, verkleinert), die eine „ungefährliche“ Bewegung zulassen; das bedeutet, daß eine der folgenden Eigenschaften erfüllt sein muß:

1. Die Drift kann kompensiert werden: $\mathbf{f} \in \text{span} \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ oder
2. \mathbf{f} verbleibt tangential zu „unbedenklichen“ Zuständen des vorherigen Iterationsschrittes: $\mathbf{f} \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}_{k-1}^c$ bzw.
3. \mathbf{f} erfüllt eine Linearkombination der Eigenschaften 1 und 2.

Mit Hilfe dieses Algorithmus wird also eine gewisse Teilmannigfaltigkeit des Zustandsraumes bestimmt, für die ein Systemausgang mit der Identität zu Null verbunden ist. Es stellt sich jedoch das Problem des Abbruchs des Algorithmus: Existiert ein $k = k^*$ mit der Eigenschaft, daß die Ausgangssignalnullung gegeben ist und ferner die mit Hilfe des Algorithmus 2.1 bestimmte Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_k mit $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k$ maximal hinsichtlich dieser Eigenschaft mit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0$ ist? Zur Klärung dieser Frage sind die beiden folgenden Lemmata notwendig.

Lemma 2.1 (Isidori 1995)

Wenn für jedes $k \geq 0$ eine Umgebung \mathcal{U}_k um \mathbf{x}_0 existiert in der Art, daß $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{U}_k$ eine glatte Untermannigfaltigkeit darstellt, so gilt für ein $k^* < n$ und eine Umgebung \mathcal{U}_k um \mathbf{x}_0 : $\mathcal{M}_{k^*+1} = \mathcal{M}_{k^*}^c$. Ferner gelte darüber hinaus

$$\dim(\text{span} \{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0)\}) = m, \quad (2.4)$$

sowie, daß die Untermannigfaltigkeit $\text{span} \{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0)\} \cap \mathcal{T}_x \mathcal{M}_{k^*}^c$ von konstanter Dimension für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k^*}^c$ sei. Dann gilt unter der Annahme der Gültigkeit dieser Hypothesen, daß die Teilmannigfaltigkeit $\mathcal{Z}^* := \mathcal{M}_{k^*}^c$ eine lokale maximale ausgangsnulldende Untermannigfaltigkeit des Systems (2.1, 2.2) darstellt. \square

Lemma 2.2 (Isidori 1995)

Gilt zusätzlich zu den Hypothesen in Lemma 2.1

$$\text{span} \{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0)\} \cap \mathcal{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{Z}^* = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

so existiert eine eindeutige glatte Abbildung $\mathbf{u}^* : \mathcal{Z}^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ in der Art, daß das Vektorfeld

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

tangential zu \mathcal{Z}^* ist. \square

Sind die Hypothesen aus Lemma 2.1 und 2.2 erfüllt, so ist die Restriktion $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})|_{\mathcal{Z}^*}$ von $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ auf \mathcal{Z}^* ein wohldefiniertes Vektorfeld auf \mathcal{Z}^* (aufgrund der Tangentialität von $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ zu \mathcal{Z}^*). Insofern wird häufig nicht zwischen den Schreibweisen $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})|_{\mathcal{Z}^*}$ und $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ unterschieden.

Die Teilmannigfaltigkeit \mathcal{Z}^* heißt (lokale) *Nulldynamikteilmannigfaltigkeit* (vgl. Nullkern, Def. 2.3) und das Vektorfeld $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ von \mathcal{Z}^* *Nulldynamikvektorfeld*. Das Paar $(\mathcal{Z}^*, \mathbf{f}^*(\mathbf{x}))$ heißt *Nulldynamik* des Systems (2.1,2.2) (Isidori 1995).

2.2 Differentialgeometrische Konstruktion

Aus den vorangegangenen Überlegungen (Lemma 2.1 und 2.2) ergibt sich für die glatte Zustandsteilmannigfaltigkeit \mathcal{Z}^* der Zusammenhang

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \in \mathcal{T}_x\mathcal{Z}^*. \quad (2.7)$$

Auf einer Umgebung \mathcal{U}' um \mathbf{x}_0 kann eine sogenannte Submersion $\mathbf{H} : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}^q$, mit $q = n - \dim(\mathcal{Z}^*)$ derart gebildet werden, daß gilt

$$\mathcal{Z}^* \cap \mathcal{U}' = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}' \mid \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathbf{y}_0\}. \quad (2.8)$$

Hinter der Bildung einer derartigen Submersion verbirgt sich die Idee, daß der Anteil der Zustandsmannigfaltigkeit, der sich aus der Nulldynamikteilmannigfaltigkeit \mathcal{Z}^* herausbewegen könnte (dieser Teil der Zustandsmannigfaltigkeit besitzt eben gerade aufgrund der Konstruktion von \mathcal{Z}^* die Dimension $q = n - \dim(\mathcal{Z}^*)$) so geschaffen sein soll, daß er sich durch die Dynamik $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ nicht von dem Punkt \mathbf{x}_0 entfernt: $(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u})|_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}^*} = \mathbf{0}$. Damit gilt auch $\mathcal{T}_x\mathcal{Z}^* = \ker(d\mathbf{H}(\mathbf{x}))$ für alle $\mathbf{x} \in (\mathcal{Z}^* \cap \mathcal{U}')$ und so kann Gl. (2.7) geschrieben werden als

$$\langle d\mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Diese Gleichung kann aufgrund der Lemmata 2.1 und 2.2 bei der Beschränkung auf \mathcal{Z}^* für den Systemeingang \mathbf{u} gelöst werden. Damit ergibt sich aus Gl. (2.9) notwendigerweise

$$\langle d\mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \in \text{bild}(\langle d\mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rangle) \quad \forall \mathbf{x} \in (\mathcal{Z}^* \cap \mathcal{U}'). \quad (2.10)$$

Diese Überlegungen können nun dazu verwendet werden, die Nulldynamikteilmannigfaltigkeiten und -dynamiken zu berechnen: Zunächst bestimmt sich die Menge \mathcal{M}_0 als die Menge an Zuständen, für die die Ausgangsabbildung \mathbf{h} den gesuchten Wert $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ liefert. Besitzt nun das Differential in einer Umgebung \mathcal{U}_0 um den Punkt \mathbf{x}_0 einen konstanten Rang (der mit $s_0 \leq m$ bezeichnet werde), so ist die Menge $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{U}_0$ eine glatte, $(n - s_0)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des Zustandsraumes. Ist im Besonderen $s_0 < m$ und sind exakt die ersten s_0 Zeilen (von $d\mathbf{h}$) linear unabhängig, so kann eine Matrix

$$\mathbf{S}_0 := (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) \quad (2.11)$$

gefunden werden, die die ersten s_0 unabhängigen Zeilen eines Vektors auswählt. Dann verhält sich insbesondere die Abbildung

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_0\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

derart, daß gilt

$$\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{U}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \mid \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (2.13)$$

Aus dieser Schnittmenge beschreibe die Menge \mathcal{M}_0^c nun gerade den zusammenhängenden Anteil der Teilzustandsmenge von Gl. (2.13), der den Punkt \mathbf{x}_0 enthält. Nach dieser

Induktionsverankerung erfolgt die Berechnung der ersten Teilmannigfaltigkeit \mathcal{M}_1 des Nulldynamikalgorithmus. Diese kann mit Hilfe derjenigen Menge aller $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c$ bestimmt werden, für die

$$\langle d\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \rangle = L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_0(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

nach \mathbf{u} lösbar ist. Gleichung (2.14) beschreibt also anschaulich gesprochen gerade das Tupel an Zuständen und Stellwertverläufen, für das die Eigendynamik (repräsentiert durch den Driftterm \mathbf{f}) gerade den durch den Verlauf von \mathbf{u} beeinflussten Systemanteil (repräsentiert durch \mathbf{G}) kompensiert: Die Änderung der Ausgangsabbildung in Richtung des Driftterms \mathbf{f} entspricht gerade dem negativen Betrag der mit der Steuerung \mathbf{u} bewerteten Änderung der Ausgangsabbildung in Richtung von \mathbf{G} , der Systemempfindlichkeit für ein Eingangssignal.

Besitzt einer der Summanden aus Gl. (2.14) – z.B. $L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_0$ – über die Teilmannigfaltigkeit \mathcal{M}_0^c einen konstanten Rang der Größe r_0 , so ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit dieser Gleichung herzuleiten. Dafür wird zunächst die in \mathbf{x} glatte, $(s_0 - r_0) \times s_0$ -Matrix $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ über die Beziehung

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_0 = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

eingeführt, die den Lösungsraum der Kurven von γ der Gleichung $\gamma L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_0 = \mathbf{0}$ aufspannt. Der Lösungsraum der Lösungskurven γ besitzt dann die konstante Dimension $s_0 - r_0$. Gleichung (2.14) kann nach diesen Überlegungen nur dann lösbar sein, wenn auch die Beziehung

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_0 = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

für den ersten Summanden aus Gl. (2.14) erfüllt ist. Durch diese Überlegung kann mit Hilfe von

$$\Phi_0(\mathbf{x}) := \mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_0 \quad (2.17)$$

für eine Umgebung \mathcal{U}_1 um \mathbf{x}_0 die Menge $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{U}_1$ durch die Beziehung

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{U}_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1 \mid \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \wedge \Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} \quad (2.18)$$

bestimmt werden. Besitzt auch die Abbildung $\text{col}(\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x}))$ einen konstanten Rang der Größe $s_0 + s_1$, in der Umgebung von \mathbf{x}_0 , so kann der bisher beschriebene Iterationsschritt 0 des Nulldynamikalgorithmus zur Bestimmung der \mathcal{M}_i erneut ausgeführt werden. Da $\Phi_0(\mathbf{x})$ genau $s_0 - r_0$ Zeilen besitzt, gilt auch der Zusammenhang

$$s_1 \leq s_0 - r_0. \quad (2.19)$$

Der Algorithmus startet dann ab dem Schritt $k \geq 1$ mit den Abbildungen $\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x})$ und $\Phi_{k-1}(\mathbf{x})$. Dabei besitzt \mathbf{H}_{k-1} die Eigenschaft, daß der Rang des Differentials $\text{rang}(d\mathbf{H}_{k-1})$

gerade gleich der Anzahl seiner Zeilen $s_0 + s_1 + \dots + s_k$ ist („Regularität“), und ferner gilt in einer Umgebung \mathcal{U}_k um den Punkt \mathbf{x}_0

$$\mathcal{M}_k \cap \mathcal{U}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_k \mid \mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \wedge \Phi_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (2.20)$$

Besitzt nun die Abbildung $\text{col}(\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}), \Phi_{k-1}(\mathbf{x}))$ um den Punkt \mathbf{x}_0 einen konstanten Rang der Größe $s_0 + \dots + s_k$, so stellt die Schnittmenge $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{U}_k$ für ein geeignetes \mathcal{U}_k ebenfalls eine glatte Zustandsteilmannigfaltigkeit dar. Darüber hinaus kann angenommen werden, daß (eventuell nach einem Umsortieren) die ersten $s_0 + \dots + s_k$ Zeilen des Differentials dieser Abbildung linear unabhängig sind. \mathbf{S}_{k-1} bezeichne nun die Auswahlmatrix, die die ersten s_k Zeilen der Matrix $\Phi_{k-1}(\mathbf{x})$ auswählt, womit die Submersion \mathbf{H}_k durch die Beziehung

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}), \mathbf{S}_{k-1}\Phi_{k-1}(\mathbf{x})) \quad (2.21)$$

zu bilden ist. Demnach gilt dann

$$\mathcal{M}_k \cap \mathcal{U}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_k \mid \mathbf{H}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (2.22)$$

Auch für diesen Iterationsschritt muß erneut überprüft werden, ob der Systemausgang aufgrund der eigenen Drift oder der Eingangssignale aus der Nulldynamikteilmannigfaltigkeit herausgebracht werden könnte. Dies geschieht analog zu Gl. (2.9) für diesen Iterationsschritt mittels

$$\langle d\mathbf{H}_k(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \rangle = L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Besitzt aus dieser Gleichung die Matrix $L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x})$ den konstanten Rang der Größe r_k für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k^c$, so kann eine weitere Matrix $\mathbf{R}_k(\mathbf{x})$ glatter Funktionen aufgestellt werden, deren $s_0 + s_1 + \dots + s_k - r_k$ Zeilen (lokal um den Punkt \mathbf{x}_0) den Lösungsraum der Gleichung

$$\gamma L_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

aufspannen. Dies kann für die Matrix \mathbf{R} in der Form

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

mit geeigneten Matrizen $\mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x})$ geschehen, da aufgrund ihrer Konstruktion die Beziehung $\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für alle \mathbf{x} in der Umgebung \mathcal{M}_k^c von \mathbf{x}_0 erfüllt ist. Hierin besitzt $\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x})$ genau $s_0 + s_1 + \dots + s_{k-1} - r_{k-1}$ Zeilen und die Matrizen $\mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x})$ besitzen jeweils $s_k - r_k + r_{k-1}$ Zeilen. Somit kann dann auch letztendlich aus $\mathbf{R}_k(\mathbf{x})$ die Abbildung $\Phi_k(\mathbf{x})$ durch die rekursive Beziehung

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x})L_{\mathbf{f}}\mathbf{S}_{k-1}\Phi_{k-1}(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

gebildet werden. Diese neue Abbildung $\Phi_k(\mathbf{x})$ besitzt genau $s_k - r_k + r_{k-1}$ Zeilen, womit

$$s_{k+1} \leq s_k - r_k + r_{k-1} \quad (2.27)$$

stets erfüllt ist.

Aufgrund des großen Umfangs der hier beschriebenen Konstruktion der Nulldynamik-teilmannigfaltigkeit und des Nulldynamikvektorfeldes sollen in der Bemerkung 2.2 noch einige Erläuterungen hinsichtlich einer möglichen Interpretation und der Aufgabe der im jeweiligen Schritt benötigten Größe folgen:

Bemerkung 2.1 *Zur Interpretation der Algorithmusgrößen*

Voraussetzung: *Es soll gelten*

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{h}_p(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} = \mathbf{y}_0.$$

$s_0 := \text{rang}(\text{d}\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ entspricht der Dimension der in den Ausgangsraum im Schritt 0 abbildbaren Tangentialmannigfaltigkeit des Zustandsraums.

$\mathbf{S}_0 := [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$ ist eine Auswahlmatrix, die die für den Rang s_0 relevanten Zeilen von $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ auswählt. Nach einem eventuellen Umsortieren von \mathbf{h} ergibt sich, daß

$\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ eine Basis des Anteils der Ausgangsabbildung ist, der auch die Veränderungen im Tangentialraum abbilden kann:

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_0 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_{s_0}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_{s_0}(\mathbf{x}) \\ h_{s_0+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

$\text{L}_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ ist der Anteil von $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$, der durch das Einstellen einer Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ im Zustandstangentialraum direkt beeinflußt werden kann. Sein **Rang** ist

$$r_0 := \text{rang}(\text{L}_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_0(\mathbf{x})).$$

$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ ist eine $(s_0 - r_0) \times s_0$ -Matrix zum annullieren des Ausdrucks $\text{L}_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_0(\mathbf{x})$. Sie ist demnach eine Matrix, die eine Basis der Tangentialvektoren bestimmt, die senkrecht zum durch die Steuerung $\mathbf{u}(t)$ beeinflussbaren Zustandstangentialraum sind.

Es geht also um eine Distribution \mathbf{R} zum Zwecke der folgenden Aufteilung der Zustandstangentiale Mannigfaltigkeit:

$$\begin{array}{l}
 r_0 \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\left[\mathbf{R}_0^\perp(\mathbf{x}) \right]}^{s_0} \\ \left[\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right\} \longleftarrow \text{Der Anteil von } \mathbf{H}_0, \text{ der durch } \mathbf{u} \text{ beeinflusst wird} \\
 s_0 - r_0 \left\{ \begin{array}{l} \left[\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right\} \longleftarrow \text{Der Anteil von } \mathbf{H}_0, \text{ der nicht durch } \mathbf{u} \text{ beeinflusst wird}
 \end{array}$$

$\Phi_0(\mathbf{x})$ ist der auf den Ausgang abbildbare Anteil der Eigendynamik (Drift), der nicht durch das Einstellen von $\mathbf{u}(t)$ im Zustandstangentiale Raum direkt beeinflusst werden kann:

$$\Phi_0(\mathbf{x}) := \mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_f \mathbf{H}_0(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{H}_k(\mathbf{x})$ ist eine rekursive Erweiterung auf

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{x}) := \text{col}(\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}), \mathbf{S}_{k-1}\Phi_{k-1}(\mathbf{x})).$$

Erweiterung der im vorherigen Schritt $k-1$ für die Ausgangsabbildung relevanten um die durch die Drift veränderten relevanten Anteile.

$\mathbf{R}_k(\mathbf{x})$ ist erneut der annullierende Anteil analog zum Schritt 0. Es ergibt sich dabei aufgrund der besonderen Konstruktion von $\mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x})$ auf $\mathbf{H}_k(\mathbf{x})$ – und der Bedingung, daß $\mathbf{R}_k(\mathbf{x})$ den Lösungsraum von $\gamma L_G \mathbf{H}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ aufspannt – gerade eine Aufteilung in der Form

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x}) \end{array} \right].$$

Dabei besitzen die Teilmatrizen/Kodistributionen \mathbf{P}_{k-1} und \mathbf{Q}_{k-1} gerade jeweils $s_k - r_k + r_{k-1}$ Zeilen. Mit ihrer Hilfe bestimmt sich:

$\Phi_k(\mathbf{x})$ rekursiv definierte Erweiterung zu $\Phi_0(\mathbf{x})$. Sie wird (beispielsweise) berechnet durch

$$\Phi_k(\mathbf{x}) := \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})L_f \mathbf{H}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x})L_f \mathbf{S}_{k-1}\Phi_{k-1}(\mathbf{x}).$$

□

Es gelten folgende Beziehungen in den jeweiligen Algorithmusschritten:

Bemerkung 2.2 (Isidori 1995)

Für die Ganzzahlen s_k und r_k gelten die Beziehungen

$$s_k = \dim(\mathcal{M}_{k-1}) - \dim(\mathcal{M}_k) \quad (2.28)$$

sowie

$$r_k = \dim(\text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\}) - \dim(\text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\} \cap \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}_k). \quad (2.29)$$

Ferner können die sogenannten Invertibilitätshypothesen (die Hypothesen aus Lemma 2.1 und 2.2, Gl. (2.4) und (2.5)) in der Form

$$r_k^* = \text{rang}(\mathbf{L}_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_0)) = m \quad (2.30)$$

ausgedrückt werden. \square

Die in diesem Abschnitt 2.2 beschriebene Konstruktion der Nulldynamik hängt in hohem Maße von nahezu willkürlich gewählten Abbildungen und Matrizen sowie deren Ränge ab. Sind für ein System jedoch die Invertibilitätshypothesen (Gl. (2.4) und (2.5)) erfüllt, so ist die Wahl im jeweiligen Iterationsschritt des Nulldynamikalgorithmus für die Berechnung unkritisch:

Satz 1 (Isidori 1995)

Erfüllt ein System die Invertibilitätshypothesen (Gl. (2.4) und (2.5)), so gilt für jede beliebige Wahl der Matrizen $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{R}_{k^*}(\mathbf{x})$

1. $d\mathbf{H}(\mathbf{x})$ besitzt einen vollen Rang für alle \mathbf{x} um \mathbf{x}_0 . Dies gilt darüber hinaus auch für die Differentiale der Abbildung $\text{col}(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}), \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}))$, also für die Matrizen $\text{col}(d\mathbf{H}_k(\mathbf{x}), d\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}))$, bei beliebiger Wahl der Matrizen $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{R}_{k^*}(\mathbf{x})$ mit $0 \leq k \leq k^* - 1$.
2. Die Matrizen $\mathbf{L}_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_k(\mathbf{x})$ besitzen für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k$ um \mathbf{x}_0 und $0 \leq k \leq k^* - 1$ einen konstanten Rang.
3. Die Matrix $\mathbf{L}_{\mathbf{G}}\mathbf{H}_{k^*}(\mathbf{x}_0)$ besitzt den Rang m .

Dann gilt auch $s_0 = m$, $s_1 = s_0 - r_1$ und für alle $k > 1$ ebenfalls $s_{k+1} = s_k - r_k$. Damit ist

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

und

$$\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k(\mathbf{x}) \\ \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Es müssen also keine Zeilen von $\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x})$ für das Bilden von $\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x})$ ausgeschlossen werden. \square

Die Aussagen 1 und 2 des Satzes 1 stellen Regularitätsforderungen für ein System dar und sind, wenn die Invertibilitätsbedingung 3 des Satzes 1 gilt, für jede beliebige Wahl der Matrizen aus dem Nulldynamikalgorithmus erfüllt. Hinsichtlich dieser Überlegungen wird der Punkt \mathbf{x}_0 *regulärer Punkt* des Nulldynamikalgorithmus genannt, wenn die Bedingungen 1 bis 3 des Satzes 1 erfüllt sind.

Die bei der Konstruktion in diesem Abschnitt eingeführten Matrizen $\Phi_k(\mathbf{x})$ können für die Definition lokaler Koordinaten um \mathbf{x}_0 hilfreich sein:

Satz 2 (Isidori 1995)

Gegeben sei ein regulärer Punkt \mathbf{x}_0 des Nulldynamikalgorithmus. Dann sind die Differentiale der Abbildung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x}), \dots, \Phi_{k^*-1}(\mathbf{x})) \quad (2.33)$$

linear unabhängig am Punkt \mathbf{x}_0 . □

Mit Hilfe dieser Überlegungen führt (Isidori 1995, S. 310) eine allgemeine Nulldynamiknormalform ein. Diese reduziert sich auf eine Übersichtlichere, sofern die Entkopplungsmatrix

$$D(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{d_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{d_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{d_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{d_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{d_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{d_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

nicht singulär am Punkt \mathbf{x}_0 ist.

Eine derartige Normalform für Eingrößen-ALS mit den Koordinaten \mathbf{z} , bzw. einer Aufteilung $\boldsymbol{\zeta} = [z_1, \dots, z_d]$ und $\boldsymbol{\eta} = [z_{d+1}, \dots, z_n]$ mit $d < n$ besitzt die Form (Schwarz 1991, Isidori 1995)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{d-1} &= z_d \\ \dot{z}_d &= b(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) + a(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})u \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\text{und} \\ y &= z_1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Wenn für eine derartige Normalform $z_1(t) = y(t) \stackrel{!}{=} 0 \forall t$ erfüllt sein soll, so muß auch bei den diskutierten analytischen Systemen jede der Ableitungen bis zur d -ten Stufe des Systemausgangs y identisch Null sein und somit muß gelten $\dot{z}_1(t) = \dots = \dot{z}_d(t) = 0$, also: $\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \forall t$. Anhand der Normalform ist aber auch zu sehen, daß gerade im Zustand \dot{z}_d eine Bedingung zur Berechnung eines das Ausgangssignal nullenden Stellsignals existiert:

$$\dot{z}_d = 0 \Rightarrow 0 = b(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) + a(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\eta}(t))u(t), \text{ mit } \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Aus der Normalform geht nun die Dynamik von $\boldsymbol{\eta}$ für die betrachtete Bedingung $\boldsymbol{\zeta}(t) = 0$ hervor: $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$. Stellt $\boldsymbol{\eta}(t)$ eine Lösung dieser Dynamik für den Anfangswert $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0$ dar, so bestimmt sich das Steuersignal zu

$$u(t) = -\frac{b(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\eta}(t))}{a(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\eta}(t))} = -\frac{b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}(t))}{a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}(t))}. \quad (2.37)$$

$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$ repräsentiert dann die Nulldynamik des Systems.

Wenn diese Normalform auch eine besondere Anschaulichkeit für den Komplex der Nulldynamik liefert, so ist die Konstruktion einer derartigen Form aus einem beliebig gegebenen ALS nicht gerade einfach, da dies für die notwendige Koordinatentransformation bedeutet, ein gekoppeltes System von d partiellen Differentialgleichungen zu lösen. Auch eine direkte Identifikation der Nulldynamik erscheint wenig hilfreich, da die Nulldynamik anschaulich gesprochen nun einmal gerade den Systemanteil im Zustandsraum repräsentiert, der keinen meßbaren Einfluß auf das Ausgangssignal besitzt.

Für das SISO-ALS in den Originalkoordinaten \mathbf{x} mit dem Differenzegrad d kann aber immer noch eine Aussage getroffen werden, da $y^{(i)}(t) = 0$ gerade $L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}(t)) = 0$ für alle $0 \leq i < d$ bedingt. Damit bestimmt sich die Nulldynamikteilmannigfaltigkeit zu

$$\mathcal{Z}^* = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}(t)) = \dots = L_{\mathbf{f}}^{d-1} h(\mathbf{x}(t)) = 0 \}. \quad (2.38)$$

Da die d Lie-Ableitungen $L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}(t))$ linear unabhängig sind, besitzt die Nulldynamikteilmannigfaltigkeit die Dimension $\dim(\mathcal{Z}^*) = \dim(\mathbb{R}^n) - d = n - d$.

Damit bestimmt sich das Ausgangssignal nullende Stellsignal zu

$$u^*(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^d h(\mathbf{x}(t))}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{d-1} h(\mathbf{x}(t))} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \dots \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \dots \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}(\mathbf{x})}. \quad (2.39)$$

Mit Hilfe des so berechneten, das Ausgangssignal nullenden Stellsignals ergibt sich das Nulldynamikvektorfeld des ursprünglichen Systems zu

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u^*(\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

einem zu jedem beliebigen Punkt aus \mathcal{Z}^* tangentialen Vektorfeld zu \mathcal{Z}^* . Somit ist dann die Nulldynamik durch das Tupel $(\mathcal{Z}^*, \mathbf{f}^*)$ bestimmt.

2.3 Relationentheoretische Begriffsherleitung

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist ein Regel-Relativ $(\mathfrak{B}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ gemäß (Arnold 1995). Ist ferner eine Ausgangsabbildung $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ in den Ausgangsraum \mathcal{Y} mit der Abbildungsvorschrift $(t_A, x_A) \mapsto h(t_A, x_A) = y_A$ gegeben, so entsteht daraus ein Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, [\Pi \cdot dt]_{\mathcal{Y}})$ gemäß (Schleuter und Lemmen 1996). Für ein derartiges Ausgangs-Regel-Relativ existiert eine Ununterscheidbarkeit gemäß

Definition 2.1 *Ununterscheidbarkeit zweier Punkte* (nach Schleuter und Lemmen 1996) Zwei Punkte $A = (t_A, x_A), B = (t_B, x_B) \in \mathfrak{P}$ mit $t_A = t_B = t_0$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ heißen *ununterscheidbar* (abkürzend: $Ab^\perp B$) genau dann, wenn $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ für alle Eingangsfunktionen die gleichen Regel-Relativ-Ausgänge erzeugt, also wenn gilt

$$h(t_0, x_A) = y_A \wedge h(t_0, x_B) = y_B \wedge \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{t_0, t_1}} (t_0, y_A) [\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt]_y = (t_0, y_B) [\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt]_y. \quad (2.41)$$

□

Die Menge aller Punkte B , die bezüglich eines vorgegebenen Punktes A ununterscheidbar sind, läßt sich wie folgt zusammenfassen (Schleuter und Lemmen 1996):

Definition 2.2 *Ununterscheidbarkeitsmenge eines Punktes A*

Die Menge aller Punkte, die bezüglich eines vorgegebenen Punktes $A \in \mathfrak{P}$ ununterscheidbar sind, heißt *Ununterscheidbarkeitsmenge bezüglich A* .

Sie ist definiert als

$$\mathfrak{B}_A^\perp := \{B \in \mathfrak{P} \mid Ab^\perp B\}. \quad (2.42)$$

□

Aus dieser Ununterscheidbarkeitsrelation und der Ununterscheidbarkeitsmenge läßt sich die Beobachtbarkeit bzw. Rekonstruierbarkeit eines Regel-Relatives entwickeln.

Diese beiden Definitionen begründen das Konzept für die relationentheoretische Untersuchung der Nulldynamik. Problematisch ist jedoch die Ununterscheidbarkeit in der Relation b^\perp hinsichtlich *jeder* Eingangsfunktion. Dies ist aber beim Konzept der Nulldynamik nicht zwingend notwendig. Stattdessen genügt *eine* Eingangsfunktion, üblicherweise in Form einer Zustandsrückführung nach Gl. (2.39). Ausgangspunkt zur Fassung der Nulldynamik muß also eine nicht für alle Eingangsfunktionen gegebene Ununterscheidbarkeit von Zuständen sein.

Definition 2.3 *y_0 -Kern eines Regel-Relatives*

Es sei ein Ausgang $y_0 \in \mathcal{Y}$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{N}(y_0) := \{A \in \mathfrak{P} \mid h(A) = y_0\} \quad (2.43)$$

y_0 -Kern des Ausgangs-Regel-Relatives.

□

Der y_0 -Kern des Ausgangs-Regel-Relatives beschreibt somit den Anteil der Zustandsmenge, der den Relativausgang mit $y = h(A) = y_0$ bestimmt (die Teilmenge der Zustände, für die das Bild von h gerade y_0 ergibt).

Es ist offensichtlich, daß auch die „Dynamik“ des Regel-Relatives auf dem Zustandsraum die Bedingung $h(A) = y_0$ erfüllen muß; es kommen alle Relationen in Betracht, die Abbildungen innerhalb des y_0 -Kerns $\mathcal{N}(y_0)$ sind:

Definition 2.4 y_0 -Kerndynamik eines Regel-Relatives

Es sei ein y_0 -Kern $\mathcal{N}(y_0)$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dann heißt

$$\mathfrak{N}_A(y_0) := \left\{ [\Pi \Omega dt] \mid A [\Pi \Omega dt] \subset \mathcal{N}(y_0) \right\} \quad (2.44)$$

y_0 -Kerndynamik am Punkt A des Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathcal{T} \times \mathcal{Y}, \mathcal{R}_y, [\Pi \cdot dt]_y)$. Die Relationenfamilie

$$\mathfrak{N}(y_0) := \bigcup_{A \in \mathfrak{P}} \mathfrak{N}_A(y_0) \quad (2.45)$$

heißt y_0 -Kerndynamik des Ausgangs-Regel-Relatives. □

Indem der y_0 -Kern und der Teil der Relationen auf der Zustandsmenge des Regel-Relatives, die eine Abbildung des y_0 -Kerns in sich darstellen, zusammengefaßt werden, gelangt man zu der y_0 -Dynamik eines Ausgangs-Regel-Relatives:

Definition 2.5 y_0 -Dynamik eines Regel-Relatives

Es sei ein y_0 -Kern $\mathcal{N}(y_0)$ und die zugehörige y_0 -Kerndynamik $\mathfrak{N}(y_0)$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dann heißt das Tupel

$$(\mathcal{N}(y_0), \mathfrak{N}(y_0)) \quad (2.46)$$

y_0 -Dynamik des Ausgangs-Regel-Relatives. □

Für $y_0 = 0$ ergibt sich dann die Nulldynamik im klassischen Sinne. Anhand der Definition bezüglich der y_0 -Dynamik sind folgende Eigenschaften hervorzuheben:

Bemerkung 2.3 Zur y_0 -Dynamik von Ausgangs-Regel-Relativen

1. $y_0 = 0$ ist nicht zwingend notwendig.
2. Eine explizite Zeitabhängigkeit (Zeitvarianz) der Ausgangsabbildung ist im Rahmen der Definition 2.3 mitberücksichtigt.
3. Es gilt die Beziehung

$$\mathfrak{N}_A(y_0) = \emptyset \quad \forall A \notin \mathcal{N}(y_0). \quad (2.47)$$

4. Unter Verwendung von Gl. (2.47) folgt direkt

$$\mathfrak{N}(y_0) = \bigcup_{A \in \mathcal{N}(y_0)} \mathfrak{N}_A(y_0). \quad (2.48)$$

Die auf $\mathcal{N}(y_0)$ restringierte Untersuchung anstelle einer Betrachtung von ganz \mathfrak{P} ist demnach zulässig und verfälscht das Ergebnis nicht. □

Die bereits angesprochene Verwandtschaft zur Beobachtbarkeit, genauer der Ununterscheidbarkeit kann auch formal umschrieben werden:

Satz 3

Es seien zwei beliebige ununterscheidbare Punkte der Punktmenge $A, B \in \mathfrak{P}$ und das Ausgangs-Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ gegeben: $A \mathfrak{b}^\perp B$. Dann gilt auch

$$A \in \mathcal{N}(y_0) \Rightarrow B \in \mathcal{N}(y_0). \quad (2.49)$$

Beweis

$$\begin{aligned} A \mathfrak{b}^\perp B &\stackrel{(2.42)}{\iff} B \in \mathfrak{B}_A^\perp \\ &\stackrel{(2.41)}{\iff} h(A) = h(B) \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{\implies} y_0 = h(B) \\ &\stackrel{(2.43)}{\iff} B \in \mathcal{N}(y_0) \end{aligned}$$

für alle $\Omega \in \mathcal{R}$ des Regel-Relatives. □

Aus der Kenntnis der Menge der ununterscheidbaren Punkte und eines Punktes des y_0 -Kerns ist die Berechnung weiterer Punkte des y_0 -Kerns möglich. Darüber hinaus ist aus dem Beweis zu Satz 3 auch gesichert, daß die Ausgangstrajektorie des Regel-Relatives zu keiner Zeit einen anderen Wert als $h(B) = h(A) = y_0$ für alle $\Omega \in \mathcal{R}$ des Regel-Relatives liefert. Somit gilt

Satz 4

Es sei $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ ein Ausgangs-Regel-Relativ und $A \in \mathfrak{P}$ ein beliebig aber fest vorgegebener Punkt der Punktmenge des y_0 -Kerns, $A \in \mathcal{N}(y_0)$. Dann gilt für die Ununterscheidbarkeitsmenge

$$\mathfrak{B}_A^\perp \subset \mathcal{N}(y_0) \quad (2.50)$$

sowie

$$\bigwedge_{\Omega} \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}_A^\perp} A[\Pi \Omega dt] \subset \mathcal{N}(y_0) \Leftrightarrow B[\Pi \Omega dt] \subset \mathcal{N}(y_0) \quad (2.51)$$

und

$$\bigwedge_{B \in \mathfrak{B}_A^\perp} \mathfrak{N}_A(y_0) = \mathfrak{N}_B(y_0). \quad (2.52)$$

□

2.4 Beispiele

2.4.1 Lineare Systeme

Für zeitinvariante lineare Systeme gemäß (Schwarz 1969)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.54)$$

ergibt sich zunächst

$$\mathcal{M}_0 = \text{kern}(\mathbf{C}) \quad (2.55)$$

und daran anschließend

$$\mathcal{M}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \in \text{bild}(\mathbf{B}) + \mathcal{M}_{k-1}\}. \quad (2.56)$$

Da die so bestimmten Mengen \mathcal{M}_k allesamt Teilmengen der Zustandsmannigfaltigkeit sind, stellen sie ebenfalls eine glatte Menge dar und so existiert per definitionem eine Ganzzahl k^* in der Art, daß gilt $\mathcal{M}_{k^*+1} = \mathcal{M}_{k^*}$. Diese Teilmannigfaltigkeit \mathcal{M}_{k^*} ist aufgrund ihrer Konstruktion auch zugleich die größte Teilmannigfaltigkeit von $\text{kern}(\mathbf{C})$, für die (in Operator Schreibweise dargestellt)

$$\mathbf{A}\mathcal{M}_{k^*} \subset \mathcal{M}_{k^*} + \text{bild}(\mathbf{B}) \quad (2.57)$$

erfüllt ist. Die Hypothesen aus Lemma 2.1 und 2.2 reduzieren sich dann auf die Ausdrücke

$$\dim(\text{bild}(\mathbf{B})) = m, \quad \mathcal{M}_{k^*} \cap \text{bild}(\mathbf{B}) = 0, \quad (2.58)$$

die gerade notwendige Bedingungen für die Invertierbarkeit einer quadratischen Übertragungsmatrix $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ darstellen.

Gleichung (2.58) bedingt nun auch die Existenz einer Zustandsrückführung $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ in der Art

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (2.59)$$

daß $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ gerade tangential zu \mathcal{M}_{k^*} verläuft. Dies hat nun zur Folge, daß $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}$ in \mathcal{M}_{k^*} verbleibt:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathcal{M}_{k^*} \subset \mathcal{M}_{k^*}. \quad (2.60)$$

Die Teilmenge \mathcal{M}_{k^*} ist erwartungsgemäß also gerade invariant bezüglich der linearen Abbildung $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})$ und die Restriktion auf $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})|_{\mathcal{M}_{k^*}}$ erzeugt ein eigenständiges lineares dynamisches System auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_{k^*} , dessen Dynamik per definitionem die Nulldynamik des ursprünglichen Systems ist.

Die durch $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})|_{\mathcal{M}_{k^*}}$ festgelegten Eigenwerte (bzw. invariante Polynome) stimmen mit den Nullstellen (bzw. dem Zählerpolynom) der Übertragungsfunktion (bzw. der Übertragungsmatrix) überein. Die Nulldynamik stellt also das nichtlineare Mehrgrößenanalogon zum linearen Eingrößenbegriff der Nullstellen des linearen Systems dar.

2.4.2 Beispiel 1

Zur Erläuterung der differentialgeometrischen Konstruktion dient das nachfolgende einfache Beispiel. Gegeben sei das ALS der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Zunächst zeigt eine Untersuchung des Systems (2.61), daß es keinen Differenzegrad gemäß (Isidori 1995) besitzt. Das liegt an der engen Bindung Isidoris an die Regularität der $m \times m$ Matrix (Schwarz 1991, Isidori 1995)

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{\mathbf{f}}^{d_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_{\mathbf{f}}^{d_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{\mathbf{f}}^{d_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_{\mathbf{f}}^{d_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_{\mathbf{f}}^{d_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_{\mathbf{f}}^{d_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

Entkopplungsmatrix (Schwarz 1991) genannt, am betrachteten Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Denn die Berechnung der Ausgangssignalableitungen führt zunächst auf den Vektordifferenzegrad von $\mathbf{d} = [1 \ 1]$, also im Gegensatz zu Isidoris Interpretation durchaus ein Ergebnis. Erst die Betrachtung der Entkopplungsmatrix liefert

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

eine für alle \mathbf{x} singuläre Entkopplungsmatrix, womit nach der Definition gemäß Isidori (1995, 220) kein Differenzegrad existiert. Wird dennoch mit dem Algorithmus fortgefahren, so ergibt sich zunächst aus $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2]^T$ die Menge

$$\mathcal{M}_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = 0 \}. \quad (2.64)$$

Desweiteren wird nun überprüft, ob das Differential $d\mathbf{h}$ der Abbildung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in der Umgebung \mathcal{U}_0 um den Punkt \mathbf{x}_0 von konstantem Rang ist. Dies ist hier der Fall mit

$$s_0 := \text{rang}(d\mathbf{h}) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \leq m = 2 \quad (2.65)$$

mit

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

und

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_0 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Zum Ende der Algorithmusverankerung ($k = 0$) wird nun die Matrix $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ aus Gl. (2.15) bestimmt. Hierfür gilt

$$r_0 = \text{rang}(\mathbf{L}_G \mathbf{H}_0(\mathbf{x})) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (2.68)$$

Die Matrix $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ besitzt demnach $s_0 - r_0 = 2 - 1 = 1$ Zeilen, die den Lösungsraum $\gamma \mathbf{L}_G \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ aufspannen, wie z.B.:

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) := [-x_3 \quad 1]. \quad (2.69)$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \mathbf{L}_f \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = [-x_3 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = [x_4]. \quad (2.70)$$

Im nächsten Schritt des Nulldynamikalgorithmus wird nun die Matrix

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x})) = \text{col} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, [x_4] \right) = \text{col}(x_1, x_2, x_4) \quad (2.71)$$

und der Rang

$$\text{rang}(\mathbf{H}_1(\mathbf{x})) = \text{rang}(\text{col}(\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x}))) = 3 \quad (2.72)$$

bestimmt. Damit ist $s_1 = 3 - s_0 = 3 - 2 = 1$ und

$$\mathcal{M}_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_4 = 0 \}. \quad (2.73)$$

Der Index r_1 berechnet sich durch

$$r_1 := \text{rang}(\mathbf{L}_G \mathbf{H}_1(\mathbf{x})) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_1. \quad (2.74)$$

Damit ergibt sich $r_k^* = r_1 = 2 = m$ und das Ende des Algorithmus ist erreicht. Somit ist $\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_1$ und die eindeutige Abbildung $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, die den Systemzustand auf \mathcal{Z}^* hält, muß an jedem Zustand $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$ die Gleichung

$$\mathbf{L}_f \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_G \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.75)$$

erfüllen. Wenn sich der Anfangszustand \mathbf{x}_0 bereits in der Nulldynamikmannigfaltigkeit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_1$ befindet, ist dies der Fall für

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.76)$$

Dementsprechend lautet die Nulldynamik – genau genommen $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})|_{\mathcal{Z}^*}$ – des Systems

$$\dot{x}_3 = \lambda x_3. \quad (2.77)$$

2.4.3 Beispiel 2

Gegeben sei nun ein ALS der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ 0 & 1 \\ x_5 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Eine Untersuchung des Systems hinsichtlich des Differenzengrads zeigt, daß das System (2.78) ebenfalls keinen solchen gemäß (Isidori 1995) besitzt. Das liegt wiederum an der engen Bindung Isidoris an die Regularität der Entkopplungsmatrix \mathbf{D} am betrachteten Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Der Vektordifferenzegrad von $\mathbf{d} = [1 \ 1]$ ist nämlich auch hier leicht bestimmbar. Die Entkopplungsmatrix lautet

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

eine für den Punkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ singuläre Entkopplungsmatrix. Wird mit dem Algorithmus fortgefahren, so ergibt sich zunächst aus $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2]^T$ die Menge

$$\mathcal{M}_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 = 0 \}. \quad (2.80)$$

Desweiteren wird nun überprüft, ob das Differential $d\mathbf{h}$ der Abbildung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in der Umgebung \mathcal{U}_0 um den Punkt \mathbf{x}_0 von konstantem Rang ist. Dies ist hier der Fall mit

$$s_0 := \text{rang } d\mathbf{h} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \leq m = 2 \quad (2.81)$$

mit

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} \ \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

und

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_0 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Zum Ende der Algorithmusverankerung ($k = 0$) wird nun die Matrix $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ aus Gl. (2.15) bestimmt. Hierfür gilt

$$r_0 = \text{rang } \mathbf{L}_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix} = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0. \quad (2.84)$$

Die Matrix $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ besitzt demnach $s_0 - r_0 = 2 - 1 = 1$ Zeilen, welche den Lösungsraum $\gamma \mathbf{L}_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ aufspannen, wie z.B.:

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) := [-x_3 \ 1]. \quad (2.85)$$

Die in Gl. (2.15) gestellte Forderung ist hier ebenfalls erfüllt

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_G\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [-x_3 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix} = [0 \quad x_2] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0. \quad (2.86)$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x})L_f\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = [-x_3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = [x_4 - x_2x_3]. \quad (2.87)$$

Im nächsten Schritt des Nulldynamikalgorithmus wird nun die Matrix

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x})) = \text{col}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, [x_4 - x_2x_3]\right) = \text{col}(x_1, x_2, x_4) \quad (2.88)$$

und der Rang

$$\text{rang}(\mathbf{H}_1(\mathbf{x})) = \text{rang}(\text{col}(\mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \Phi_0(\mathbf{x}))) = 3 \quad (2.89)$$

bestimmt. Damit ist $s_1 = 3 - s_0 = 3 - 2 = 1$ und

$$\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 = x_4 = 0\}. \quad (2.90)$$

Der Index r_1 ergibt sich durch

$$r_1 := \text{rang}(L_G\mathbf{H}_1(\mathbf{x})) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ x_5 - x_3^2 & -x_2x_3 \end{bmatrix}\right) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_1. \quad (2.91)$$

Eine Lösung für $\mathbf{R}_1(\mathbf{x})L_G\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist z.B.:

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_3 & 1 & 0 \\ x_3^2 - x_5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

woraus sich $\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) = [x_3^2 - x_5 \quad 0]$ sowie $\mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) = [1]$ und folglich

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x})L_f\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{x})L_f\mathbf{S}_0\Phi_0(\mathbf{x}) \quad (2.93)$$

$$= -x_2x_5 + x_2x_3^2 - x_3x_4 - x_1x_2x_4 + x_5 \quad (2.94)$$

bestimmen lassen. Die Abbildung $\text{col}(\mathbf{H}_1(\mathbf{x}), \Phi_1(\mathbf{x}))$ besitzt den Rang 4. Somit kann

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) = \text{col}(x_1, x_2, x_4 - x_2x_3, -x_2x_5 + x_2x_3^2 - x_3x_4 - x_1x_2x_4 + x_5) \quad (2.95)$$

gewählt und \mathcal{M}_2 durch

$$\mathcal{M}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0\} \quad (2.96)$$

bestimmt werden. Die Matrix $L_G\mathbf{H}_2(\mathbf{x})$ besitzt den Rang 2 am Punkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, und so kann der Algorithmus abgebrochen werden. Damit ist $\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_2$ und das Stellgesetz \mathbf{u}^* , welches den Systemzustand auf Bahnen innerhalb von \mathcal{Z}^* hält, ist eine Lösung der Gleichung

$$(L_f\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) + L_G\mathbf{H}_2(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*} = \mathbf{0}. \quad (2.97)$$

Eine Lösung von Gl. (2.97) und damit das gesuchte ausgangssignalnullende Stellgesetz lautet

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \text{col}(0, -x_3). \quad (2.98)$$

Demnach ist das Nulldynamikvektorfeld bestimmt durch

$$\dot{x}_3 = -x_3. \quad (2.99)$$

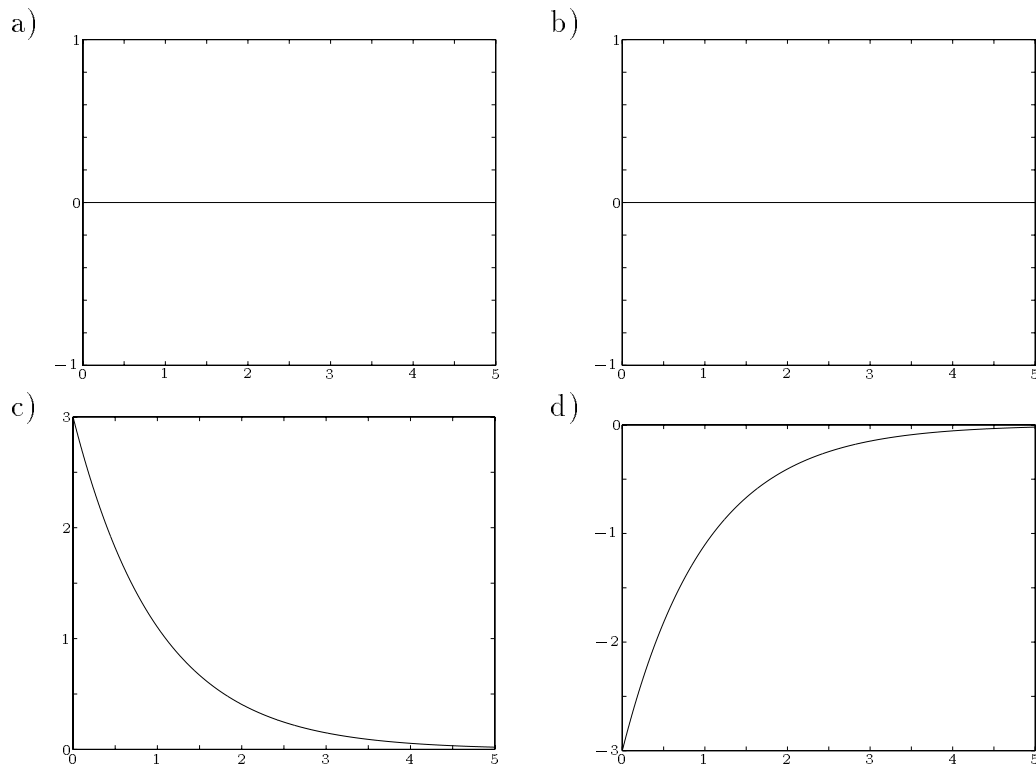


Bild 2.1: Nulldynamik des Beispiels mit: a) Ausgang $y_1(t)$, b) Ausgang $y_2(t)$, c) Zustand $x_3(t)$, d) Steuersignal $u_2(t)$.

Das so gewonnene Ergebnis kann auch durch Simulationen z. B. unter MATLAB[®] verifiziert werden, wie dies in Bild 2.1 gezeigt ist: Die Ausgangssignale verbleiben identisch Null, sofern die Startwerte der Simulation aus der Nulldynamikteilmannigfaltigkeit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{Z}^*$ gewählt worden sind. Dabei ist die Dynamik in x_3 in Form des autonomen PT₁-Systems gemäß Gl. (2.99) und deren Kompensation durch u_2 gut zu erkennen.

2.5 Anwendung auf einen hydraulischen Translationsantrieb

Das Modell des hydraulischen Translationsantriebs (Bild 2.2) kann durch eine Prinzipskizze gemäß Bild 2.3 und für den Bereich $u > 0$ der Steuerung durch ein ALS der Form

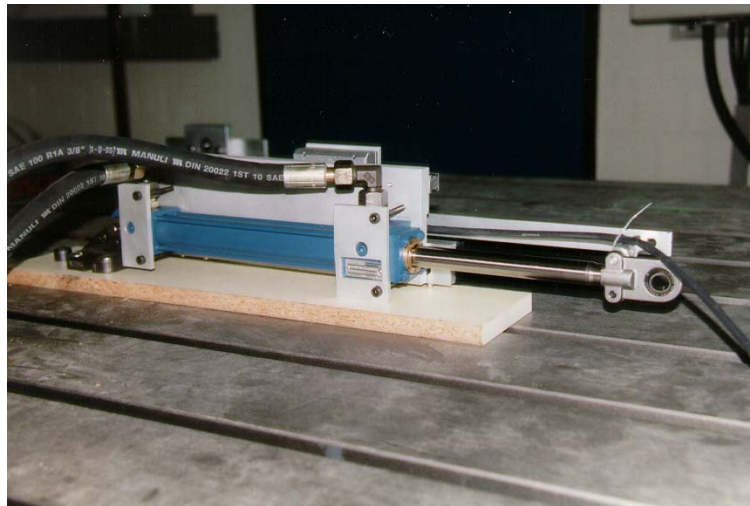


Bild 2.2: Hydraulischer Translationsantrieb

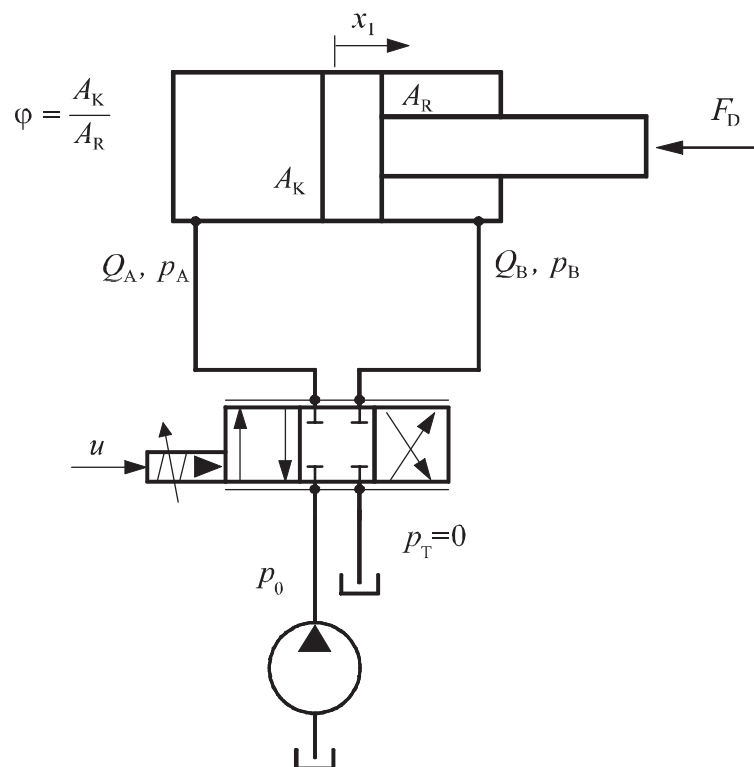


Bild 2.3: Prinzipskizze des Translationsantriebs

```

> restart;
> with(linalg);
> read('/user/MapleV3/nsas/source/nsas');
> n:=4;m:=1;p:=1; x := linalg[vector](n,[]); f := linalg[vector](n,[
      x[2],
      ((x[3]-x[4]/phi)*A_K - F_R(x[2]) - F_S)/m_G,
      E_Oil(x[3])/V_A(x[1])*(-A_K*x[2]),
      E_Oil(x[4])/V_B(x[1])*(A_K*phi*x[2])
]);
g := linalg[matrix](n,m,[
      0,
      0,
      E_Oil(x[3])/V_A(x[1])*B_V*sqrt(p_0-x[3]),
      -E_Oil(x[4])/V_B(x[1])*B_V*sqrt(x[4])
]);
h := linalg[matrix](p,1,[
      x[1]
]);
d:=relative_degree(x,f,g,h);

n := 4
m := 1
p := 1
x := array(1..4, [ ])

f := x_2 * [ (x_3 - x_4 / phi) * A_K - F_R(x_2) - F_S, -E_Oil(x_3) * A_K * x_2, E_Oil(x_4) * A_K * x_2 ]
          [ m_G, V_A(x_1), V_B(x_1) * phi ]

g := [ 0,
        0,
        E_Oil(x_3) * B_V * sqrt(p_0 - x_3),
        -E_Oil(x_4) * B_V * sqrt(x_4) ]
      [ V_A(x_1), V_B(x_1) ]

h := [ x_1 ]
d := [ 3 ]

```

Maple Memory: 1279K Maple CPU Time: 0.8 sec Interface Memory: 95.1K

Bild 2.4: Bestimmung des Differenzgrades eines hydraulischen Translationsantriebs mit Hilfe des Programmpaketes NSAS unter MAPLE[®]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi}\right) A_K - F_R(x_2) - F_S}{m_G} \\ -\frac{E_{\text{Oil}}(x_3)}{V_A(x_1)} A_K x_2 \\ \frac{E_{\text{Oil}}(x_4)}{V_B(x_1) \varphi} A_K x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_{\text{Oil}}(x_3)}{V_A(x_1)} B_V \sqrt{(p_0 - x_3)} \\ -\frac{E_{\text{Oil}}(x_4)}{V_B(x_1)} B_V \sqrt{x_4} \end{bmatrix} u \quad (2.100)$$

$$y = x_1 \quad (2.101)$$

beschrieben werden, sofern das Servo-Ventil durch ein P-Glied approximiert wird (Bernzen und Riege 1996). Es besitzt einen Differenzgrad von $d = 3$, der leicht mit Hilfe des auf MAPLE[®] basierenden symbolverarbeitenden Analysetools NSAS (Lemmen u. a. 1995) be-

```

File Edit View Options Help
Output Interrupt Pause
> zaehler:=nsaslie(x,f,nsaslie(x,f,h));
zaehler :=
[(-%1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) A_K x3 + %1 phi V_A(x1) V_B(x1) A_K x4 + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_R(x2) + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_S
- A_K^2 E_Oil(x3) x2 m_G phi^2 V_B(x1) - A_K^2 E_Oil(x4) x2 m_G V_A(x1)) / (m_G^2 phi^2 V_A(x1) V_B(x1))]
%1 := diff(F_R(x2), x2)
> nenner:=nsaslie(x,g,nsaslie(x,f,h));
nenner :=
[ A_K B_V (E_Oil(x3) sqrt(p_0 - x3) phi V_B(x1) + E_Oil(x4) sqrt(x4) V_A(x1)) ]
[ m_G V_A(x1) phi V_B(x1) ]
> u[nullung] := -evalm(zaehler/nenner);
u[nullung] := -
[ (-%1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) A_K x3 + %1 phi V_A(x1) V_B(x1) A_K x4 + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_R(x2) + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_S
- A_K^2 E_Oil(x3) x2 m_G phi^2 V_B(x1) - A_K^2 E_Oil(x4) x2 m_G V_A(x1)) / (m_G phi A_K B_V
(E_Oil(x3) sqrt(p_0 - x3) phi V_B(x1) + E_Oil(x4) sqrt(x4) V_A(x1))) ]
%1 := diff(F_R(x2), x2)
> fnull := evalm(domatrix(f)+domatrix(g)&*u[nullung]);
fnull :=
[ x2 ]
[ ( (x3 - x4 / phi) A_K - F_R(x2) - F_S ) / m_G ]
[ - E_Oil(x3) A_K x2 / V_A(x1) - E_Oil(x3) sqrt(p_0 - x3) (-%1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) A_K x3 + %1 phi V_A(x1) V_B(x1) A_K x4
+ %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_R(x2) + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_S - A_K^2 E_Oil(x3) x2 m_G phi^2 V_B(x1)
- A_K^2 E_Oil(x4) x2 m_G V_A(x1)) / (V_A(x1) m_G phi A_K (E_Oil(x3) sqrt(p_0 - x3) phi V_B(x1) + E_Oil(x4) sqrt(x4) V_A(x1))) ]
[ E_Oil(x4) A_K x2 / V_B(x1) phi + E_Oil(x4) sqrt(x4) (-%1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) A_K x3 + %1 phi V_A(x1) V_B(x1) A_K x4
+ %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_R(x2) + %1 phi^2 V_A(x1) V_B(x1) F_S - A_K^2 E_Oil(x3) x2 m_G phi^2 V_B(x1)
- A_K^2 E_Oil(x4) x2 m_G V_A(x1)) / (V_B(x1) m_G phi A_K (E_Oil(x3) sqrt(p_0 - x3) phi V_B(x1) + E_Oil(x4) sqrt(x4) V_A(x1))) ]
Maple Memory: 1279K Maple CPU Time: 0.8 sec Interface Memory: 95.1K

```

Bild 2.5: Bestimmung der ausgangsnullenden Rückführung mit Hilfe des Programmpaketes NSAS unter MAPLE[®]

stimmt werden kann (Bild 2.4). Auch die Berechnung der ausgangsnullenden Rückführung für SISO-ALS (Schwarz 1991) gemäß Gl. (2.39) kann unter Zuhilfenahme des symbolverarbeitenden Programms MAPLE[®] und der Funktion `nsaslie` des Softwarepaketes NSAS zur Bestimmung der Lie-Ableitungen erfolgen (Bild 2.5). Hierzu müssen im Zähler die d -fache Lie-Ableitung der Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ entlang des Driftterms $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und im Nenner die Lie-Ableitung entlang des Steuerterms $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ der $(d - 1)$ -fachen Lie-Ableitung

der Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ entlang des Driftterms $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
u^* := & \left(\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_3 - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_4 \right. \\
& - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_R(x_2) - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_S \\
& \left. + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3) x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4) x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\
& \left(m_G \varphi A_K B_V (E_{\text{Oil}}(x_3) \sqrt{p_0 - x_3} V_B(x_1) \varphi + E_{\text{Oil}}(x_4) \sqrt{x_4} V_A(x_1)) \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

In diesem Rückführgesetz zur Ausgangsnulldynamik ist die Ableitung $\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2}$ enthalten. Diese ist die partielle Ableitung der Reibkraft nach der Geschwindigkeit, also einer aufgrund des Haftreibungsanteils an der Stelle $x_2 = 0$ unstetigen und nicht differenzierbaren Funktion.

Mit Hilfe dieses so entworfenen Rückführgesetzes nach Gl. (2.102) wird eine Ausgangsnulldynamik erreicht. Das zugehörige Nulldynamikvektorfeld $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ bestimmt sich also zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) & := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}) \\
& = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m_G} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\ f_3^*(\mathbf{x}) \\ f_4^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{2.103}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
f_3^*(\mathbf{x}) = & - \frac{E_{\text{Oil}}(x_3) A_K x_2}{V_A(x_1)} + E_{\text{Oil}}(x_3) \sqrt{p_0 - x_3} \left(\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_3 \right. \\
& - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_4 - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_R(x_2) \\
& - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_S + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3) x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) \\
& \left. + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4) x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\
& \left(V_A(x_1) m_G \varphi A_K (E_{\text{Oil}}(x_3) \sqrt{p_0 - x_3} \varphi V_B(x_1) + E_{\text{Oil}}(x_4) \sqrt{x_4} V_A(x_1)) \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

und

$$\begin{aligned}
f_4^*(\mathbf{x}) = & \frac{E_{\text{Oil}}(x_4) A_K x_2}{V_B(x_1) \varphi} - E_{\text{Oil}}(x_4) \sqrt{x_4} \left(\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_3 \right. \\
& - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_4 - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_R(x_2) \\
& - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_S + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3) x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) \\
& \left. + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4) x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\
& \left(V_B(x_1) m_G \varphi A_K (E_{\text{Oil}}(x_3) \sqrt{p_0 - x_3} \varphi V_B(x_1) + E_{\text{Oil}}(x_4) \sqrt{x_4} V_A(x_1)) \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Für die Berechnung des y_0 -Kerns muß nun der Nullkern für $h(\mathbf{x}) = 0$ bestimmt werden. Auch dies kann mit Hilfe des Maple-Befehls `linalg[kernel](matrix([[0, x, 0, 0]]))`; erfolgen. Der Rückgabewert dieser Funktion stellt eine Basis für den Nullraum für \mathbf{h} , nämlich $\{[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T\}$ dar. Demnach ist

$$\mathcal{N}(y_0 = 0) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.106)$$

Der y_0 -Kern stellt in diesem Beispiel also den 3-dimensionalen Schnitt des 4-dimensionalen Zustandsraumes an der Stelle $x_2 = 0$ dar. Dieser Raum ist auch gleichzeitig der größtmögliche, da für alle $x_2 \neq 0$ auch die Beziehung $y \neq y_0 = 0$ gilt.

Für den Bereich $u < 0$ ändert sich das Vektorfeld für die Steuerung zu

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_{\text{Oil}}(x_3)}{V_A(x_1)} B_V \sqrt{x_3} \\ -\frac{E_{\text{Oil}}(x_4)}{V_B(x_1)} B_V \sqrt{(p_0 - x_4)} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Auch mit diesem veränderten Modell ergibt sich ein Differenzegrad von $d = 3$. Die ausgangsnulldende Rückführung lautet dann

$$\begin{aligned} u^* := & \left(\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_3 - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1) V_B(x_1) A_K x_4 \right. \\ & - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_R(x_2) - \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1) V_B(x_1) F_S \\ & \left. + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3) x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) + A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4) x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\ & \left(E_{\text{Oil}}(x_3) \sqrt{x_3} \varphi V_B(x_1) + E_{\text{Oil}}(x_4) \sqrt{p_0 - x_4} V_A(x_1) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.108)$$

und das Nulldynamikvektorfeld entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) & := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}) \\ & = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m_G} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\ f_3^*(\mathbf{x}) \\ f_4^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

mit

$$\begin{aligned}
f_3^*(\mathbf{x}) = & -\frac{E_{\text{Oil}}(x_3)A_K x_2}{V_A(x_1)} - E_{\text{Oil}}(x_3)\sqrt{x_3} \left(-\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)A_K x_3 \right. \\
& + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1)V_B(x_1)A_K x_4 + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)F_R(x_2) \\
& + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)F_S - A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3)x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) \\
& \left. - A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4)x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\
& (V_A(x_1)m_G \varphi A_K (E_{\text{Oil}}(x_3)\sqrt{x_3} \varphi V_B(x_1) + E_{\text{Oil}}(x_4)\sqrt{p_0 - x_4} V_A(x_1)))^{-1}
\end{aligned} \quad (2.110)$$

und

$$\begin{aligned}
f_4^*(\mathbf{x}) = & \frac{E_{\text{Oil}}(x_4)A_K x_2}{V_B(x_1)\varphi} + E_{\text{Oil}}(x_4)\sqrt{p_0 - x_4} \left(-\frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)A_K x_3 \right. \\
& + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi V_A(x_1)V_B(x_1)A_K x_4 + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)F_R(x_2) \\
& + \frac{\partial F_R(x_2)}{\partial x_2} \varphi^2 V_A(x_1)V_B(x_1)F_S - A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_3)x_2 m_G \varphi^2 V_B(x_1) \\
& \left. - A_K^2 E_{\text{Oil}}(x_4)x_2 m_G V_A(x_1) \right) \\
& (V_B(x_1)m_G \varphi A_K (E_{\text{Oil}}(x_3)\sqrt{x_3} \varphi V_B(x_1) + E_{\text{Oil}}(x_4)\sqrt{p_0 - x_4} V_A(x_1)))^{-1}.
\end{aligned} \quad (2.111)$$

Der y_0 -Kern ist bezüglich des Bereichs $u > 0$ aufgrund der gleichen Ausgangsabbildung h unverändert und bestimmt sich gemäß Gl. (2.106).

Die hier durch die Unterstützung von MAPLE[®] mögliche Berechnung des Nulldynamikvektorfeldes kann auch z.B. für das komplexere Differentialzylindermodell 6. Ordnung nach (Bernzen und Riege 1996) durchgeführt werden. Das dabei ermittelte Vektorfeld füllt aber bereits mehrere Seiten und wurde deshalb hier nicht weiter untersucht.

3 Nulldynamik beliebiger Ausgangsgrößen

Wie anhand der in Abschnitt 2.3 gegebenen Definitionen der Begriffe y_0 -Kern, y_0 -Kerndynamik und y_0 -Dynamik zu sehen ist, ist die Beschränkung auf einen konstanten Wert $y_0(t) = 0$ für die Begriffsbildung im Grunde nicht zwingend notwendig. Deshalb wird in diesem Abschnitt die Erweiterung des in Abschnitt 2 vorgestellten Konzeptes auf eine $y_0(t)$ -Dynamik mit nicht notwendig konstanter Ausgangsreferenzfunktion $y_0(t)$ vorgestellt.

Definition 3.1 $y_0(t)$ -Kern eines Regel-Relatives

Es seien eine Teilmenge der Zeitmenge $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ und eine Abbildung des Ausgangs $y_0 : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{Y}$ und der damit restringierten Punktmenge $\mathfrak{P}' := \mathcal{T}' \times \mathcal{X}$ mit der Abbildungsvorschrift $t \mapsto (t, y) = (t, y_0(t))$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ beliebig, aber fest vorgegeben. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) := \{A \in \mathfrak{P}' \mid h(A) = y_0(t_A)\} \quad (3.1)$$

$y_0(t)$ -Kern des Ausgangs-Regel-Relatives auf der Zeitmenge (auf dem Intervall) \mathcal{T}' . Entspricht diese Zeitmenge derjenigen des Ausgangs-Regel-Relatives, gilt also $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$, so kann abkürzend $\mathcal{N}(y_0(\cdot))$ geschrieben werden. \square

Wie auch im vorherigen Abschnitt 2.3 müssen die Zustände $x \in \mathcal{X}$ bzw. die Zustandspunkte $(t, x) \in \mathfrak{P}' = \mathcal{T}' \times \mathcal{X}$, die durch die auf \mathfrak{P}' erklärten Relationen veränderlich sind, die Bedingung $h(t, x) = y_0(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}'$ erfüllen. Dabei wird von auf die Zeitmenge \mathcal{T}' restringierten Relationen Gebrauch gemacht:

$$A[\Pi\Omega dt]_{\mathcal{T}'} := \left\{ B \in \mathfrak{P}' \mid A[\Pi\Omega dt]B \right\}. \quad (3.2)$$

Es werden analog zum vorherigen Abschnitt alle Relationen berücksichtigt, die Abbildungen innerhalb des $y_0(t)$ -Kerns $\mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'})$ sind:

Definition 3.2 $y_0(t)$ -Kerndynamik eines Regel-Relatives

Es sei ein $y_0(t)$ -Kern $\mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'})$ eines Ausgangs-Regel-Relatives $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ auf der Menge $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ bzw. \mathfrak{P}' gegeben. Dann heißt

$$\mathfrak{N}_A(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) := \left\{ [\Pi\Omega dt] \mid A[\Pi\Omega dt]|_{\mathcal{T}'} \subset \mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) \right\} \quad (3.3)$$

$y_0(t)$ -Kerndynamik am Punkt A des Ausgangs-Regel-Relatives auf der Zeitmenge (dem Intervall) \mathcal{T}' . Gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$, kann auch $y_0(t)$ -Kerndynamik $\mathfrak{N}_A(y_0(\cdot))$ am Punkt A des Ausgangs-Regel-Relatives geschrieben werden.

Die Relationenfamilie

$$\mathfrak{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) := \bigcup_{A \in \mathfrak{P}' = \mathcal{T}' \times \mathcal{X}} \mathfrak{N}_A(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) \quad (3.4)$$

heißt $y_0(t)$ -Kerndynamik auf der Menge (dem Intervall) \mathcal{T}' des Ausgangs-Regel-Relatives;

$$\mathfrak{N}(y_0(\cdot)) := \bigcup_{A \in \mathfrak{P}} \mathfrak{N}_A(y_0(\cdot)) \quad (3.5)$$

heißt $y_0(t)$ -Kerndynamik des Ausgangs-Regel-Relatives. \square

Indem nun der $y_0(t)$ -Kern (die Teilmenge der Zustände bzw. -punkte, für die das Bild von h gerade $y_0(t)$ ergibt) und der Teil der Relationen auf der Zustandsmenge des Regel-Relatives, die eine Abbildung des $y_0(t)$ -Kerns in sich darstellen, zusammengefaßt werden, gelangt man zu der $y_0(t)$ -Dynamik eines Ausgangs-Regel-Relatives:

Definition 3.3 $y_0(t)$ -Dynamik eines Regel-Relatives

Es sei ein $y_0(t)$ -Kern $\mathcal{N}(y_0(\cdot))$ und die zugehörige $y_0(t)$ -Kerndynamik $\mathfrak{N}(y_0(\cdot))$ eines Ausgangs-Regel-Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt, \mathcal{Y}, h)$ gegeben. Dann heißt das Tupel

$$(\mathcal{N}(y_0(\cdot)), \mathfrak{N}(y_0(\cdot))) \quad (3.6)$$

$y_0(t)$ -Dynamik des Ausgangs-Regel-Relatives. \square

Für $y_0(\cdot) \equiv 0$ ergibt sich dann wiederum die Nulldynamik im klassischen Sinne. Aufgrund der Art der hier gewählten Erweiterung auf beliebige Ausgangsgrößen erhalten bzw. übertragen sich die unter Bemerkung 2.3 festgestellten Eigenschaften direkt:

Bemerkung 3.1 Zur $y_0(t)$ -Dynamik von Ausgangs-Regel-Relativen

1. $y_0(t) = 0$ ist nicht zwingend notwendig.
2. Eine explizite Zeitabhängigkeit (Zeitvarianz) der Ausgangsabbildung ist im Rahmen der Definition 3.1 mitberücksichtigt.
3. Es gilt die Beziehung

$$\mathfrak{N}_A(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) = \emptyset \quad \forall A \notin \mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) \quad (3.7)$$

4. Unter Verwendung von Gl. (3.7) folgt direkt

$$\mathfrak{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) = \bigcup_{A \in \mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'})} \mathfrak{N}_A(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'}) \quad (3.8)$$

Die auf $\mathcal{N}(y_0(\cdot)|_{\mathcal{T}'})$ restringierte Untersuchung anstelle einer Betrachtung von ganz \mathfrak{P} bzw. \mathfrak{P}' ist demnach zulässig und verfälscht das Ergebnis nicht. \square

4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wurde der aus dem Bereich der linearen und nichtlinearen Theorie bekannte Komplex der Nulldynamik auf Ausgangs-Regel-Relative und damit auf relationentheoretische Verfahren übertragen. Dies geschah jedoch nicht nur unter dem Aspekt der reinen Übertragung, sondern auch unter dem einer Erweiterung der Nulldynamikeigenschaften. Es wurde gezeigt, daß die Beschränkung auf einen konstanten Ausgangswert $y(t) = 0, \forall t$ nicht zwingend erforderlich ist und auch bei einer vorgegebenen, zeitlich veränderlichen Referenzfunktion $y(t)$ seine Bedeutung behält und relationentheoretisch gut erfaßt werden kann.

Zu diesem Zweck wurde eine Übersicht der bekannten Algorithmen zur Berechnung der Nulldynamik gegeben und eine Interpretation der dabei verwendeten Größen herausgearbeitet. Mehrere Beispiele veranschaulichten diese Bedeutung.

Für den Fall einer zeitlich konstanten Ausgangsfunktion $y(t) = y_0$ wurden die engen Beziehungen zwischen der Ununterscheidbarkeit von Zuständen und der Nulldynamik für Ausgangs-Regel-Relative herausgearbeitet. Ist bereits nur ein Punkt des y_0 -Kerns (ein zum Begriff des Nullkerns der Differentialgeometrie analoger relationentheoretischer Ausdruck) bekannt, gehören *alle* zu diesem Punkt ununterscheidbaren ebenfalls zum y_0 -Kern dazu. Für diese ununterscheidbaren Punkte konnte jeweils *jede* Stellfunktion zur y_0 -Kerndynamik übertragen werden, die für nur *einen* ununterscheidbaren Punkt nachgewiesen wurde. Die Berechnung der Nulldynamik konnte also unter Verwendung der ununterscheidbaren Punkte des Ausgangs-Regel-Relativs erheblich reduziert werden.

Zur Erläuterung der Nulldynamik wurde ein hydraulischer Translationsantrieb untersucht: Die Nulldynamikvektorfelder wurden bestimmt und auch der Nullkern näher beleuchtet.

Weiterführende Arbeiten in diesem Bereich werden sich zum einen auf eine genauere Untersuchung der (variablen) $y_0(t)$ -Dynamik für Ausgangs-Regel-Relative beziehen, die in diesem Bericht nur vorgestellt, aber nicht weiter untersucht wurde. Ferner sind weiterhin noch Analysemethoden für das hier vorgestellte relationentheoretische Konzept zu bestimmen.

5 Literatur

- Arnold, H.-J.** 1994. *Regel-Relative*. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik SM-DU-246. Universität Duisburg.
- Arnold, H.-J.** 1995. Der Systembegriff der Kontrolltheorie und Regel-Relative. *Results in Mathematics* 28. 195–208.
- Bernzen, W.** und **B. Riege.** 1996. *Nichtlineare Modellbildung und Regelung eines hydraulischen Differentialzylinders*. Forschungsbericht 12/96. MSRT. Universität Duisburg.
- De Luca, A.** und **A. Isidori.** 1987. Feedback linearization of invertible systems. *Preprints 2. Duisburger Kolloquium Automation und Robotik*. Duisburg. 1–21.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Lemmen, M., T. Wey** und **M. Jelali.** 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 20/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.
- Schleuter, M.** und **M. Lemmen.** 1996. *Ausgangs-Regel-Relative*. Forschungsbericht 2/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1969. *Einführung in die moderne Systemtheorie. Theorie geregelter Systeme*. 4. Braunschweig: Vieweg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.