

# Zur Berechnung der Nulldynamik mit algebraischen Methoden

Markus Senger und Britta Riege

Forschungsbericht Nr. 14/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Der Nulldynamik von Systemen kommt in der Regelungstechnik eine große Bedeutung zu, da die Stabilität des geregelten Systems bei einigen Regelungsgesetzen von den Eigenschaften der Nulldynamik abhängt. Aus der Darstellung des Nulldynamikalgorithmus gemäß Isidori (1995) ist eine Ähnlichkeit zu dem bekannten Strukturalgorithmus von Singh (1981) erkennbar. Wie der Strukturalgorithmus in Forschungsbericht 6/97, wird in diesem Bericht der Nulldynamikalgorithmus differentialalgebraisch formuliert. Damit wird die Berechnung der Nulldynamik durch algebraische Methoden ermöglicht, was anhand einiger praktischer Beispiele belegt wird.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitende Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Überlegungen zur Nulldynamik</b>	<b>3</b>
<b>3 Der Nulldynamikalgorithmus</b>	<b>6</b>
3.1 Differentialgeometrische Formulierung . . . . .	6
3.2 Differentialalgebraische Formulierung . . . . .	11
3.3 Differentialalgebraische Berechnung . . . . .	14
<b>4 Beispiele zur Berechnung der Nulldynamik</b>	<b>17</b>
4.1 Elektrohydraulischer Antrieb . . . . .	18
4.2 Zweiachsiger Roboter mit elastischen Gelenken . . . . .	20
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>24</b>
<b>6 Literatur</b>	<b>25</b>

# Nomenklatur

## Skalare Größen:

$a, b$	: Elemente eines kommutativen Ringes
$b_i, b_{i,j}$	: Modellparameter
$d$	: Differenzengrad eines SISO-Systems
$f$	: Polynom, glatte Funktion
$g$	: Koeffizient
$i, j, k$	: Laufindizes
$m$	: Anzahl der Systemeingänge
$n$	: Systemordnung
$p$	: Anzahl der Systemausgänge
$t$	: Zeit
$\lambda_i$	: Eigenwert
$\rho^*$	: Differentieller Rang

## Matrizen, Vektoren, Mengen, Mannigfaltigkeiten:

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	: System-, Eingangs-, Ausgangsmatrix
$B_i$	: Basis eines von Polynomen aufgespannten Ideals
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	: Vektorfelder
$\mathcal{E}$	: Vektorraum
$\mathbf{f}$	: Vektorfeld
$GB(I)$	: Reduzierte Gröbner-Basis des Ideals $I$
$\mathbf{h}$	: Vektorfeld
$I$	: Ideal
$k$	: Grundkörper
$k[x_1, \dots, x_n]$	: Körper der meromorphen Funktionen in $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten aus $k$
$\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_i^c$	: Teilmannigfaltigkeiten des Zustandsraumes
$\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i$	: Matrizen
$\mathfrak{R}$	: Kommutativer Ring
$\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$	: Polynomring in den Variablen $x_1, \dots, x_n$
$\mathcal{U}_i$	: Eingangsraummannigfaltigkeiten
$\mathbf{u}$	: Vektor der Eingangsgrößen
$\mathbf{u}^*$	: Ausgangssignalnullender Eingangsgrößenvektor
$\mathbf{x}$	: Vektor der Zustandsvariablen
$\mathbf{y}$	: Vektor der Ausgangsgrößen
$\mathcal{Z}^*$	: Nulldynamikmannigfaltigkeit
$\mathbf{z}$	: Vektorfeld
$\boldsymbol{\gamma}$	: Matrix aus dem Lösungsraum eines Gleichungssystems

$\Phi_i$  : Vektorfeld

### Operatoren:

d	: Totales Differential
$L_a \mathbf{b}(\mathbf{x})$	: Lie-Ableitung des Vektorfeldes $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ entlang des Vektorfeldes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , $L_a \mathbf{b}(\mathbf{x}) := [L_a b_1(\mathbf{x}) \ L_a b_2(\mathbf{x}) \ \dots]^T$
$[\cdot]^T$	: Transponierte der Matrix $[\cdot]$
$(\cdot)^{(k)}$	: $k$ -te zeitliche Ableitung von $(\cdot)$
$\partial$	: Differentiationsoperator

### Logische Verknüpfungen und Quantifikatoren:

$\wedge$	: Konjunktion „und“
$\forall$	: Alloperator, Generalisator

### Zahlenmengen und Mengenoperatoren:

$\min\{\cdot\}$	: Minimum der in $\{\cdot\}$ enthaltenen Zahlen
$\mathbb{R}$	: Menge der reellen Zahlen
$\text{rang } [\cdot]$	: Rang der Matrix $[\cdot]$
$\text{span}\{\cdot\}$	: Von den in $\{\cdot\}$ enthaltenen Vektoren aufgespannter Vektorraum
$\in$	: Element aus

### Sonstige Formelzeichen:

$\mathcal{U}$	: Umgebung um einen Punkt $\mathbf{x}_0$
$x_1 < x_2$	: Monomordnung, bei der $x_1$ vor $x_2$ angeordnet wird.
$a \prec b$	: Totalordnung

# 1 Einleitende Übersicht

Der Nulldynamik kommt bei der Behandlung technischer Systeme eine große Bedeutung zu. Dennoch wird der Nulldynamik wegen ihrer Latenz verhältnismäßig wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Verborgen ist sie deshalb, weil sie per Definition am Ausgang des Systems nicht beobachtbar ist. Der Begriff der Nulldynamik entstammt der Theorie linearer Systeme und ist eng mit der Dynamik der inversen Übertragungsfunktion, also der Dynamik der Übertragungsnulstellen verbunden. Übertragungsnulstellen für lineare Systeme sind vielfach untersucht und auch unterschiedlich definiert worden (Schrader und Sain 1989). So orientiert sich beispielsweise eine frühe Arbeit von Rosenbrock (1970) an der Steuer- und Beobachtbarkeitsuntersuchung für Zustandsraumdarstellungen von Systemen und führt auf den Begriff der entkoppelnden Nullstellen. Eingangsentkoppelnde Nullstellen sind dabei durch den Zeilen-Rangdefekt der Steuerbarkeitsmatrix  $[\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \cdots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  nach Kalman u. a. (1969) und ausgangsentkoppelnde Nullstellen entsprechend durch den Zeilen-Rangdefekt der Beobachtbarkeitsmatrix  $[\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T : (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T : \cdots : (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T]$  gegeben.

In diesem Bericht werden nichtlineare analytische Systeme in Zustandsraumdarstellung auf ihre Nulldynamik hin untersucht. Eine grundlegende Frage ist, ob man für spezielle Systemmodelle vorab eine Aussage über die Existenz einer Nulldynamik treffen kann. Das Interesse an der gegebenenfalls vorhandenen Nulldynamik liegt darin begründet, daß die Funktionsfähigkeit vieler Regelungsgesetze von den Eigenschaften der Nulldynamik abhängt. Die Ursache dieser Abhängigkeit ist, daß insbesondere den Syntheseverfahren für nichtlineare Regelungsgesetze häufig eine Systeminversion zugrunde liegt. Greift man zunächst auf die von den linearen Systemen abgeleitete Vorstellung zurück, daß die Nulldynamik durch die Dynamik des inversen Systems bestimmt ist, so ist unmittelbar plausibel, daß eine stabile Nulldynamik gewiß Voraussetzung für das Funktionieren derjenigen Regelungsgesetze ist, die auf einer Systeminversion beruhen. Daß die Untersuchung der Nulldynamik durchaus praxisrelevant ist, zeigen die in diesem Bericht behandelten Beispiele. Zudem ist die Untersuchung der Nulldynamik besonders für mittels Eigenschwingformen modellierte elastische Roboter von Belang, denn die Modelle dieser Roboter weisen stets eine Nulldynamik auf, sofern die Endeffektorposition als Systemausgang gewählt wird (Canudas de Wit u. a. 1996).

In diesem Bericht wird ein Berechnungsverfahren vorgestellt, das die Bestimmung des Nulldynamikvektorfeldes mit algebraischen Werkzeugen für analytische nichtlineare Mehrgrößensysteme ermöglicht. Der vorliegende Bericht gliedert sich inhaltlich wie folgt:

Im Anschluß an diese Einführung folgen im zweiten Abschnitt einige allgemeine Be trachtungen zur Nulldynamik. Wegen der engen Verwandtschaft des in diesem Bericht vorgestellten Algorithmus zur Berechnung der Nulldynamik mit dem differentialgeometri-

schen Nulldynamikalgorithmus nach Isidori (1995), wird letzterer in Abschnitt drei kurz dargestellt, bevor ein differentialalgebraischer Berechnungsweg angegeben wird. Es wird gezeigt, daß der differentialalgebraische Algorithmus automatisiert berechenbar ist. In dem vierten Abschnitt finden sich einige Beispiele zur Berechnung der Nulldynamik. Der Bericht endet mit einer kurzen Zusammenfassung der Ergebnisse in Abschnitt fünf.

## 2 Überlegungen zur Nulldynamik

Wie eingangs erwähnt, entstammt der Begriff der Nulldynamik der Theorie linearer Systeme. Für lineare Systeme ergibt sich eine Äquivalenz verschiedener Aussagen, die nicht ohne weiteres auf nichtlineare Systeme übertragbar ist. So entspricht die Nulldynamik für lineare Systeme gerade derjenigen Dynamik, die durch die Nullstellen der Übertragungsfunktion charakterisiert ist. Daß diese Aussage nicht auf nichtlineare Systeme übertragbar ist, leuchtet unmittelbar ein.

Für diesen Bericht wird vorausgesetzt, daß analytische Mehrgrößensysteme behandelt werden, die durch eine Zustandsraumdarstellung der folgenden Form gegeben sind:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n , \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) ; \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p . \quad (2.2)$$

Zunächst soll der Begriff der Nulldynamik definiert werden. Gemäß Schwarz (1991) heißt der maximale Systemteil, für den mittels Zustandsrückführung Unbeobachtbarkeit erzielt werden kann, *Nulldynamik*. Für lineare Eingrößensysteme hat die Nulldynamik die Dimension  $n - d$ , wobei  $n$  der Systemordnung und  $d$  dem Differenzengrad des Systems entspricht. Isidori (1995) charakterisiert die Nulldynamik durch die Suche nach einem Satz von Anfangsbedingungen und Funktionen für die Eingangssignale derart, daß die Ausgänge des Systems identisch null werden. Die unter diesen Bedingungen gegebene Teilmannigfaltigkeit des Zustandsraumes heißt *ausgangssignalnullende* Mannigfaltigkeit oder *Nulldynamikmannigfaltigkeit*. Das *Nulldynamikvektorfeld* des Systems ergibt sich aus den Systemgleichungen unter der Bedingung, daß die Eingangssignale den gefundenen Beziehungen genügen und  $\mathbf{x}$  der Nulldynamikmannigfaltigkeit entstammt. Bei Byrnes und Isidori (1989) ist die Nulldynamik wie folgt beschrieben:

### Definition 2.1 Nulldynamik

Existiert eine Teilmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  des Zustandsraumes mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* ,$
2. in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$  existiert eine eindeutige Stellgröße  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$  derart, daß  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$  tangential zu  $\mathcal{Z}^*$  ist,
3.  $\mathcal{Z}^*$  ist maximal bezüglich der Eigenschaften 1. und 2. ,

und ist  $\mathbf{u}^*$  ein Vektorfeld bestehend aus glatten Funktionen in  $\mathbf{x}$ , dann wird  $\mathcal{Z}^*$  *Nulldynamikmannigfaltigkeit* genannt. Weiterhin heißt  $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*}$  *Nulldynamikvektorfeld* des Systems. Die Nulldynamik ist also durch das Tripel  $\{\mathcal{Z}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*\}$  bestehend aus Nulldynamikmannigfaltigkeit, ausgangssignalnullender Zustandsrückführung und Nulldynamikvektorfeld gegeben.  $\square$

Unter einer glatten Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  wird dabei eine Funktion verstanden, deren partielle Ableitungen  $\partial f / \partial x_i, i = 1, \dots, n$ , beliebiger Ordnung existieren und stetig sind. Der verwendete Begriff der Tangentialität ist durch die Eigenschaften der Linearität sowie die Leibniz'sche Regel erklärt (Isidori 1995). Mit der Nulldynamik ist der Begriff des Phasenminimum-Systems eng verbunden. Ein System heißt minimalphasig in einem Punkt  $\mathbf{x}_0$ , wenn die Nulldynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*}$  an diesem Punkt asymptotisch stabil ist. Entsprechend heißt ein System global minimalphasig, wenn  $\mathbf{x}_0$  einen global asymptotisch stabilen Punkt der Nulldynamik darstellt. Diese Definition erweist sich als konsistent zu linearen Systemen, die genau dann Phasenminimumsysteme heißen, wenn der Zähler der zugehörigen Übertragungsfunktion ein Hurwitz-Polynom (Hurwitz 1895) darstellt, d. h. wenn keine Nullstellen mit positiven Realteilen existieren.

Die Untersuchung der vorstehend definierten Nulldynamik spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse von Systemen, denn die Möglichkeiten der Synthese von Regelungsgesetzen sind maßgeblich von den Eigenschaften der Nulldynamik, insbesondere deren Stabilität, bestimmt. Aber auch für den Fall einer stabilen Nulldynamik eines physikalischen Systemmodells ist das Verhalten der internen, nicht beobachtbaren Dynamik von Bedeutung, da beispielsweise Aussagen über Energiebedarf oder Verschleiß eines realen Systems hiervon abgeleitet werden können. Weiterhin kann es sowohl bei der Nutzung eines Systemmodells zur Simulation des Systemverhaltens als auch bei dessen Verwendung als Grundlage für einen Beobachter- oder Reglerentwurf je nach Berechnungsmethode zu numerischen Instabilitäten kommen, die Folgen für das System haben können.

Aufgrund der Bedeutung der Nulldynamik bieten sich Überlegungen zu der Frage an, unter welchen Umständen eine Nulldynamik existiert. Bei einer physikalischen Modellbildung lässt sich nur schwer eine allgemeingültige Aussage treffen. Dies liegt an der Freiheit bei der Wahl der zu berücksichtigenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die zu sehr unterschiedlichen Modellen führen kann. Da die Nulldynamik aber stets eine modellbezogene und nicht eine systemimmanente Größe ist, lässt sich für ein gegebenes System vorab keine Aussage über die Nulldynamik treffen.

Für eine zweite Kategorie von Modellen, die der mathematischen Modelle, findet man leichter eine Antwort auf die Fragen nach Existenz und Ordnung der Nulldynamik. Da diese Modelle in der Regel durch Parameteridentifikation, Kombination verschiedener Modelle oder mit auf der Realisierungstheorie basierenden Verfahren ermittelt werden, besitzen sie in den meisten Fällen eine vorgegebene Struktur der Systemgleichungen bzw. eine vorgegebene Belegung der systembeschreibenden Matrizen. Aufgrund dieser Systemstruktur können dann die Fragen nach Existenz und ggf. Ordnung der Nulldynamik beantwortet werden. Für die Parameteridentifikation wählt man häufig kanonische Zustandsmodelle, welche gemäß dem Wesen der Kanonizität die Eigenschaften *Konsistenz*, *Äquivalenz* und *charakteristische Merkmale* aufweisen (Schwarz 1991). Wichtige kanonische Modellformen nichtlinearer Systeme sind die bei Zeitz (1990) angegebenen Normalformen *Steuerbarkeitsnormalform*, *Regelungsnormalform*, *Beobachtbarkeitsnormalform* und *Beobachternormalform*. Geht man von der für technische Systeme sinnvollen Annahme aus, daß kein

direkter Durchgriff zwischen Stell- und Ausgangsgröße besteht, dann haben diese kanonischen Modellstrukturen in ihrer allgemeinen Form einen Vektordifferenzengrad, dessen Elemente sämtlich identisch eins sind. Damit ergibt sich beispielsweise für die Nulldynamik eines SISO-Systems die Ordnung  $n - 1$ . Genauso wie es sinnvoll ist, den Durchgriff zwischen Stell- und Ausgangsgröße zu vernachlässigen, können für spezielle Systeme verschiedene Parameter des Steuerterms wie auch der Meßgleichungen zu null gesetzt werden. Welche Koeffizienten hierfür in Frage kommen, kann durch eine Strukturidentifikation (Reuter 1995) oder spezielle Parameteridentifikationsalgorithmen (Jelali 1997) herausgefunden werden. Entsprechend verändert sich dann gegebenenfalls die Ordnung der Nulldynamik.

Wichtiger jedoch als die Ordnung der Nulldynamik ist der Nichtlinearitätsgrad, d.h. die höchste Summe der Exponenten eines Monoms der Nulldynamik-Gleichungen. Ist die Nulldynamik nichtlinear, so kann ihre Stabilität im allgemeinen nur lokal durch Linearisierung nachgewiesen werden.

### 3 Der Nulldynamikalgorithmus

Die Berechnung der Nulldynamik ist auf verschiedene Arten möglich. Der Algorithmus von Isidori (1995) stellt vermutlich den bekanntesten Weg zur Berechnung der Nulldynamik dar. Dieser Algorithmus bedient sich der Differentialgeometrie, mit deren Methoden auch der Nachweis der definierenden Eigenschaften erbracht ist. Im folgenden ist daher der Ablauf des differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus dargestellt, bevor ein alternativer, differentialalgebraisch formulierter Berechnungsweg aufgezeigt wird.

#### 3.1 Differentialgeometrische Formulierung

Die differentialgeometrische Formulierung des Nulldynamikalgorithmus ist der Darstellung von Isidori (1995) entnommen. Für den dort angegebenen Algorithmus wird von einem analytischen System mit linear eingehender Steuerung (ALS) ausgegangen, welches durch diese Gleichungen gegeben ist:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n , \quad (3.1)$$

$$= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x}(t))u_i(t) , \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) ; \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p . \quad (3.3)$$

Isidori (1995) geht vereinfachend davon aus, daß die Anzahl der Ein- und Ausgänge übereinstimmt. Es sei aber darauf hingewiesen, daß dies für die Berechnung der Nulldynamik nicht notwendig ist; es ergibt sich lediglich ein besonders einfaches Abbruchkriterium für den nachfolgend dargestellten Nulldynamikalgorithmus. Die Berechnung der Nulldynamik geschieht wie folgt:

##### Iterationsschritt 1:

1.1:  $s_0$  sei der Rang des Differentials  $d\mathbf{c}(\mathbf{x})$ .

1.2: Es wird eine Matrix  $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{s_0 \times p}$  derart gewählt, daß  $\mathbf{c}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_0 \mathbf{c}(\mathbf{x})$  genau  $s_0$  linear unabhängige Zeilen aufweist.

1.3: Es sei  $\mathcal{U}_0$  eine Umgebung um  $\mathbf{x}_0$ . Dann gilt:  $\mathcal{M}_0^c = \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{U}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 | \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .

1.4: Bestimmung der ersten zeitlichen Ableitung der Ausgänge:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3.4)$$

$$= \mathbf{L}_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + [\mathbf{L}_{b_1} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \dots \mathbf{L}_{b_n} \mathbf{c}_0(\mathbf{x})] \mathbf{u} . \quad (3.5)$$

Darin stellen  $\mathbf{b}_i$  Spalten aus  $\mathbf{B}$  dar (vgl. Gln. (3.1),(3.2)).

1.5: Weiterhin ist  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c$  gesucht, so daß das Gleichungssystem

$$\mathbf{L}_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

lösbar in  $\mathbf{u}$  ist.  $\mathbf{R}_0$  sei eine Matrix, die den Vektorraum der Lösungen  $\gamma$  für die Gleichung

$$\gamma \mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

aufspannt. Die Dimension dieses Lösungsraumes sei  $s_0 - r_0$  und konstant, d.h.  $r_0$  entspricht dem Rang der Matrix  $\mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c}$ . Sofern  $r_0 < m$  ist, sind weitere Schritte des Algorithmus notwendig, für die in den nächsten Unterpunkten einige Vereinbarungen getroffen werden.

1.6: Damit Gl. (3.6) erfüllt wird, muß  $\mathbf{R}_0 \mathbf{L}_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gelten. Für diesen Ausdruck wird abkürzend die Größe  $\Phi_0(\mathbf{x}) := \mathbf{R}_0 \mathbf{L}_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x})$  definiert.

1.7: Der Rang der Jacobi-Matrix von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \\ \Phi_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

wird mit  $s_0 + s_1$  bezeichnet. Da  $\Phi_0(\mathbf{x})$  genau  $s_0 - r_0$  Zeilen besitzt, gilt damit:  $s_1 \leq s_0 - r_0$ .

Gilt  $r_0 := \text{rang } \mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) < m$ , fährt man mit einem weiteren Iterationsschritt fort. Andernfalls endet der Algorithmus an der Stelle 1.5 und die Nullodynamikmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  ergibt sich dann zu  $\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_{k-1}^c$ . Der damit zur Lösung der Gleichung  $\mathbf{L}_a \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$  benötigte Stellgrößenvektor wird mit  $\mathbf{u}^*$  bezeichnet und die Nullodynamik errechnet sich durch  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*}$ .

Iterationsschritt  $k$ ,  $k \geq 2$ :

k.1: Es sei  $\mathcal{U}_{k-1}$  eine Umgebung um  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0^c$ . Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{k-1}^c = \mathcal{M}_{k-1} \cap \mathcal{U}_{k-1} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{k-1} | \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \wedge \Phi_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} . \quad (3.9)$$

k.2: Es habe  $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) \\ \Phi_{k-2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$  den Rang  $\sum_{i=0}^{k-1} s_i$ . Dann wird eine Matrix  $\mathbf{S}_{k-1}$  derart gewählt, daß  $\mathbf{S}_{k-1} \Phi_{k-2}(\mathbf{x})$  genau  $s_{k-1}$  unabhängige Zeilen besitzt und damit das Vektorfeld

$$\mathbf{c}_{k-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}_{k-1} \Phi_{k-2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$\sum_{i=0}^{k-1} s_i$  unabhängige Zeilen aufweist.

k.3: Es wird die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})$  bestimmt und zu null gesetzt:

$$\mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.11)$$

$r_{k-1}$  entspricht dem Rang der Matrix  $\mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c}$ .

k.4: Es sei  $\mathbf{R}_{k-1}$  eine Matrix, die den Vektorraum der Lösungen  $\gamma$  für die Gleichung

$$\gamma \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

aufspannt. Die Dimension dieses Lösungsraumes sei  $-r_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} s_i$ . Die Matrix  $\mathbf{R}_{k-1}$  lässt sich dabei mit folgender Struktur wählen:

$$\mathbf{R}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{k-2} & \mathbf{Q}_{k-2} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.13)$$

k.5: Damit Gl. (3.11) erfüllt wird, muß zudem  $\mathbf{R}_{k-1} \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gelten. Es ergibt sich somit als Vorbereitung für den nächsten Iterationsschritt:  $\Phi_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{k-2} \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{k-2} \mathbf{L}_a \mathbf{S}_{k-1} \Phi_{k-2}(\mathbf{x})$ .

Der Algorithmus endet, wenn in dem  $k$ -ten Schritt die Abbruchbedingung  $r_{k-1} = m$  erreicht ist. Die Nulldynamikmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  ergibt sich dann zu  $\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_{k-1}^c$  und der damit zur Lösung der Gleichung  $\mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$  benötigte Stellgrößenvektor wird mit  $\mathbf{u}^*$  bezeichnet. Die Nulldynamik errechnet sich durch  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*}$ .

Ein ausführliches Beispiel, das auch bei Isidori (1995) angegeben ist, soll den Ablauf verdeutlichen:

### Beispiel 3.1

Es sei ein System gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ 0 & 1 \\ x_5 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y} = [x_1 \ x_2]^T \quad . \quad (3.15)$$

Iterationsschritt 1:

1.1:  $\mathbf{dc}(\mathbf{x})$  besitzt den Rang  $s_0 = 2$ .

1.2: Da  $s_0 = 2$  ist, fällt die Wahl für die Matrix  $\mathbf{S}_0$  auf die Einheitsmatrix der Dimension zwei, so daß gilt:  $\mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2]^T$ .

1.3:  $\mathcal{M}_0^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = 0\}$

$$1.4: \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

1.5: Es ergibt sich  $r_0 := \text{rang}[\mathbf{L}_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x})]|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c} = 1 < m$ , womit das Abbruchkriterium noch nicht erfüllt ist. Damit kann  $\mathbf{R}_0$  gewählt werden zu  $\mathbf{R}_0 = [-x_3 \ 1]$ .

1.6: Für  $\Phi_0$  folgt:  $\Phi_0 = [-x_3 \ 1][x_2 \ x_4]^T = x_4 - x_2 x_3$ .

1.7: Der Rang der Jacobi-Matrix von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \\ \Phi_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich zu drei und damit gilt:  $s_1 = 1$ .

Iterationsschritt 2:

2.1:  $\mathcal{M}_1^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = x_4 = 0\}$

2.2: Da  $s_1 = 1$  ist, entartet  $\mathbf{S}_1$  zur Einheitsmatrix, wodurch für  $\mathbf{c}_1(\mathbf{x})$  folgt:

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \end{bmatrix} .$$

2.3:

$$\mathbf{L}_a \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ x_5 - x_3^2 & -x_2 x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Weiterhin errechnet sich  $r_1$  zu:  $r_1 = 1 < m$ . Das Abbruchkriterium ist also noch nicht erfüllt.

2.4:  $\mathbf{R}_1$  kann nun gewählt werden zu:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -x_3 & 1 & 0 \\ x_3^2 - x_5 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

2.5:  $\Phi_1 = [x_3^2 - x_5 \ 0][x_2 \ x_4]^T + 1 \cdot (x_5 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4) = x_2 x_3^2 - x_2 x_5 + x_5 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4$

Iterationsschritt 3:

3.1:  $\mathcal{M}_2^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$

3.2: Die Jacobi-Matrix von  $[\mathbf{c}_1 \ \Phi_1]^T$  hat den Rang vier und daraus folgt:  $s_2 = 1$ . Damit entartet  $\mathbf{S}_2$  wiederum zur Einheitsmatrix, wodurch sich  $\mathbf{c}_2(\mathbf{x})$  ergibt zu:

$$\mathbf{c}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_2 x_3^2 - x_2 x_5 + x_5 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 \end{bmatrix}.$$

3.3: In dieser Ableitungsstufe gilt:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 \\ c_{2,4} \end{bmatrix}$$

mit  $c_{2,4} = -x_4 x_5 - x_2 x_3 + x_3^2 x_4 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_4^2 - x_3 x_5 - x_2^2 x_4 - x_1 (x_4^2 + x_2 x_5) + x_3$ ,

$$\mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \vdots \\ x_3 & & & & \vdots \\ x_5 - x_3^2 & & & & \vdots \\ -x_2 x_4 + (-x_5 + x_3^2 - x_1 x_4) x_3 + (-x_3 - x_1 x_2) x_5 - x_2 + 1 & & & & \vdots \\ 0 & & & & \\ x_2 & & & & \\ -x_2 x_3 & & & & \\ (-x_5 + x_3^2 - x_1 x_4) x_2 + 2x_2 x_3 - x_4 + (-x_3 - x_1 x_2) x_2 - x_2 + 1 & & & & \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_2^c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_2^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ -x_3^2 & 0 \\ x_3^3 + 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit besitzt die Matrix  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_2^c}$  den Rang zwei, und die Abbruchbedingung ist erreicht. Aus der Bedingung  $\mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_2^c} + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_2^c} \mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  folgt:  $\mathbf{u}^* = [0 \ -x_3]^T$ . Für die Nulldynamikmannigfaltigkeit gilt:  $\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_2^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$ . Das Nulldynamikvektorfeld des Systems ergibt sich aus Gl. (3.14) nach Einsetzen von  $\mathbf{u}^*$  und der Bedingung  $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$  zu  $\dot{x}_3 = -x_3$ .  $\square$

Das Beispiel 3.1 zeigt einige Probleme auf. Es sind in jedem Iterationsschritt zwei Matrizen zu bestimmen, die im Fall von  $\mathbf{S}_i$  Basispolynome aus einem Vektorfeld auswählen und im Fall von  $\mathbf{R}_i$  den Lösungsraum eines im allgemeinen mehrdimensionalen Gleichungssystems aufspannen. In Beispiel 3.1 ist das Auffinden der jeweiligen Matrizen einfach, da die Dimensionen  $s_1, s_2, r_0$  und  $r_1$  sämtlich gleich eins sind. Im allgemeinen Fall, wenn Systeme höherer Ordnung vorliegen, ist dies nicht mehr ohne weiteres möglich und aufwendige Berechnungsmethoden müssen hinzugezogen werden. Dies ist der wesentliche Grund, warum im folgenden ein differentialalgebraisch formulierter Nulldynamikalgorithmus vorgeschlagen wird, der ohne diese Probleme zum Ziel führt.

## 3.2 Differentialalgebraische Formulierung

Betrachtet man den differentialgeometrisch formulierten Nulldynamikalgorithmus, so besteht dieser im wesentlichen aus folgenden Abläufen: In jeder Ableitungsstufe wird geprüft, ob  $m$  unabhängige Gleichungen in den Eingangsgrößen gebildet werden können. Ist dieses nicht der Fall, so wird ein Vektorfeld gebildet, das die Polynome der vorangegangenen Ableitungsstufe enthält sowie zusätzlich die durch  $\mathbf{u}$  nicht nullbaren Polynome der aktuellen Ableitungsstufe (siehe Schritt k.2). Was also gesucht wird, ist die Ableitungsstufe, bei der erstmalig die maximale Anzahl unabhängiger, von den Eingangssignalen abhängiger Ausgangssignalableitungen auftritt, die dann durch ein geeignetes  $\mathbf{u}$  genullt werden können. Für alle niedrigeren Ableitungsstufen werden die Randbedingungen zur Ausgangssignalnullung den jeweiligen Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_i$  zugeschlagen. Ist die maximale Anzahl der in den Eingängen unabhängigen Ausgangssignalableitungen erreicht, so werden die Stellgrößen  $\mathbf{u}^*$  bestimmt, die zur Ausgangssignalnullung führen. Diese Beschreibung der Abläufe legt eine differentialalgebraische Formulierung eines Nulldynamikalgorithmus nahe.

Die Erweiterung des zu untersuchenden Vektorfeldes lässt sich vermeiden, wenn man den Begriff der differentialalgebraischen Abhängigkeit verwendet. Hierzu wird, wie auch schon in früheren Berichten, eine Totalordnung (engl. ranking) verwendet, die die Einführung der  $u$ -Linksunabhängigkeit einer Ausgangssignalableitung und damit die Bestimmung von in den Eingängen differentialalgebraisch unabhängigen Ausgangssignalableitungen ermöglicht. Die Totalordnung ist wie folgt definiert:

### Definition 3.1 Totalordnung

Es werden die Ableitungen  $\{y_i^{(k)}\}$  der Ausgänge bzw. deren Differentiale  $\{dy_i^{(k)}\}$  in folgender Weise angeordnet:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p, \dots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)}, \dots\} \quad , \quad (3.16)$$

$$\{dy_1, dy_2, \dots, dy_p, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2, \dots, d\dot{y}_p, \dots, dy_1^{(k)}, dy_2^{(k)}, \dots, dy_p^{(k)}, \dots\} \quad , \quad (3.17)$$

so daß  $y_{l_1}^{(k_1)}$  dann und nur dann links von  $y_{l_2}^{(k_2)}$  steht, wenn  $k_1 < k_2$  oder  $k_1 = k_2 \wedge l_1 < l_2$ . Hierfür wird die Schreibweise  $y_{l_1}^{(k_1)} \prec y_{l_2}^{(k_2)}$  verwendet.  $\square$

Definiert man wie Di Benedetto u. a. (1989) einen (nicht-differentialalgebraischen) Körper  $\mathcal{K}$  der rationalen Funktionen in  $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}$  mit meromorphen Koeffizienten in  $\mathbf{x}$ , so kann die folgende Definition angegeben werden:

**Definition 3.2** *u-Linksabhängigkeit* (Cao und Zheng 1992)

$dy_l^{(k)}$  wird als *u-linksabhängig* bezeichnet, wenn

$$dy_l^{(k)} \in \mathcal{E}_x + \text{span}_{\mathcal{K}}\{dy_{\alpha}^{(\beta)}|y_{\alpha}^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\} \quad \text{gilt, mit} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{E}_x = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx_i|1 \leq i \leq n\} . \quad (3.19)$$

Andernfalls wird  $dy_l^{(k)}$  als *u-linksunabhängiger* Vektor in (3.17) bezeichnet. Ein Element  $y_l^{(k)}$  aus (3.16) wird *u-linksabhängig* (bzw. *u-linksunabhängig*) genannt, wenn  $dy_l^{(k)}$  *u-linksabhängig* (bzw. *u-linksunabhängig*) ist.  $\square$

Mit diesen einfachen Hilfsmitteln kann der differentialalgebraische Nullodynamikalgorithmus angegeben werden:

#### Iterationsschritt 1:

1.1: Setze  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen  $\mathcal{U}_1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ . Tritt in diesem Iterationsschritt keine Eingangsgröße auf, was bei technischen Systemen häufig der Fall sein wird, so ist  $\mathcal{U}_1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\}$ . Weiterhin gilt:  $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{c}(\mathbf{x})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_1} = \mathbf{0})\}$ .

1.2: Bestimmung der ersten zeitlichen Ableitung der Systemausgänge:

$$\dot{\mathbf{y}} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left( a_i + \sum_{j=1}^m b_{i,j} u_j \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x})}{\partial u_i} \dot{u}_i \right) \Big|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_1} .$$

Darin stellt  $b_{i,j}$  das Element der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Matrix  $\mathbf{B}$  dar.

1.3: Berechnung der Anzahl  $\rho_1$  der *u-linksunabhängigen* Ausgangssignalableitungen in  $\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1}$ . Weiterhin muß eine Basis  $B_1$  der in  $\mathbf{u}$  unabhängigen Ausgangssignalableitungen aus  $\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1}$  berechnet werden. Stimmt  $\rho_1$  mit dem differentialalgebraischen Rang  $\rho^*$  (Fliess 1986b) des Systems überein, so ist eine Abbruchbedingung erreicht und der ausgangssignalnullende Stellgrößenvektor ergibt sich zu  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m | (\mathbf{u} \in \mathcal{U}_1 \wedge B_1 = \mathbf{0})$ <sup>1</sup>. Die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}^*$  zur Ausgangssignalnullung ergeben sich zu:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1, B_1|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \mathbf{0})$ .

Ist die Abbruchbedingung  $\rho_1 = \rho^*$  noch nicht erreicht, so fährt man mit einem weiteren Iterationsschritt fort:

---

<sup>1</sup>  $B_1$  stellt eine geordnete Liste dar.  $B_1 = \mathbf{0}$  bedeutet also, daß alle Listenelemente aus  $B_1$  identisch null sind.

Iterationsschritt  $k$ ,  $k \geq 2$ :

$$k.1: \mathcal{U}_k = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m | (\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1} \wedge B_{k-1} = \mathbf{0})\}, \\ \mathcal{M}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \wedge B_{k-1}|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_k} = \mathbf{0})\}$$

Die Bedingungen für  $\mathbf{u}$  verändern sich nur dann, wenn in  $B_{k-1}$  eine Eingangsgröße auftritt, die in vorherigen Iterationsschritten noch nicht vorhanden war.

k.2: Bestimmung einer weiteren zeitlichen Ableitung der Systemausgänge:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{y}^{(k-1)}}{\partial x_i} \left( a_i + \sum_{j=1}^m b_{i,j} u_j \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{y}^{(k-1)}}{\partial u_i^{(j)}} u_i^{(j+1)} \right) \right) \Big|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_k}.$$

k.3: Berechnung der Anzahl  $\rho_k$  der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen in  $\mathbf{y}^{(k)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k}$ . Weiterhin muß eine Basis  $B_k$  der in  $\mathbf{u}$  unabhängigen Ausgangssignalableitungen in  $\mathbf{y}^{(k)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k}$  berechnet werden. Stimmt  $\sum_{i=1}^k \rho_i$  mit dem differentialalgebraischen Rang  $\rho^*$  des Systems überein oder ist die  $n$ -te Ableitungsstufe erreicht, so endet der Algorithmus und der ausgangssignalnullende Stellgrößenvektor  $\mathbf{u}^*$  berechnet sich aus den  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen:  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m | (\mathbf{u} \in \mathcal{U}_k \wedge B_k = \mathbf{0})$ . Die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}^*$  zur Ausgangssignalnullung ergeben sich zu:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k \wedge B_k|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \mathbf{0})$ . Ist noch keine Abbruchbedingung erfüllt, so erfolgt ein weiterer Iterationsschritt.

Das Nulldynamikvektorfeld des Systemmodells ergibt sich durch Einsetzen des Stellgrößenvektors  $\mathbf{u}^*$  sowie der Anfangsbedingungen  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  in die Systemgleichungen.

Dieser Algorithmus ersetzt die Rangbetrachtungen des differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus (vgl. darin Schritt k.3) durch eine differentialalgebraische Bedingung, nämlich die Bestimmung der Gesamtanzahl  $\sum \rho_k$  der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen (vgl. Schritt k.3 der differentialalgebraischen Formulierung).

Die Bestimmung der Anzahl der  $u$ -linksunabhängigen Gleichungen kann durch die Berechnung der Basen  $B_k$  geschehen, so daß die Ermittlung der beiden Terme  $\rho_k$  und  $B_k$  des Schritts k.3 in einer Rechnung erfolgen kann. Weiterhin ist es möglich, die Basis der durch die Ausgangssignalableitungen gegebenen Polynome automatisiert zu berechnen, wie in dem nächsten Abschnitt gezeigt wird.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß das von Isidori (1995) verwendete Abbruchkriterium zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist. Aus der differentialalgebraischen Systemanalyse ist bekannt, daß der differentielle Rang  $\rho^*$  lediglich die Anzahl der Ein- und Ausgänge als oberen Grenzwert erreichen kann,  $\rho^* \leq \min\{m, p\}$  (Fliess 1986a). Es ist also durchaus möglich, daß nicht  $m$   $u$ -linksunabhängige Ausgangssignalableitungen gefunden werden können bzw. daß  $r_{k-1} = \text{rang } L_B c_{k-1}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c} = m$  für kein  $k < \infty$  erreicht wird. Aber auch  $\rho^*$  stellt nur eine hinreichende Abbruchgrenze dar, denn ein Vergleich mit der

Berechnung von  $\rho^*$  mittels Gröbner-Basen (Senger 1997) zeigt, daß sich durch die Nullung der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen im Verlauf des Algorithmus die maximale Anzahl der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen verringern kann. Ohne die Nullungsbedingungen entspricht die maximale Anzahl der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen gerade  $\rho^*$ .

### 3.3 Differentialalgebraische Berechnung

Die algebraischen Berechnungen beschränken sich bei dem oben vorgestellten Nullodynamikalgorithmus auf die Bestimmung der Anzahl  $\rho_i$  der  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen und der Basis  $B_i$  der Ausgangssignalableitungen. Die Berechnung der notwendigen Größen setzt einige Begriffe voraus, die hier kurz dargestellt werden.

#### Definition 3.3: Polynomring

Ein (kommutativer) *Polynomring* in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  wird durch die Menge der Polynome in  $x_1, \dots, x_n$  mit Koeffizienten aus einem Ring  $\mathfrak{R}$  gebildet. Dieser Polynomring trägt die Bezeichnung  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

#### Definition 3.4: Ideal

Ein *Ideal*  $I$  eines Ringes wird durch eine Untermenge eines Ringes, für die folgende Rechenregeln gelten, gebildet:

- i)  $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$  ,
- ii)  $r \in \mathfrak{R}, a \in I \Rightarrow ar \in I$  .

$\square$

Im folgenden wird die Notation  $\langle P \rangle$  für das kleinste Ideal des Ringes  $\mathfrak{R}$  verwendet, das  $P \subseteq \mathfrak{R}$  enthält, und  $P$  heißt Basis des Ideals  $\langle P \rangle$ .  $\langle P \rangle$  ergibt sich als die Schnittmenge aller Ideale in  $\mathfrak{R}$ , die  $P$  enthalten. Ideale sind z.B. bei der Bestimmung der Nullstellen eines Systems von Polynomen von Bedeutung. Deshalb interessiert das von einer Menge  $f_1, \dots, f_n$  von Polynomen erzeugte Ideal des Polynomringes  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$  in besonderem Maße. Es ergibt sich auf einfache Weise, wie der folgende Satz zeigt.

#### Satz 3.1 (Sharp 1990)

Es seien  $f_1, \dots, f_m$  Polynome in dem Körper  $k[x_1, \dots, x_n]$  der meromorphen Funktionen in  $x_1, \dots, x_n$  mit Koeffizienten aus dem Grundkörper  $k$ . Das durch die Polynome  $f_1, \dots, f_m$  erzeugte Ideal ist dann gegeben durch

$$\langle f_1, \dots, f_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m g_i f_i \mid g_i \in k[x_1, \dots, x_n] \right\} . \quad (3.20)$$

$\square$

Eine Verbindung zwischen Idealen und Polynomen bildet das folgende Korollar:

### Korollar 3.1

Die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome  $f_1, \dots, f_n$  ist identisch mit der Menge der Nullstellen aller Basispolynome in dem Ideal  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ .  $\square$

**Beweis:** Die Folgerung ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.1.  $\square$

Satz 3.1 liefert die Legitimation dafür, daß in dem differentialalgebraisch formulierten Nullodynamikalgorithmus die Basispolynome zu null gesetzt werden anstelle der Nullung der Ausgangssignalableitungen.

Die Basis eines Gleichungssystems kann durch die Basis des zu dem Gleichungssystem gehörenden Ideals dargestellt werden. Dieses wird durch diejenigen Polynome gebildet, welche die Gleichungen in Normalform repräsentieren. Für die Normalform einer Polynomgleichung werden alle Terme auf eine Seite der Gleichung gebracht und das Polynom auf dieser Seite betrachtet. Bei der Aufgabe der Ausgangssignalnullung ergeben sich besonders vorteilhafte Verhältnisse, da die Ausgangsgleichungen und deren Ableitungen bis zu einer gewissen Stufe gerade gleich null sein müssen, so daß die rechte Seite der Ausgangssignalableitungen für diesen Fall schon die Gleichungen in Normalform, also die zu untersuchenden Polynome darstellt. Gesucht wird also in dem jeweiligen Iterationsschritt eine Basis des Ideals, das von den Polynomen aufgespannt wird, die auf der rechten Seite der Meßgleichungen bzw. deren Ableitungen stehen.

Wie die  $u$ -Linksunabhängigkeit mit Hilfe von Gröbner-Basen überprüft werden kann, wurde bereits in Senger (1997) gezeigt. Dazu wird in jeder Ableitungsstufe eine Basis der in  $u$  unabhängigen Ausgangssignalableitungen bestimmt. Zur Ausgangssignalnullung müssen alle Polynome dieser Basis gleich null werden, woraus sich ggf. Bedingungen für  $u$  ergeben, die dann in allen darauffolgenden Ableitungsstufen eingesetzt werden, wie an Hand von Beispielen noch deutlich wird.

Die Bestimmung der Basispolynome erfolgt mit dem Algorithmus zur Bestimmung der Gröbner-Basis  $GB$  der aufspannenden Polynome. Die Anzahl der von  $u$  abhängigen Polynome aus  $GB$  stimmt dabei mit der Anzahl der im aktuellen Algorithmusschritt neu hinzukommenden  $u$ -linksunabhängigen Polynome überein. Die Grundlage hierfür bildet der folgende Satz:

### Satz 3.2 (Buchberger 1985)

Es sei  $I \subset k[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]$  ein Ideal aus dem Polynomring  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]$  und  $GB(I)$  eine Gröbner-Basis von  $I$  bezüglich der lexikographischen Monomordnung  $u_1 < u_2 < \dots < u_m < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Dann gilt für alle  $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ :

$$\langle GB(I) \rangle \cap k[u_1, \dots, u_r] = \langle GB(I) \cap k[u_1, \dots, u_r] \rangle . \quad (3.21)$$

$\square$

Dies bedeutet, daß das „ $i$ -te Eliminationsideal“ (Buchberger 1985) durch diejenigen Polynome in  $GB$  erzeugt wird, die nur von den Variablen  $u_1, \dots, u_i$  abhängen. Ausführungen

zu Monomen und strikt lexikographischer Monomordnung sowie Beispiele zu Satz 3.2 finden sich bei Senger (1997). Es sei hier nur angemerkt, daß über die Monomordnung die Eliminationsreihenfolge der Variablen festgelegt werden kann.

Mit der in Satz 3.2 angegebenen Monomordnung berechnet sich im  $k$ -ten Schritt des algebraischen Nulldynamikalgorithmus die Basis  $B_k$  als Gröbner-Basis  $GB_k$  der Polynome  $\mathbf{y}^{(k)}$ . Aus den Bedingungen zur Nullung der Polynome in  $GB_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ergibt sich  $\rho_k$  als Gesamtanzahl der in  $k$  Schritten aufgetretenen Eliminationsideale aus  $GB_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Wichtig ist, daß gefundene Bedingungen für  $\mathbf{u}$  im nächsten Schritt eingesetzt werden und die Gröbner-Basis  $GB_k$  mit den Randbedingungen  $\mathbf{y}^{(k)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k}$  berechnet wird.

In dem nächsten Abschnitt sind einige Beispiele zur Berechnung der Nulldynamik mit dem algebraischen Nulldynamikalgorithmus aufgeführt.

## 4 Beispiele zur Berechnung der Nullodynamik

Die theoretischen Ausführungen in Abschnitt 3 werden in diesem Abschnitt durch Berechnungsbeispiele vertieft. Es handelt sich dabei nicht, wie sonst bei Beiträgen zu diesem Thema üblich, ausschließlich um akademische Beispiele, sondern auch um Zustandsmodellbeschreibungen realer Systeme.

Zu Beginn soll jedoch zum Vergleich das schon in Abschnitt 3 mit dem differentialgeometrischen Nullodynamikalgorithmus behandelte Beispiel von Isidori (1995) mit dem vorgestellten differentialalgebraischen Nullodynamikalgorithmus untersucht werden. Die Bestimmung der Gröbner-Basen sowie der Ausgangssignalableitungen erfolgt für die im Rahmen dieses Berichtes durchgeführten Berechnungen mit dem Programmpaket MAPLE.

### Beispiel 4.1

Betrachtet wird wieder das durch die Gln. (3.14–3.15) gegebene System. Für den differentialalgebraischen Rang dieses Systems gilt  $\rho^* = 2$ , wie man auf verschiedene Weisen errechnen kann.

#### Iterationsschritt 1:

$$1.1: \mathcal{U}_1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2\}, \quad \mathcal{M}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = 0\}$$

$$1.2: \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_2 + u_1 \\ x_4 + x_3 u_1 + x_2 u_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

1.3: Die Gröbner-Basis der Polynome auf der rechten Seite von Gl. (4.1) an der Stelle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1$  lautet  $GB_1 = \{x_4, u_1\}$ . Es lässt sich also nur ein Eliminationsideal für die Eingangsgrößen bilden. Daraus folgt, daß  $\rho_1 = 1$  ist und die Abbruchbedingung noch nicht erreicht ist.

#### Iterationsschritt 2:

$$2.1: \mathcal{U}_2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 | u_1 = 0\}, \quad \mathcal{M}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = x_4 = 0\}$$

2.2:  $u_1$  eingesetzt, ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_4 + x_2 u_2 \\ x_5 + x_2 u_2 + u_2(x_4 + x_2 u_2) + x_2 \dot{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

2.3: Die Gröbner-Basis der Polynome auf der rechten Seite von Gl. (4.2) an der Stelle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1$  lautet  $GB_2 = \{x_5\}$ . Es lässt sich also kein Eliminationsideal für die Eingangsgrößen bilden. Daraus folgt, daß  $\rho_2 = 0$ ,  $\rho_1 + \rho_2 = 1$  gilt und die Abbruchbedingung immer noch nicht erreicht ist.

Iterationsschritt 3:

$$3.1: \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 | u_1 = 0\}, \quad \mathcal{M}_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$$

3.2:  $\mathbf{y}^{(3)} = \frac{d}{dt}(\ddot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_3})$  ergibt einen einfachen Ausdruck, der aber wegen seiner Länge hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht angegeben wird.

3.3: Die Gröbner-Basis der Polynomausdrücke für  $\mathbf{y}^{(3)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_3}$  ergibt sich zu  $GB_3 = \{x_3 + u_2\}$ . Es läßt sich also ein neues Eliminationsideal für die Eingangsgrößen bilden und es folgt  $\rho_3 = \rho_2 + 1 = 2 = \rho^*$ , womit eine Abbruchbedingung erfüllt ist.

Für die Stellgrößen ergibt sich nun  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 | (\mathbf{u} \in \mathcal{U}_3 \wedge GB_3 = \mathbf{0}) = [0 \ -x_3]^T$ . Die Anfangsbedingungen sind durch  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | (\mathbf{x} \in \mathcal{M}_3 \wedge GB_3|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \mathbf{0}) = [0 \ 0 \ x_3 \ 0 \ 0]^T$  festgelegt. Setzt man diese Anfangsbedingungen und Stellgrößen in die Systemgleichungen ein, so ergibt sich die Nulldynamik zu  $\dot{x}_3 = -x_3$ .  $\square$

## 4.1 Elektrohydraulischer Antrieb

Als zweites Beispiel wird ein System behandelt, das durch Parameteridentifikation gewonnen wurde. Es handelt sich um eine Systembeschreibung eines hydraulischen Gangzyinders. Als Modellstruktur ist eine nichtlineare beobachterkanonische Normalform (Zeitz 1990) vorgegeben. Das vorliegende System weist die Besonderheit auf, daß die Drift linear ist (Schwarz 1996). Die ursprünglich aus Gründen des Stabilitätsnachweises spezieller Regelungsgesetze gewählte lineare Drift hat im Fall der Nulldynamikberechnung für diese Normalform die Folge, daß auch die Nulldynamik linear ist, da der nichtlineare Teil der Systemgleichungen nur von dem zu nullenden Zustand multiplikativ abhängt. Die Stabilitätsuntersuchung der Nulldynamik eines solchen Systems ist also besonders einfach, da bekannte Kriterien der Theorie linearer Systeme Anwendung finden können.

Bei dem Modell handelt es sich um ein System, das quadratisch in den Zuständen und linear in den Eingängen ist und als QLS bezeichnet wird. Dieses System liegt in nichtlinearer Beobachternormalform vor und ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \left( \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ \vdots \\ b_{1,n} \end{bmatrix} x_n(t) + \begin{bmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ \vdots \\ b_{2,n} \end{bmatrix} x_n^2(t) \right) u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t) = x_n(t); \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

Die Werte der Modellparameter sind Schwarz und Senger (1997) zu entnehmen, wo das Modell ausführlich vorgestellt ist. Es handelt sich um ein Modell vierter Ordnung ( $n = 4$ ), woraus sich wegen des Differenzengrades  $d = 1$  eine Nulldynamik der Ordnung drei ergibt. Für die Berechnung der Nulldynamik folgt:

Iterationsschritt 1:

$$1.1: \mathcal{U}_1 = \{u \in \mathbb{R}\} , \quad \mathcal{M}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | x_4 = 0\}$$

$$1.2: \dot{y} = x_3 - a_4 x_4 + (b_4 + b_{1,4}x_4 + b_{2,4}x_4^2)u \quad (4.3)$$

1.3: Die Gröbner-Basis der Polynome auf der rechten Seite von Gl. (4.3) an der Stelle  $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1$  entspricht gerade  $GB_1 = \{x_3 + b_4 u\}$ . Es läßt sich also ein Eliminationsideal für die Eingangsgröße  $u$  bilden. Daraus folgt:  $\rho_1 = 1$ . Da es sich um ein Eingrößensystem handelt, gilt wegen der Bedingung  $\rho^* \leq \min\{m, p\}$  für den differentialalgebraischen Rang des Systems:  $\rho^* = 1$ . Daher ist die Abbruchbedingung bereits erreicht.

Für die Stellgröße gilt damit:  $u^* = -x_3/b_4$ . Die Anfangsbedingungen sind durch  $\boldsymbol{x}^* = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ 0]^T$  festgelegt. Setzt man diese Anfangsbedingungen und Stellgröße in die Systemgleichungen ein, so resultiert diese Nulldynamik:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{b_1}{b_4} \\ 1 & 0 & -\frac{b_2}{b_4} \\ 0 & 1 & -\frac{b_3}{b_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Wie schon oben erwähnt, ist auf Grund der speziellen Modellstruktur die Nulldynamik linear, wodurch sich die Stabilität leicht überprüfen läßt. Setzt man die identifizierten Zahlenwerte für die Parameter  $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4$  (Schwarz und Senger 1997)

$$\begin{aligned} b_1 &= 6,85 \cdot 10^{-3} , & b_2 &= -1,81 \cdot 10^{-2} , \\ b_3 &= 5,91 \cdot 10^{-2} , & b_4 &= -1,21 \cdot 10^{-1} , \end{aligned}$$

in Gl. (4.4) ein, so ergeben sich für die Nulldynamik folgende Eigenwerte:

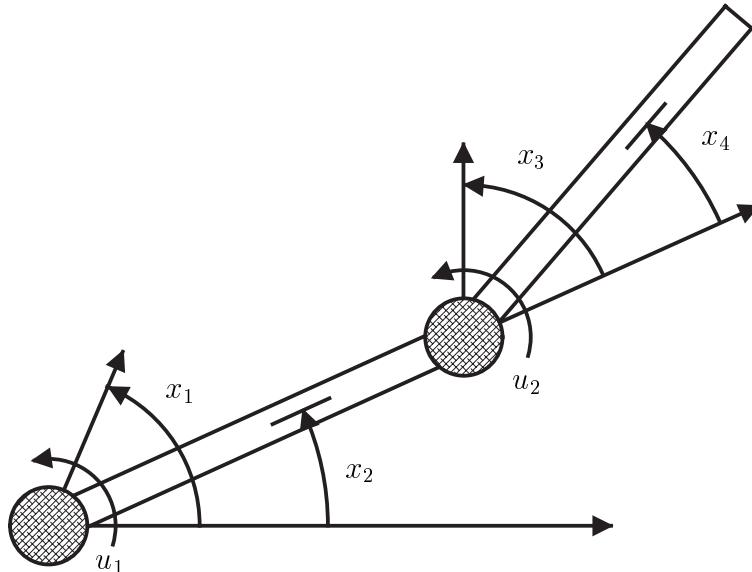
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,2327 + 0,7344j , \\ \lambda_2 &= 0,2327 - 0,7344j , \\ \lambda_3 &= 0,9538 . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Nulldynamik haben positive Realteile, so daß keine Stabilität der Nulldynamik gegeben ist. Es handelt sich also um ein Nicht-Phasenminimum-System. Entsprechend ist bei der Verwendung dieses Modells zur Bildung des inversen Modells sowie im Fall einer Ausgangssignalnullung Vorsicht geboten.

## 4.2 Zweiachsiger Roboter mit elastischen Gelenken

Das folgende Beispiel stellt ein System dar, dessen Modell durch Auswertung physikalischer Gesetzmäßigkeiten gewonnen wurde. Es handelt sich dabei um ein System aus dem Bereich Robotik. Dieses Beispiel weist insofern eine Besonderheit auf, als Gröbner-Basen nicht zur Bestimmung der  $u$ -linksunabhängigen Gleichungen verwendet werden können. Dies hat seinen Grund darin, daß die Systemgleichungen nicht in Form von Polynomen gegeben sind, sondern trigonometrische Funktionen beinhalten. Es soll aber gezeigt werden, daß dennoch die  $u$ -Linksunabhängigkeit von Hand überprüft und damit die Nulldynamik berechnet werden kann. Dies ist bemerkenswert, da das System eine hohe Modellordnung besitzt und stark vermascht ist, wie auch der graphentheoretischen Behandlung des Systems in Wey (1996) zu entnehmen ist.

Als Beispielsystem wird ein Modell eines zweiachsigen planaren Roboters mit elastischen Gelenken herangezogen. Die Modellierung der Gelenke als Elemente mit inhärenter Elastizität ist z. B. dann sinnvoll, wenn bei dem betrachteten Roboter Harmonic-Drive-Getriebe zum Einsatz kommen. Bild 4.1 zeigt eine schematische Darstellung des Beispielsystems.



**Bild 4.1:** Zweiarmer planarer Roboterarm mit elastischen Gelenken

Zustandsvariablen  $x_1, x_3$  bezeichnen in Bild 4.1 die Aktuatorwinkelstellung relativ zum vorausgegangenen Arm,  $x_2, x_4$  bezeichnen die Winkel der Armstellungen relativ zum vorausgegangenen Arm.  $u_1$  und  $u_2$  stellen die Momente der Aktuatoren dar. Die beschrei-

benden Gleichungen sind De Luca und Isidori (1987) entnommen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ a_5(\mathbf{x}) \\ a_6(\mathbf{x}) \\ a_7(\mathbf{x}) \\ a_8(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{5,1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & b_{6,2}(\mathbf{x}) \\ 0 & b_{7,2}(\mathbf{x}) \\ 0 & b_{8,2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y} = [x_2 \ x_4]^T. \quad (4.6)$$

Für die Matrizelemente gilt:

$$\begin{aligned} a_5(\mathbf{x}) &= \frac{G_1 K_1}{N_1^2} (N_1 x_2 - x_1), \\ a_6(\mathbf{x}) &= \frac{1}{A_3^2 \cos^2 x_4 + A_4} \left( \frac{K_1 A_2}{N_1} (N_2 x_2 - x_1) + \frac{K_2 (A_2 - N_2 (A_3 \cos x_4 + A_2))}{N_2^2} \right. \\ &\quad \cdot (N_2 x_4 - x_3) - A_3 \sin x_4 (A_3 x_6^2 \cos x_4 + A_2 (x_6 + x_8)^2) \Bigg), \\ a_7(\mathbf{x}) &= -a_6(\mathbf{x}) + \frac{G_2 K_2}{N_2^2} (N_2 x_4 - x_3), \\ a_8(\mathbf{x}) &= \frac{1}{A_3^2 \cos^2 x_4 + A_4} \left( -\frac{K_1 (A_3 \cos x_4 + A_2)}{N_1} (N_1 x_2 - x_1) \right. \\ &\quad + \frac{K_2}{N_2^2} \left( (N_2 - 1) (A_3 \cos x_4 + A_2) + N_2 \left( A_3 \cos x_4 - \frac{A_4}{A_2} \right) \right) (N_2 x_4 - x_3) \\ &\quad \left. + A_3 \sin x_4 \left( \left( A_3 \cos x_4 - \frac{A_4}{A_2} \right) x_6^2 + (A_3 \cos x_4 + A_2) (x_6 + x_8)^2 \right) \right), \\ b_{5,1}(\mathbf{x}) &= G_1, \\ b_{6,2}(\mathbf{x}) &= \frac{A_2}{A_3^2 \cos^2 x_4 + A_4}, \\ b_{7,2}(\mathbf{x}) &= G_2 - b_{6,2}(\mathbf{x}), \\ b_{8,2}(\mathbf{x}) &= -\frac{A_3 \cos x_4 + A_2}{A_3^2 \cos^2 x_4 + A_4}. \end{aligned}$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, G_1, G_2, K_1, K_2, N_1$  und  $N_2$  stellen Konstanten dar, deren physikalische Bedeutungen De Luca und Isidori (1987) zu entnehmen sind und hier für die Berechnung nicht von Belang sind. Da, wie schon erwähnt, Gröbner-Basen nicht zur Bestimmung der  $u$ -Linksabhängigkeit der Ausgangssignalableitungen herangezogen werden können, werden die Gleichungen nicht-automatisiert untersucht. Es ist eine Ausgangssignalableitung genau dann  $u$ -linksunabhängig, wenn darin eine neue Eingangsgröße bei einer Ableitungsstufe auftritt, die weder bei einer anderen Ausgangsgröße in der gleichen Ableitungsstufe noch bei einer Ausgangsgröße in einer niedrigeren Ableitungsstufe auftritt (vgl. Definition 3.2). Es können daher die  $u$ -linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen in folgender

Weise von Hand bestimmt werden: Ist eine Ausgangssignalableitung  $u$ -linksunabhängig, so wird sie nach einer neu aufgetretenen Eingangsgröße aufgelöst und diese Eingangsgröße im weiteren Verlauf durch diesen Ausdruck substituiert. Der Vorgang des sukzessiven Ableitens der Ausgangssignalableitungen und Substituierens schon aufgetretener Eingangsgrößen wird so lange fortgesetzt, bis  $\rho^*$   $u$ -linksunabhängige Ausgangssignalableitungen aufgetreten sind oder die  $n$ -te Ableitung erreicht ist. Für das Modell des Roboterarms werden die Ableitungen mit dem Computer-Algebra-Programm MAPLE berechnet, aber hier nicht aufgeführt, weil die Ergebnisse zwar einfache Ausdrücke darstellen, jedoch mehr als 70 DIN-A4-Seiten füllen würden.

Bei der Bestimmung der Nulldynamik wird nun wie folgt vorgegangen: Der vorstehend beschriebene Ablauf ergibt, daß die zweite Ableitung des ersten Ausgangs  $\ddot{y}_1$  von  $u_2$  abhängt und die vorherigen Ableitungsstufen auf die Randbedingungen  $\mathcal{M}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 0\}$  zur Ausgangssignalnullung führen. Daher wird  $\ddot{y}_1 = f(u_2)|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2} = 0$  nach  $u_2$  aufgelöst, woraus sich der Ausdruck

$$u_2 = \frac{A_2 K_1 N_2^2 x_1 + K_2 N_1 (A_2 - A_3 N_2 \cos(x_4) - A_2 N_2) x_3}{A_2 N_1 N_2^2} \quad (4.7)$$

ergibt, der sowohl in  $\ddot{y}_2$  als auch allen höheren Ableitungen eingesetzt wird. Die nächste  $u$ -linksunabhängige Ausgangssignalableitung ist  $y_2^{(6)} = f(u_1)$ . Als Randbedingungen für die Nulldynamik ergeben sich diese Beziehungen für  $\boldsymbol{x}$ , welche  $y_1, y_2, \dot{y}_1|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1}, \dot{y}_2|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1}, \ddot{y}_1|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2}, \ddot{y}_2|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2}, y_2^{(3)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_3}, y_2^{(4)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_4}, y_2^{(5)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_5}$  und  $y_2^{(6)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_6}$  nullen.  $u_1$  folgt aus der Bedingung  $y_2^{(6)} = 0$ . Geht man die Ableitungsstufen durch, so ergibt sich im einzelnen, wenn man die gefundenen Bedingungen für  $\boldsymbol{x}$  jeweils im nächsten Schritt einsetzt:

$$\underline{y_1 = y_2 = 0} \quad : \Rightarrow \quad \mathcal{M}_1 = \{\boldsymbol{x} | x_2 = x_4\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}_1|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1} = 0 \\ \dot{y}_2|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1} = 0 \end{array} \right\} \quad : \Rightarrow \quad \mathcal{M}_2 = \{\boldsymbol{x} | x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{y}_1|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2} = 0 \\ \ddot{y}_2|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2} = 0 \end{array} \right\} \quad : \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \text{siehe Gl.(4.7)} \\ \mathcal{M}_3 = \{\boldsymbol{x} | x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_8 = 0\} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{y_2^{(3)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_3} = 0} \quad : \quad & \frac{K_2 x_7}{N_2 A_2} = 0 \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{M}_4 = \{\boldsymbol{x} | x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0\} \end{aligned}$$

$$\underline{y_2^{(4)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_4} = 0} : \frac{K_1 K_2 (A_1 - A_2 + A_3^2 G_2 + A_4 G_2) x_1}{A_2 N_1 N_2 (A_3^2 + A_4)} = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{M}_5 = \{\mathbf{x} | x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0\}$$

$$\underline{y_2^{(5)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_5} = 0} : \frac{K_1 K_2 (A_1 - A_2 + A_3^2 G_2 + A_4 G_2) x_5}{A_2 N_1 N_2 (A_3^2 + A_4)} = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{M}_6 = \{\mathbf{x} | x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0\}$$

$$\underline{y_2^{(6)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_6} = 0} : \frac{K_1 K_2 (A_1 - A_2 + G_2 (A_3^2 + A_4))}{A_2 N_1 N_2 (A_3^2 + A_4)} u_1 = 0 \\ \Rightarrow u_1 = 0$$

Mit den gefundenen Randbedingungen für  $\mathbf{x}$  folgt, daß  $u_2$  ebenfalls null ist. Damit ergibt die Nulldynamikrechnung, daß lediglich die triviale Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$  eine Ausgangsnullung bewirkt. Dieses Ergebnis in die Systemgleichungen eingesetzt, liefert das Resultat, daß für das betrachtete Modell des zweiachsigen Roboters mit elastischen Gelenken keine Nulldynamik existiert. Diese Aussage stimmt mit den Angaben bei De Luca und Isidori (1987) überein.

## 5 Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht behandelt die Berechnung der Nulldynamik analytischer Systeme. Neben der Darstellung des differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus ist erstmals ein differentialalgebraisch formulierter Nulldynamikalgoritmus vorgestellt worden. Zur Auswertung der darin notwendigen differentialalgebraischen Kenngrößen wird mit den Gröbner-Basen ein (nicht-differential-)algebraisches Werkzeug verwendet.

Die Wirkungsweise des differentialalgebraisch formulierten Nulldynamikalgorithmus ist in Abschnitt 4 an verschiedenen Beispielen dargestellt. Wie gezeigt ist, können sowohl mathematische Systemmodelle untersucht werden, als auch durch physikalische Modellbildung ermittelte Systemmodelle, die häufig eine höhere Modellordnung aufweisen und kompliziertere Terme beinhalten.

Die behandelten Systemmodelle stellen Modelle realer Systeme dar, nämlich im Fall des identifizierten Modells einen elektrohydraulischen Antrieb und im Fall des physikalischen Modells einen zweiachsigen planaren Roboter mit elastischen Gelenken. Letzteres Beispielmodell demonstriert, daß der Nulldynamikalgoritmus auch dann noch halbautomatisiert berechnet werden kann, wenn es unmöglich ist, Gröbner-Basen als Hilfsmittel zur Bestimmung der  $u$ -Linksunabhängigkeit einer Ausgangssignalableitung zu verwenden.

Der entscheidende Vorteil des differentialalgebraisch formulierten Nulldynamikalgoritmus gegenüber dem differentialgeometrischen Pendant ist, daß die Bestimmung der Matrizen  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{R}_j$  entfällt. Diese müssen der Aufgabe gerecht werden, Basispolynome auszuwählen bzw. einen mehrdimensionalen Lösungsraum eines Gleichungssystems aufzuspannen. Die systematische Wahl dieser Matrizen bereitet insbesondere für Systeme hoher Ordnung mit vielen Ein-/Ausgängen große Schwierigkeiten. Ein solcher „Freiheitsgrad“ besteht im differentialalgebraischen Nulldynamikalgoritmus nicht.

## 6 Literatur

- Buchberger, B.** 1985. Gröbner Bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional System Theory: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*, hg. von N. K. Bose. 184–229. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Byrnes, C. I. und A. Isidori.** 1989. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters* 12. 437–442.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano und G. Bastin.** 1996. *Theory of Robot Control*. New York: Springer.
- Cao, L. und Y.-F. Zheng.** 1992. Disturbance decoupling via dynamic feedback. *International Journal of Systems Science* 23(5). 683–694.
- De Luca, A. und A. Isidori.** 1987. Feedback linearization of invertible systems. 2. *Duisburger Kolloquium Automation und Robotik*. Duisburg: Universität Duisburg.
- Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle und C. H. Moog.** 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 27. 658–672.
- Fliess, M.** 1986a. A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 7(5). 419–421.
- Fliess, M.** 1986b. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control: Lecture Notes in Control and Information Science*, hg. von S. Engell. Berlin: Springer.
- Hurwitz, A.** 1895. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. *Mathematische Annalen* 46(18). 273–284.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear control systems*. Berlin: Springer.
- Jelali, M.** 1997. *Über die nichtlineare Approximation und Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher dynamischer Prozesse*. Dissertation. Universität Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 636. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Kalman, R. E., P. L. Falb und M. A. Arbib.** 1969. *Topics in mathematical system theory*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Singh, S. N.** 1981. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC 26(2). 595–598.

- Reuter, H.** 1995. *Zur Identifikation nichtlinearer Systeme mit wenig A-priori-Information*. Dissertation. Universität Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 471. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Rosenbrock, H. H.** 1970. *State-space and multivariable theory*. London: Nelson.
- Schrader, C. B. und M. K. Sain.** 1989. Research on system zeros. *International Journal of Control* 50(4). 1407–1433.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1996. *QLS mit linearer Eigendynamik*. Forschungsbericht 18/96. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Schwarz, H. und M. Senger.** 1997. Output feedback stabilization of hydraulic drives based on quadratic approximations and canonical observers. *Preprints of the fifth IFAC Symposium on Robot Control SYROCO*. Nantes, Frankreich. 473–478.
- Senger, M.** 1997. *Gröbner Basen — Ein algebraisches Werkzeug zur Auswertung differentialalgebraischer Kriterien bei der Synthese nichtlinearer Regelungsgesetze*. Forschungsbericht 6/97. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Sharp, R. Y.** 1990. *Steps in commutative algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wey, T.** 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Dissertation. Universität Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 556. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Zeitz, M.** 1990. Canonical forms for nonlinear systems. *Nonlinear control systems design: Selected papers from the IFAC Symposium*, Capri, Italien, 1989, hg. von A. Isidori. 33–38. Oxford: Pergamon Press.