

# **Multiparameter-Singular-Perturbation-Methode zur Regelung von Robotern mit elastischen Armen**

Jianqi Wang

Forschungsbericht Nr. 5/98

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** In diesem Forschungsbericht wird eine Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode zur Regelung von Robotern mit elastischen Armen entwickelt. Hierzu wird das Modell des Roboters zunächst in Multiparameter-Multizeitskalen-Form dargestellt. Anschließend wird ein rekursiver Algorithmus zur Dekomposition des Robotersystems mit Hilfe der Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode vorgestellt. Durch Verwendung des vorgestellten Algorithmus kann man nicht nur die starre von der elastischen Dynamik, sondern auch die elastische Dynamik nach verschiedenen Schwingungsfrequenzen trennen. Auf der Basis der resultierenden Teilsysteme wird ein Reglerentwurfsverfahren für Roboter mit elastischen Gliedern angegeben. Die vorgestellte Methode wird sowohl durch Simulationen eines einachsigen und eines zweigliedrigen elastischen Roboterarms, als auch durch experimentelle Studien an einem einachsigen elastischen Roboter verifiziert. Die Ergebnisse zeigen, daß durch Verwendung der vorgestellten Methode der Reglerentwurf für Roboter mit elastischen Armen wesentlich erleichtert wird und der daraus resultierende Regler effektiv ist.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Systemdekomposition mittels Multiparameter-Singular-Perturbation-Methode</b>	<b>3</b>
<b>3 Reglerentwurf</b>	<b>9</b>
<b>4 Simulationsergebnisse</b>	<b>14</b>
4.1 Einachsiger elastischer Roboterarm . . . . .	14
4.2 Zweigliedriger elastischer Roboterarm . . . . .	15
<b>5 Versuchsergebnisse</b>	<b>20</b>
5.1 Aufbau des Versuchsträgers . . . . .	20
5.2 Modellierung des Versuchsträgers . . . . .	21
5.3 Simulationsstudien . . . . .	26
5.4 Regelungsergebnisse . . . . .	28
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>32</b>
<b>7 Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

DMS	Dehnungsmeßstreifen
-----	---------------------

## Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{A}_{ij}$	$i, j$ -te Untermatrix von $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_{ij}^k$	Systemmatrix
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$\mathbf{B}_i$	$i$ -te Untermatrix von $\mathbf{B}$
$\mathbf{B}_i^k$	Eingangsmatrix
$\mathbf{E}$	Matrix
$\mathbf{E}_{ij}$	$i, j$ -te Untermatrix von $\mathbf{E}$
$\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{h}^*(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t))$	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{I}_{n \times n}$	$(n \times n)$ -Einheitsmatrix
$\mathbf{K}_d^0$	Matrix der Differenzierbeiwerte
$\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_e^*$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k^*$	Reglermatrix
$\mathbf{K}_p^0$	Matrix der Proportionalbeiwerte
$\mathbf{L}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{L}_{ij}$	$i, j$ -te Untermatrix von $\mathbf{L}$
$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)), \mathbf{M}^*(\mathbf{q}^*(t))$	Trägheitsmatrix
$\mathbf{P}$	Permutationsmatrix
$\mathbf{Q}$	Eingangsbelegungsmatrix
$\mathbf{q}(t)$	Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten
$\Delta \mathbf{q}(t)$	Positionsvektor des linearisierten Modells
$\mathbf{q}^0$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten am Arbeitspunkt
$\mathbf{q}^*(t)$	Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten
$\mathbf{u}(t), \mathbf{u}^k(t), \hat{\mathbf{u}}^k(t)$	Stellvektor
$\mathbf{W}_i$	Matrix
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_i(t)$	$i$ -ter Untervektor von $\mathbf{x}(t)$
$\mathbf{x}_{ij}(t)$	$j$ -ter Untervektor von $\mathbf{x}_i(t)$
$\mathbf{x}_{ij}^k(t), \mathbf{x}_0(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{z}_i(t), \mathbf{z}_{ij}(t), \mathbf{z}_{ij}^k(t)$	Zustandsvektor
$\bar{\mathbf{z}}_{1k}^k(t)$	langsamer Teil von $\mathbf{z}_{ij}^k(t)$
$\hat{\mathbf{z}}_{1k}^k(t)$	schneller Teil von $\mathbf{z}_{ij}^k(t)$
$\Gamma_{ki}$	Matrix
$\boldsymbol{\theta}^d(t)$	Sollbahnvektor
$\boldsymbol{\tau}(t)$	Gelenkmomentvektor

$\Upsilon_i$	Matrix
<b>Skalare Größen</b>	
$b_m$	Modellparameter
$c_{1i}$	Koeffizient von $\phi_{1i}(x)$
$d$	Dicke des Arms
$d_i$	Abstand vom Schwerpunkt des $i$ -ten Arms zu seinem Einspannpunkt
$EI$	Biegesteifigkeit
$(EI)_i$	Biegesteifigkeit des $i$ -ten Arms
$f_{ij}$	Frequenz der elastischen Schwingung
$h_i$	$i$ -tes Element von $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$
$J_{hi}$	Trägheitsmoment der $i$ -ten Nabe
$J_m$	Trägheitsmoment der Motorwelle
$J_{oi}$	Trägheitsmoment des $i$ -ten Arms
$J_p$	Trägheitsmoment des Endeffektors
$k_{DMS}$	„ $k$ -Faktor“ des DMS
$k_{e1i}$	$i$ -tes Diagonalelement von $\mathbf{K}_e$
$k_M$	Drehmomentkonstante des Motors
$l$	Länge des Armes
$l_h$	Länge der Nabe
$l_i$	Länge des $i$ -ten Arms
$M_{ij}$	$i, j$ -tes Element von $\mathbf{M}(\mathbf{q})$
$M_R$	Reibungsmoment
$M_{Rv}$	Moment der viskosen Reibung
$M_{RC}$	Moment der Coulomb'schen Reibung
$m$	Anzahl der Ansatzfunktionen pro Glied
$m_i$	Masse des $i$ -ten Arms
$m_{hi}$	Masse der $i$ -ten Nabe
$m_p$	Endmasse
$n$	Anzahl der Gelenke
$n_{g1}$	Untersetzungsverhältnis des Getriebes
$n_{IG}$	gesamte Ausgangsimpulse des Impulsgebers
$n_{ZK}$	Ausgang der Zählerkarte
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_i$	relative Widerstandsänderung des DMS an der $i$ -ten Meßstelle
$t$	Zeit
$t_{id}$	Zeit bis zum Erreichen einer Soll-Endposition des $i$ -ten Gelenks
$U_{Ai}$	$i$ -te Brückenausgangsspannung
$U_B$	Brückenspeisespannung
$U_{di}$	Ausgang des $i$ -ten A/D-Wandlers

$u_i(t)$	$i$ -tes Element von $\mathbf{u}(t)$
$u_a$	Eingangsspannung von LC 3002
$u_R$	Stellgröße
$v_{ij}$	Modellparameter
$w_1(x, t)$	Auslenkung des Arms
$w_{ij}$	Modellparameter
$\delta_{ij}(t)$	$j$ -te elastische Koordinate des $i$ -ten Arms
$\eta_{g1}$	Wirkungsgrad des Getriebes
$\varepsilon_i, \varepsilon_i^*$	$i$ -ter kleiner Parameter
$\theta_i(t)$	$i$ -ter Gelenkwinkel
$\theta_i^d(t)$	Sollbahn des $i$ -ten Gelenks
$\theta_{if}$	Soll-Endposition des $i$ -ten Gelenks
$\theta_m(t)$	Drehwinkel des Motors
$\tau_i(t)$	Moment des $i$ -ten Gelenks
$\tau_m(t)$	Moment des Motors
$\mu_i$	$i$ -ter Singular-Perturbation-Parameter
$\lambda_{ij}$	Frequenz der $j$ -ten Ansatzfunktion des $i$ -ten Arms
$\lambda_{ij}^k, \lambda_{ij}^{ck}$	Eigenwert
$\rho$	Masse pro Längeneinheit des Arms
$\rho_i$	Masse pro Längeneinheit des $i$ -ten Arms
$\phi_{ij,e}$	Wert der $j$ -ten Eigenfunktion des $i$ -ten Arms am Armende
$\phi'_{ij,e}$	Wert der Ableitung von $\phi_{ij,e}$
$\omega_{1i}(t)$	Kreisfrequenz der elastischen Schwingung

### Operatoren

$ \cdot $	Betragfunktion
$\text{Im}$	Imaginärteil
$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordung „groß O“
$\mathcal{o}(\cdot)$	Ordnung „klein o“
$\frac{d}{dt}$	zeitliche Ableitung
$\frac{\partial}{\partial s}$	partielle Ableitung nach $s$
$\sum$	Summation
$\prod$	Produkt
$\psi_{sc}, \psi_{fc}^k$	Charakteristische Gleichung

# 1 Einleitung

Um die Dynamik von Robotern mit elastischen Armen exakt zu beschreiben, ist die elastische Deformation des Arms zu berücksichtigen (Benati und Morro 1994). Dies führt allerdings zu einem unendlich dimensionalen System. Im Hinblick auf die Regelung ist jedoch eine endliche Ordnung wünschenswert bzw. eine notwendige Voraussetzung (Schwarz 1991). Dies kann durch Verwendung eines Ritzschen Ansatzes geschehen und liefert ein hoch-dimensionales System mit Multizeitskalen, d.h., ein System, dessen dynamische Verhalten im wesentlichen durch mehrere verschiedene Zeitkonstanten gekennzeichnet werden kann (Zaad und Khorasani 1996, Siciliano und Book 1988). Wegen der Kopplung zwischen dem langsamen und schnellen Verhalten ist das System schlecht konditioniert. Darunter leiden die Analyse des Systems und der Reglerentwurf. Für einen Roboter mit elastischen Armen kann angenommen werden, daß seine Gelenkwinkelgeschwindigkeit viel niedriger als die kleinste Eigenfrequenz der elastischen Schwingungen des Arms ist (Book 1993, Choura u. a. 1991, Gawronski u. a. 1995). Unter dieser Annahme wird die Singular-Perturbation-Methode zur Trennung der starren und elastischen Dynamik des Roboters mit elastischen Armen verwendet (Zaad und Khorasani 1996, Siciliano und Book 1988).

Eine Schwierigkeit, die bei dem Reglerentwurf für den Roboter mit elastischen Armen auftritt, ist, daß die Anzahl der Regelgrößen größer als die Anzahl der Stellgrößen ist (Siciliano und Book 1988). Durch Verwendung der von Siciliano und Book (1988) und Zaad und Khorasani (1996) vorgestellten Ein-Parameter-Singular-Perturbation-Methode kann man die Dynamik des Roboters mit elastischen Armen in ein starres und ein elastisches Teilsystem zerlegen. Für das starre Teilsystem ist die Zahl der Eingänge gleich der Zahl der Ausgänge. Aber das elastische Teilsystem hat immer noch mehrere Ausgänge als Eingänge, wenn mehr als eine Ansatzfunktion pro Glied für die Modellbildung benutzt wird. Das bedeutet, daß die Ein-Parameter-Singular-Perturbation-Methode in diesem Fall nicht genügt. Allerdings würde ein dynamisches Modell mit nur einer Ansatzfunktion pro Glied nur eine grobe Beschreibung des Roboters mit elastischen Armen darstellen (Fraser und Daniel 1991). Deshalb muß in der Praxis mehr als eine Ansatzfunktion pro Glied bei der Modellbildung eines Roboters mit elastischen Armen benutzt werden, um die Dynamik exakter darzustellen. In dieser Situation soll eine neue Methode gefunden werden, um diese Schwierigkeit komplett zu überwinden.

In Fraser und Daniel (1991), Wang (1996) und Zaad und Khorasani (1996) wurde gezeigt, daß die Eigenwerte des entsprechend linearisierten Modells des Roboters mit elastischen Armen sich nach dem Betrag ihres Imaginärteils in Gruppen aufteilen lassen, wenn mehr als eine Ansatzfunktion für die Modellbildung benutzt wird. Weil die elastischen Schwingungen nur schwach gedämpft werden, kann dieses System nach Chow u. a. (1978) mittels der Singular-Perturbation-Methode behandelt werden. Im Hinblick auf diese Ergebnisse wird eine Methode zur Regelung der Roboter mit elastischen Armen mit

der Hilfe des Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Verfahrens in dieser Arbeit entwickelt.

Im einzelnen gliedert sich der Inhalt der Arbeit wie folgt: Im Abschnitt 2 wird eine Systemdekompositionsmethode auf der Basis des Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Verfahrens für die betrachteten Robotersysteme entwickelt. Auf der Basis der im Abschnitt 2 entwickelten Teilsysteme wird ein Reglerentwurfsverfahren für den Roboter mit elastischen Armen im Abschnitt 3 vorgestellt. Abschnitt 4 behandelt Simulationsstudien. Im Abschnitt 5 wird die vorgestellte Methode experimentell verifiziert. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und mit einem Ausblick auf Ziele zukünftiger Forschungen ab.

## 2 Systemdekomposition mittels Multiparameter-Singular-Perturbation-Methode

Betrachtet wird ein elastischer Roboter, der aus  $n$  elastischen Armsegmenten besteht, die untereinander mit rotatorischen Gelenken in Reihe verbunden sind. Wir beschränken uns auf einen sich nur in der horizontalen Ebene bewegenden Roboter. Das Moment des  $i$ -ten Gelenks wird mit  $\tau_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bezeichnet. Unter den vereinfachenden Annahmen, daß:

- die Verformung jedes elastischen Arms nur durch reine Biegung hervorgerufen wird, die in einer horizontalen Ebene ist und es sich bei den Armen um Euler-Bernoulli-Balken handelt,
- die Deformation jedes elastischen Arms nach dem Ritzansatz beschrieben werden kann, wobei als Ansatzfunktionen die ersten  $m$  Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten Balkens angesetzt werden,
- die Coulombsche und viskose Reibung in den Gelenken sowie die Strukturdämpfung des Arms vernachlässigbar sind,

stellen sich die Bewegungsgleichungen dieses Roboters mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens zweiter Art wie folgt dar (De Luca und Siciliano 1991, Siciliano und Book 1988):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{K}_e \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}(t). \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{q}(t)$  der Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = & [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t), \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dots, \delta_{1m}(t), \delta_{21}(t), \delta_{22}(t), \dots, \delta_{2m}(t), \\ & \dots, \delta_{n1}(t), \delta_{n2}(t), \dots, \delta_{nm}(t)]^T. \end{aligned}$$

$\theta_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sind die Gelenkwinkel,  $\delta_{ij}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ) sind die  $j$ -ten elastischen Koordinaten des  $i$ -ten Armes.  $\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]^T$  ist der Gelenkmomentvektor und die übrigen Matrizen und Vektoren in Gl. (2.1) sind wie folgt definiert:

- |  |  |
|--|--|
| $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$  | : positiv definite, symmetrische $(m+1)n \times (m+1)n$ Trägheitsmatrix, |
| $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$                     | : $(m+1)n$ -Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte,                  |
| $\mathbf{K}_e$   | : $(m+1)n \times (m+1)n$ Steifigkeitsmatrix und                          |
| $\mathbf{Q} = [\mathbf{I}_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times mn}]^T$ | : Eingangsbelegungsmatrix.   |

Wir führen einen neuen Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^*(t) = & [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t), \delta_{11}(t), \delta_{21}(t), \dots, \delta_{n1}(t), \delta_{12}(t), \delta_{22}(t), \dots, \delta_{n2}(t), \\ & \dots, \delta_{1m}(t), \delta_{2m}(t), \dots, \delta_{nm}(t)]^T \end{aligned}$$

durch ein Umsortieren des Vektors  $\mathbf{q}(t)$  ein. Dabei sind  $\mathbf{q}^*(t)$  und  $\mathbf{q}(t)$  durch

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(t) \quad (2.2)$$

verknüpft, wobei  $\mathbf{P}$  eine geeignete Permutationsmatrix ist. Entsprechend gilt nun für die Bewegungsgleichung (2.1):

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q}^*(t)) \ddot{\mathbf{q}}^*(t) + \mathbf{h}^*(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)) + \mathbf{K}_e^* \mathbf{q}^*(t) = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}(t). \quad (2.3)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^*(\mathbf{q}^*(t)) &= \mathbf{P}^T \mathbf{M}(\mathbf{P} \mathbf{q}^*(t)) \mathbf{P}, \\ \mathbf{h}^*(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)) &= \mathbf{P}^T \mathbf{h}(\mathbf{P} \mathbf{q}^*(t), \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}^*(t)), \\ \mathbf{K}_e^* &= \mathbf{P}^T \mathbf{K}_e \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Gl. (2.3) ist stark nichtlinear. Dies macht den Reglerentwurf für das System kompliziert und aufwendig. Im Hinblick auf eine später angedachte Regelung wird zuerst das nichtlineare Systemmodell um den Arbeitspunkt  $\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}^0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^*(t) = \ddot{\mathbf{q}}^*(t) = 0$  und  $\boldsymbol{\tau}(t) = 0$  linearisiert. Dies geschieht gemäß Wang (1996) durch eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied des Systems (2.3):

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q}^0) \triangle \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_e^* \triangle \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q} \mathbf{u}(t), \quad (2.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \triangle \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}^*(t) - \mathbf{q}^0, \\ \mathbf{u}(t) &= \boldsymbol{\tau}(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das System aus Gl. (2.5) wird nun in eine Zustandsraumdarstellung überführt. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  des Systems wird aus  $\triangle \mathbf{q}(t)$  und seiner ersten zeitlichen Ableitung  $\triangle \dot{\mathbf{q}}(t)$  gebildet:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle \mathbf{q}(t) \\ \triangle \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n(m+1)} \quad (i = 1, 2). \quad (2.7)$$

Aus (2.5) und (2.7) folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -[\mathbf{M}^*(\mathbf{q}^0)]^{-1} \mathbf{K}_e^*, \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{M}^*(\mathbf{q}^0)]^{-1} \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wie Fraser und Daniel (1991), Wang (1996) sowie Zaad und Khorasani (1996) gezeigt haben, werden die Eigenwerte des Systems (2.8) aus Nullen und rein imaginären Zahlen gebildet. Diese Eigenwerte werden mit  $\{\lambda_{ij}^k, i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m; k = 1, 2\}$  bezeichnet. Wir beschränken uns dabei auf den Roboter, der die folgende Annahme erfüllt:

**Annahme 2.1:** Die Eigenwerte des Systems (2.8) können nach dem Betrag ihres Imaginärteils in die folgenden  $m + 1$  Gruppen eingeteilt werden:  $\{\lambda_{i_0}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}, \{\lambda_{i_1}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}, \dots, \{\lambda_{i_m}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$ . Die Beträge der Imaginärteile der verschiedenen Eigenwerte innerhalb einer Gruppe haben die gleiche Größenordnung. Also:

$$\frac{\lambda_{i_1j}^{k_1}}{\lambda_{i_2j}^{k_2}} = \mathcal{O}(1), \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n; k_1, k_2 = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.10)$$

Dabei heißt  $\mathcal{O}(\cdot)$  von der Ordnung „groß O“. Dagegen unterscheiden sich die Beträge der Imaginärteile der Eigenwerte von verschiedenen Gruppen stark. Diese Gruppen sind so angeordnet, daß gilt:

$$\frac{\lambda_{i_1j}^{k_1}}{\lambda_{i_2(j+1)}^{k_2}} = o(1), \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n; k_1, k_2 = 1, 2; j = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (2.11)$$

$o(\cdot)$  bezeichnet die Ordnung „klein o“.

**Bemerkung 2.1:** Wie Fraser und Daniel (1991), Wang (1996) sowie Zaad und Khorasani (1996) gezeigt haben, ist diese Annahme bei vielen Robotern mit homogenen elastischen Armen erfüllt.

Weil die Imaginärteile dieser Eigenwerte für die Schwingungsfrequenz des Systems (2.8) zuständig sind, folgt gemäß Chow u. a. (1978), daß das System (2.8) mittels der Singular-Perturbation-Methode behandelt werden kann. Es handelt sich bei System (2.8) um ein System mit  $m + 1$ -Zeitskalen (Ladde und Siljak 1983). Nun wird dieses System in einer Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Form dargestellt. Dazu werden zunächst  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) als die Kehrwerte des geometrischen Mittels der Absolutwerte der Imaginärteile der Eigenwerte der Gruppen  $\{\lambda_{ij}^k | i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$  definiert:

$$\mu_j = \frac{1}{\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^2 |\text{Im}(\lambda_{ij}^k)|}}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.12)$$

Nun führt man die folgenden Partitionen aus

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= [\mathbf{x}_{10}(t), \mathbf{x}_{11}(t), \dots, \mathbf{x}_{1m}(t)]^T, \\ \mathbf{x}_2(t) &= [\mathbf{x}_{20}(t), \mathbf{x}_{21}(t), \dots, \mathbf{x}_{2m}(t)]^T, \end{aligned} \quad \mathbf{x}_{ij}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & \dots & \mathbf{A}_{0m} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m0} & \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.15)$$

und führt die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} z_{1i}(t) &= \frac{1}{\mu_i^2} \mathbf{x}_{1i}(t), \\ z_{2i}(t) &= \frac{1}{\mu_i} \mathbf{x}_{2i}(t), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.16)$$

ein. Durch Einsetzen von (2.13) bis (2.16) in (2.8) lässt sich das System (2.8) in folgender Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Form darstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{10}(t) &= \mathbf{x}_{20}(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_{20}(t) &= \sum_{j=1}^m \mu_j^2 \mathbf{A}_{0j} z_{1j}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mu_i \dot{z}_{1i}(t) &= z_{2i}(t), \\ \mu_i \dot{z}_{2i}(t) &= \sum_{j=1}^m \mu_j^2 \mathbf{A}_{ij} z_{1j}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dabei werden  $\mathbf{A}_{i0} = \mathbf{0}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) verwendet.

Gestützt auf die Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode (Ladde und Siljak 1983) wird der folgende rekursive Algorithmus zur Dekomposition des Systems aus Gl. (2.17) und (2.18) vorgestellt:

### Algorithmus 2.1

1. Initialisierung:

$$\begin{aligned} k &= m, \\ \mathbf{x}_{i0}^m(t) &= \mathbf{x}_{i0}(t), \quad i = 1, 2, \\ z_{ij}^m(t) &= z_{ij}(t), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{u}^m(t) &= \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{A}_{ij}^m &= \mu_j^2 \mathbf{A}_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{B}_i^m &= \mathbf{B}_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2. Darstellung des Systems mit  $k + 1$ -Zeitskalen wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{10}^k(t) &= \mathbf{x}_{20}^k(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_{20}^k(t) &= \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_{0j}^k z_{1j}^k(t) + \mathbf{B}_0^k \mathbf{u}^k(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mu_i \dot{z}_{1i}^k(t) &= z_{2i}^k(t), \\ \mu_i \dot{z}_{2i}^k(t) &= \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_{ij}^k z_{1j}^k(t) + \mathbf{B}_i^k \mathbf{u}^k(t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

3. Da  $\mathbf{A}_{kk}^k$  nicht singulär ist, kann das System aus Gl. (2.20) und (2.21) mit Bezug auf die  $\mu_k$ -Zeitskala mittels Singular-Perturbation-Methode, d.h. mit  $\mu_k = 0$  anstelle des wahren Wertes, in die folgenden zwei Teilsysteme zerlegt werden (Kokotovic u. a. 1986):

- das  $\mu_k$ -Zeitskala quasistationäre Teilsystem:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{10}^{k-1}(t) &= \mathbf{x}_{20}^{k-1}(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_{20}^{k-1}(t) &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}_{0j}^{k-1} \mathbf{z}_{1j}^{k-1}(t) + \mathbf{B}_0^{k-1} \mathbf{u}^{k-1}(t),\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\mu_i \dot{\mathbf{z}}_{1i}^{k-1}(t) &= \mathbf{z}_{2i}^{k-1}(t), \\ \mu_i \dot{\mathbf{z}}_{2i}^{k-1}(t) &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}_{ij}^{k-1} \mathbf{z}_{1j}^{k-1}(t) + \mathbf{B}_i^{k-1} \mathbf{u}^{k-1}(t), \quad i = 1, 2, \dots, k-1,\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{z}}_{1k}^k(t) &= - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{A}_{kk}^k)^{-1} \mathbf{A}_{kj}^k \mathbf{z}_{1j}^{k-1}(t) - (\mathbf{A}_{kk}^k)^{-1} \mathbf{B}_k^k \mathbf{u}^{k-1}(t), \\ \bar{\mathbf{z}}_{2k}^k(t) &= 0.\end{aligned}\quad (2.24)$$

- das  $\mu_k$ -Zeitskala Grenzschichtteilsystem:

$$\begin{aligned}\mu_k \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{1k}^k(t) &= \hat{\mathbf{z}}_{2k}^k(t), \\ \mu_k \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{2k}^k(t) &= \mathbf{A}_{kk}^k \hat{\mathbf{z}}_{1k}^k(t) + \mathbf{B}_k^k \hat{\mathbf{u}}^k(t).\end{aligned}\quad (2.25)$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ij}^{k-1} &= \mathbf{A}_{ij}^k - \mathbf{A}_{ik}^k (\mathbf{A}_{kk}^k)^{-1} \mathbf{A}_{kj}^k, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ \mathbf{B}_i^{k-1} &= \mathbf{B}_i^k - \mathbf{A}_{ik}^k (\mathbf{A}_{kk}^k)^{-1} \mathbf{B}_k^k, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.\end{aligned}\quad (2.26)$$

$\mathbf{x}_{i0}^{k-1}(t)$  und  $\mathbf{z}_{ij}^{k-1}(t)$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, \dots, k-1$ ) bezeichnen den langsamten Anteil von  $\mathbf{x}_{i0}^k(t)$  bzw.  $\mathbf{z}_{ij}^k(t)$ .  $\mathbf{u}^{k-1}(t)$  und  $\hat{\mathbf{u}}^k(t)$  bezeichnen den langsamten bzw. schnellen Anteil von  $\mathbf{u}^k(t)$ .  $\bar{\mathbf{z}}_{ik}^k(t)$  und  $\hat{\mathbf{z}}_{ik}^k(t)$  ( $i = 1, 2$ ) bezeichnen den langsamten bzw. schnellen Anteil von  $\mathbf{z}_{ik}^k(t)$ . Es ergibt sich (Kokotovic u. a. 1986):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i0}^k(t) &= \mathbf{x}_{i0}^{k-1}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_k), \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{z}_{ij}^k(t) &= \mathbf{z}_{ij}^{k-1}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_k), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \\ \mathbf{z}_{ik}^k(t) &= \bar{\mathbf{z}}_{ik}^k(t) + \hat{\mathbf{z}}_{ik}^k(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_k), \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{u}^k(t) &= \mathbf{u}^{k-1}(t) + \hat{\mathbf{u}}^k(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_k).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Dabei ist

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \mu_1, & k = 1, \\ \frac{\mu_k}{\mu_{k-1}}, & k = 2, 3, \dots, m. \end{cases}\quad (2.28)$$

4. Setze  $k := k - 1$ .

5. Wenn  $k > 0$ , dann gehe zu Punkt 2, sonst gehe zu Punkt 6.

6. Ende.

Durch Verwendung von Algorithmus 2.1 wird das System (2.8) in  $m + 1$  voneinander entkoppelte Teilsysteme zerlegt. Für  $k = 1$  stellt Gl. (2.22) das langsamste Systemverhalten vom System (2.8) dar. Dies entspricht den linearisierten Bewegungsgleichungen des entsprechenden starren Roboters. Für  $k = 1, 2, \dots, m$  beschreibt Gl. (2.25) das  $\mu_1$ -,  $\mu_2$ -, ...,  $\mu_m$ -Zeitskalen-Grenzschichtteilsystem vom System (2.8). Aus  $\hat{z}_{ik}^k(t)$  und der durch Gl. (2.24) gegebenen  $\bar{z}_{ik}^k(t)$  können die elastischen Koordinaten  $\mathbf{x}_{ik}(t)$  ( $i = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ) gebildet werden. Bei jedem Teilsystem ist die Zahl der Ausgangsgrößen gleich der Zahl der Stellgrößen, wodurch sich der Reglerentwurf vereinfacht. Auf der Basis dieser Teilsysteme wird im nächsten Abschnitt auf den Reglerentwurf für den betrachteten Roboter eingegangen.

### 3 Reglerentwurf

Der Reglerentwurf für den Roboter mit elastischen Armen hat zwei Ziele. Zum einen soll das Gelenk aus seiner Anfangslage in eine gewünschte Endlage mit vorgegebenen Winkelgeschwindigkeiten bewegt werden und zum anderen soll die elastische Schwingung des Arms gedämpft werden (Baruh und Tadikonda 1989). Im Hinblick auf die im letzten Abschnitt vorgestellten Ergebnisse werden diese Ziele nun durch Reglerentwürfe für die im letzten Abschnitt erhaltenen Teilsysteme (2.22) ( $k = 1$ ) und (2.25) ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), statt direkt für System (2.8) durchgeführt.

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, wird die Stellgröße  $\mathbf{u}(t)$  durch die Systemdekomposition mittels Multiparameter-Singular-Perturbation-Methode in  $m+1$ -Anteile aufgespalten. Aus Gl. (2.27) läßt sich eine einfache Gleichung für die Gesamtstellgröße angeben:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0(t) + \hat{\mathbf{u}}^1(t) + \hat{\mathbf{u}}^2(t) + \dots + \hat{\mathbf{u}}^m(t). \quad (3.1)$$

Nun wird der Reglerentwurf genauer spezifiziert. Es wird vorausgesetzt, daß alle Zustandsgrößen vom System (2.8) für die Rückführung zur Verfügung stehen. Für den Entwurf des Regleranteils  $\mathbf{u}^0(t)$  wird vom Untersystem (2.22) (für  $k = 1$ ) ausgegangen. Dabei dient dieser Regleranteil zur Stabilisierung des starren Verhaltens des Systems (2.8) und zur Verfolgung einer vorgegebenen Bahn des Gelenkwinkels. Es kann leicht bestätigt werden, daß  $\mathbf{B}_0^0$  eine  $n \times n$  positiv definite, symmetrische Matrix ist. Das bedeutet, daß die inverse Matrix von  $\mathbf{B}_0^0$  existiert. So kann  $\mathbf{u}^0(t)$  als Folgeregler gewählt werden (Schwarz 1991):

$$\mathbf{u}^0(t) = (\mathbf{B}_0^0)^{-1} \left\{ \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d(t) - \mathbf{K}_d^0 \left[ \mathbf{x}_{20}^0(t) - \dot{\boldsymbol{\theta}}^d(t) \right] - \mathbf{K}_p^0 \left[ \mathbf{x}_{10}^0(t) - \boldsymbol{\theta}^d(t) \right] \right\}. \quad (3.2)$$

Hierbei ist  $\boldsymbol{\theta}^d(t) = [\theta_1^d(t), \theta_2^d(t), \dots, \theta_n^d(t)]^T$  der vorgegebenen Bahnvektor,  $\mathbf{K}_d^0$  und  $\mathbf{K}_p^0$  sind konstante, diagonale Reglermatrizen.

Die Regleranteile  $\hat{\mathbf{u}}^k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) haben die Aufgabe, die elastischen Schwingungen von System (2.8) zu dämpfen. Für die Entwürfe der Regleranteile  $\hat{\mathbf{u}}^k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) wird vom Untersystem (2.25) ausgegangen. Da das System (2.8) vollständig steuerbar ist (Riege 1996), können die Untersysteme (2.25) ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) auch als steuerbar angenommen werden (Kokotovic u. a. 1986). Deshalb wird hier zur Lösung der Aufgaben das lineare Rückführungsgesetz

$$\hat{\mathbf{u}}^k(t) = -\mathbf{K}_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{1k}^k(t) \\ \hat{\mathbf{z}}_{2k}^k(t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

verwendet. Dabei ist  $\mathbf{K}_k$  eine konstante Reglermatrix, die durch Verwendung des Verfahrens der Polvorgabe bestimmt werden kann (Friedland 1987).

Dieses einfache Vorgehen weist folgende Schwierigkeiten auf:  $\mathbf{x}_{i0}^0(t)$  in Gl. (3.2) und  $\hat{\mathbf{z}}_{ik}^k(t)$  ( $i = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ) in Gl. (3.3) sind lediglich fiktive Größen, die im realen System nicht auftreten. Diese müssen in  $\mathbf{x}_{ik}$  ( $i = 1, 2$ ;  $k = 0, 1, \dots, m$ ) umgerechnet

werden. Aus den Gln. (3.1) bis (3.3) und mit Hilfe von (2.16), (2.19), (2.24) sowie (2.27) ergeben sich

$$\boldsymbol{u}^0(t) = (\boldsymbol{B}_0^0)^{-1} \left\{ \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d(t) - \boldsymbol{K}_d^0 [\boldsymbol{x}_{20}(t) - \dot{\boldsymbol{\theta}}^d(t)] - \boldsymbol{K}_p^0 [\boldsymbol{x}_{10}(t) - \boldsymbol{\theta}^d(t)] \right\} \quad \text{und} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}_0^* \boldsymbol{u}^0(t) - \boldsymbol{K}_1^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{11}(t) \\ \boldsymbol{x}_{21}(t) \end{bmatrix} - \boldsymbol{K}_2^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{12}(t) \\ \boldsymbol{x}_{22}(t) \end{bmatrix} - \cdots - \boldsymbol{K}_m^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1m}(t) \\ \boldsymbol{x}_{2m}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Dabei gilt:

$$\boldsymbol{K}_0^* = \boldsymbol{W}_m \boldsymbol{W}_{m-1} \cdots \boldsymbol{W}_1, \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{K}_k^* = \left\{ \boldsymbol{W}_m \left\{ \boldsymbol{W}_{m-1} \left\{ \cdots \left\{ \boldsymbol{W}_{k+1} \boldsymbol{K}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{k(k+1)} \right\} + \cdots \right\} + \boldsymbol{\Gamma}_{k(m-1)} \right\} + \boldsymbol{\Gamma}_{km} \right\} \boldsymbol{\Upsilon}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{K}_m^* = \boldsymbol{K}_m \boldsymbol{\Upsilon}_m, \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{W}_i = \left( \boldsymbol{I}_{n \times n} - \boldsymbol{K}_i \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_{ii}^i)^{-1} \boldsymbol{B}_i^i \\ \boldsymbol{0}_{n \times n} \end{bmatrix} \right), \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ki} = \boldsymbol{K}_k \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_{ii}^i)^{-1} \boldsymbol{A}_{ik}^i & \boldsymbol{0}_{n \times n} \\ \boldsymbol{0}_{n \times n} & \boldsymbol{0}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_i^2} \boldsymbol{I}_{n \times n} & \boldsymbol{0}_{n \times n} \\ \boldsymbol{0}_{n \times n} & \frac{1}{\mu_i} \boldsymbol{I}_{n \times n} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

**Bemerkung 3.1:** Obwohl  $\boldsymbol{u}^0(t)$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{u}}^k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) mit Hilfe der voneinander entkoppelten Teilsysteme (2.22) für ( $k = 1$ ) bzw. (2.25) ausgelegt werden, muß man sich allerdings bei der Wahl von  $\boldsymbol{K}_d^0$  und  $\boldsymbol{K}_p^0$  bzw.  $\boldsymbol{K}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) die Tatsache vor Augen halten, daß  $\boldsymbol{u}^0(t)$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{u}}^k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) Teile des gesamten, geschlossenen Systems sind. Da die durch  $\boldsymbol{u}^0(t)$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{u}}^k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) gelösten Aufgaben nicht identisch sind, oft sogar einander widersprechen, muß man bei der Wahl von  $\boldsymbol{K}_d^0$  und  $\boldsymbol{K}_p^0$  bzw.  $\boldsymbol{K}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) bereit sein, geeignete Kompromisse einzugehen. Für gut gewählte  $\boldsymbol{K}_d^0$  und  $\boldsymbol{K}_p^0$  bzw.  $\boldsymbol{K}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) sollen die Polstellen aller geregelten ordnungsreduzierten Teilsysteme nur gemäßigt links von ihrer ursprünglichen Stelle in den offenen Teilsystemen liegen. Dies vermeidet hohe Stellimpulse, starke Anfangsschwingungen und dergleichen (Föllinger 1994). Dies deutet an, daß die mit (3.2) bzw. (3.3) geregelten ordnungsreduzierten Teilsysteme (2.22) (für  $k = 1$ ) bzw. (2.25) die Zeitskalen der entsprechenden offenen Teilsysteme beibehalten. Daraus erkennen wir, daß das mit dem Regelgesetz (3.5) geregelte Gesamtsystem (2.8) auch  $m+1$ -Zeitskalen besitzt, und

es kann wie das entsprechende offene System mit dem in Abschnitt 2 vorgestellten Algorithmus behandelt werden. Dadurch ergeben sich die folgenden Sätze:

**Satz 3.1:** Es seien  $\mathbf{K}_d^0$ ,  $\mathbf{K}_p^0$ ,  $\mathbf{K}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) so gewählt, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

1. Die mit (3.2) bzw. (3.3) ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) geregelten ordnungsreduzierten Teilsysteme (2.22) (für  $k = 1$ ) bzw. (2.25) sind stabil.
2. Die Zeitskalen des offenen Gesamtsystems werden beim über (3.5) geschlossenen System beibehalten.

Dann existieren  $\varepsilon_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) und für alle  $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) ist das über (3.5) geschlossene System (2.8) auch stabil.  $\square$

**Beweis:** Kokotovic u. a. (1986) haben diesen Satz lediglich für ein System mit zwei Zeitskalen bewiesen. Eine Erweiterung auf Systeme mit drei Zeitskalen führten Ladde und Siljak (1983) durch. Der Beweis für ein System mit  $m + 1$  Zeitskalen wurde bisher noch nicht erbracht, er kann jedoch analog zu Kokotovic u. a. (1986) und Ladde und Siljak (1983) geführt werden. Aufgrund der Kompliziertheit des Beweises wird dieser im folgenden nur kurz skizziert.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird  $\boldsymbol{\theta}^d(t)$  in Gl. (3.4) bei dem Beweis zu Null gesetzt. Durch das Einsetzen der Gl. (3.5) in (2.17) und (2.18) erfolgt die Darstellung des exakten geschlossenen Systems in der Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Form:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_0(t) \\ \mu_1 \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \mu_2 \dot{\mathbf{z}}_2(t) \\ \vdots \\ \mu_m \dot{\mathbf{z}}_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(t) \\ \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= [\mathbf{x}_{10}(t) \ \mathbf{x}_{20}(t)]^T, \\ \mathbf{z}_i(t) &= [\mathbf{z}_{1i}(t) \ \mathbf{z}_{2i}(t)]^T, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} & \dots & \mathbf{E}_{0m} \\ \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \dots & \mathbf{E}_{1m} \\ \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \dots & \mathbf{E}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_{m0} & \mathbf{E}_{m1} & \mathbf{E}_{m2} & \dots & \mathbf{E}_{mm} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{00} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n}] \\ -\mathbf{B}_0 \mathbf{K}_0^* (\mathbf{B}_0^0)^{-1} [\mathbf{K}_p^0 & \mathbf{K}_d^0] \end{bmatrix}, \\
\mathbf{E}_{0j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 2n} \\ [\mu_j^2 \mathbf{A}_{0j} & \mathbf{0}_{n \times n}] - \mathbf{B}_0 \mathbf{K}_j^* \begin{bmatrix} \mu_j^2 \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mu_j \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\
&\quad j = 1, 2, \dots, m, \\
\mathbf{E}_{i0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 2n} \\ -\mathbf{B}_i \mathbf{K}_0^* (\mathbf{B}_0^0)^{-1} [\mathbf{K}_p^0 & \mathbf{K}_d^0] \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\mathbf{E}_{ij} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 2n} \\ [\mu_j^2 \mathbf{A}_{ij} & \mathbf{0}_{n \times n}] - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j^* \begin{bmatrix} \mu_j^2 \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mu_j \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\
&\quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j, \\
\mathbf{E}_{ii} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n}] \\ [\mu_i^2 \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{0}_{n \times n}] - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^* \begin{bmatrix} \mu_i^2 \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mu_i \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\
&\quad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Wir führen eine untere Blockdreiecksmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n \times 2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{I}_{2n \times 2n} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_{21} & \mathbf{I}_{2n \times 2n} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_m & \mathbf{L}_{m1} & \mathbf{L}_{m2} & \dots & \mathbf{L}_{m(m-1)} & \mathbf{I}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

so ein, daß die Matrix  $\mathbf{L} \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1}$  eine obere Blockdreiecksmatrix ergibt. Ihre diagonalen Blockelemente ergeben sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{K}_p^0 & -\mathbf{K}_d^0 \end{bmatrix} + \mathbf{O}(\varepsilon_1) + \mathbf{O}(\varepsilon_2) + \dots + \mathbf{O}(\varepsilon_m) \tag{3.17}$$

und

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n}] \\ [\mathbf{A}_{ii}^i & \mathbf{0}_{n \times n}] - \mathbf{B}_i^i \mathbf{K}_i \end{bmatrix} + \mathbf{O}(\varepsilon_i) + \mathbf{O}(\varepsilon_{i+1}) + \dots + \mathbf{O}(\varepsilon_m), \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.18}$$

Durch Verwendung der gleichen Argumente wie Ladde und Siljak (1983) folgt dann, daß das System stabil ist.  $\square$

**Satz 3.2:** Es seien  $\mathbf{K}_d^0, \mathbf{K}_p^0, \mathbf{K}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) so gewählt, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

1. Die mit (3.2) bzw. (3.3) ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) geregelten ordnungsreduzierten Teilsysteme (2.22) (für  $k = 1$ ) bzw. (2.25) besetzen die verschiedenen Eigenwerte  $\{\lambda_{i0}^{ck}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}, \{\lambda_{ij}^{ck}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

2. Die Zeitskalen des offenen Gesamtsystems werden beim über (3.5) geschlossenen System beibehalten.

Dann existieren  $\varepsilon_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Für alle  $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) besitzt das mit (3.5) geregelte System (2.8) die Eigenwerte  $\{\lambda_{i0}^{ck} + \mathbf{O}(\varepsilon_1) + \mathbf{O}(\varepsilon_2) + \dots + \mathbf{O}(\varepsilon_m), [\lambda_{ij}^{ck} + \mathbf{O}(\varepsilon_j) + \mathbf{O}(\varepsilon_{j+1}) + \mathbf{O}(\varepsilon_{j+2}) + \dots + \mathbf{O}(\varepsilon_m)] / \mu_j, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m\}$ .  $\square$

**Beweis:** Um Satz 3.2 zu beweisen, gehen wir von der oberen Blockdreiecksform des geschlossenen Gesamtsystems aus und berücksichtigen die charakteristischen Gleichungen der diagonalen Blockelemente:

$$\psi_{sc}(s, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = 0, \quad (3.19)$$

$$\psi_{fc}^k(s, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.20)$$

Da für  $\psi_{sc}(s, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$  und  $\psi_{fc}^k(s, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)$  gilt, daß

- an der Stelle  $\{\varepsilon_k = 0, \varepsilon_{k+1} = 0, \dots, \varepsilon_m = 0\}$ ,  $s = \lambda_{i0}^{ck}$  bzw.  $s = \lambda_{ij}^{ck}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) die Gleichungen (3.19) bzw. (3.20) erfüllt werden,
- alle charakteristische Polynome und ihrer partiellen Ableitungen nach  $s$  in einer Umgebung dieser Stelle stetig sind und
- die Tatsache, daß die Eigenwerte verschieden sind, gewährleistet, daß die partiellen Ableitungen aller charakteristischen Polynome nach  $s$  an der Stelle nicht Null sind,

läßt sich dieser Satz beweisen.  $\square$

## 4 Simulationsergebnisse

Das im vorangegangenen Abschnitt entwickelte Reglerentwurfsverfahren wird mit Hilfe von Simulationen eines einachsigen und eines zweiachsigen elastischen Roboters erprobt.

### 4.1 Einachsiger elastischer Roboterarm

Unter der Annahme, daß das 2. und 3. Gelenk in Strecklage festgehalten werden, kann der Canadarm als Beispiel für einen einachsigen elastischen Roboterarm ( $n = 1$ ) betrachtet werden. Nach Zaad und Khorasani (1996) wird  $m$  zu 2 gesetzt, und die Matrizen sowie Vektoren in Gl. (2.1) lassen sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) = \begin{bmatrix} 196040 + 4000,7(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t))^2 & 29022 & -27688 \\ 29022 & 4985,5 & -6633,4 \\ -27688 & -6633,4 & 13371 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \begin{bmatrix} 8001,4\dot{\theta}_1(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t))(\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{12}(t)) \\ -4000,7\dot{\theta}_1^2(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t)) \\ 4000,7\dot{\theta}_1^2(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t)) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 123180 & 0 \\ 0 & 0 & 4865200 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{Q} = [13,5 \ 0 \ 0]^T. \quad (4.4)$$

Mit  $\mathbf{q}^0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  berechnen sich  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  in Gl. (2.8) zu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1347,0399 & 14180,5071 \\ 0 & -12223,1233 & -129333,8731 \\ 0 & -3274,5512 & -35162,5632 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0012 \\ -0,0109 \\ -0,0029 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Eigenwerte des linearisierten Modells liegen bei  $\lambda_{10}^{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{11}^{1,2} = \pm 11,5338j$ ,  $\lambda_{12}^{1,2} = \pm 217,3768j$ . Die Perturbations-Parameter sind  $\mu_1 = 0,0867$ ,  $\mu_2 = 0,0046$ ;  $\varepsilon_1 = 0,0867$ ,  $\varepsilon_2 = 0,0531$ .  $B_0^0$  in Gl. (3.4) ist  $5,101 \cdot 10^{-6}$ .

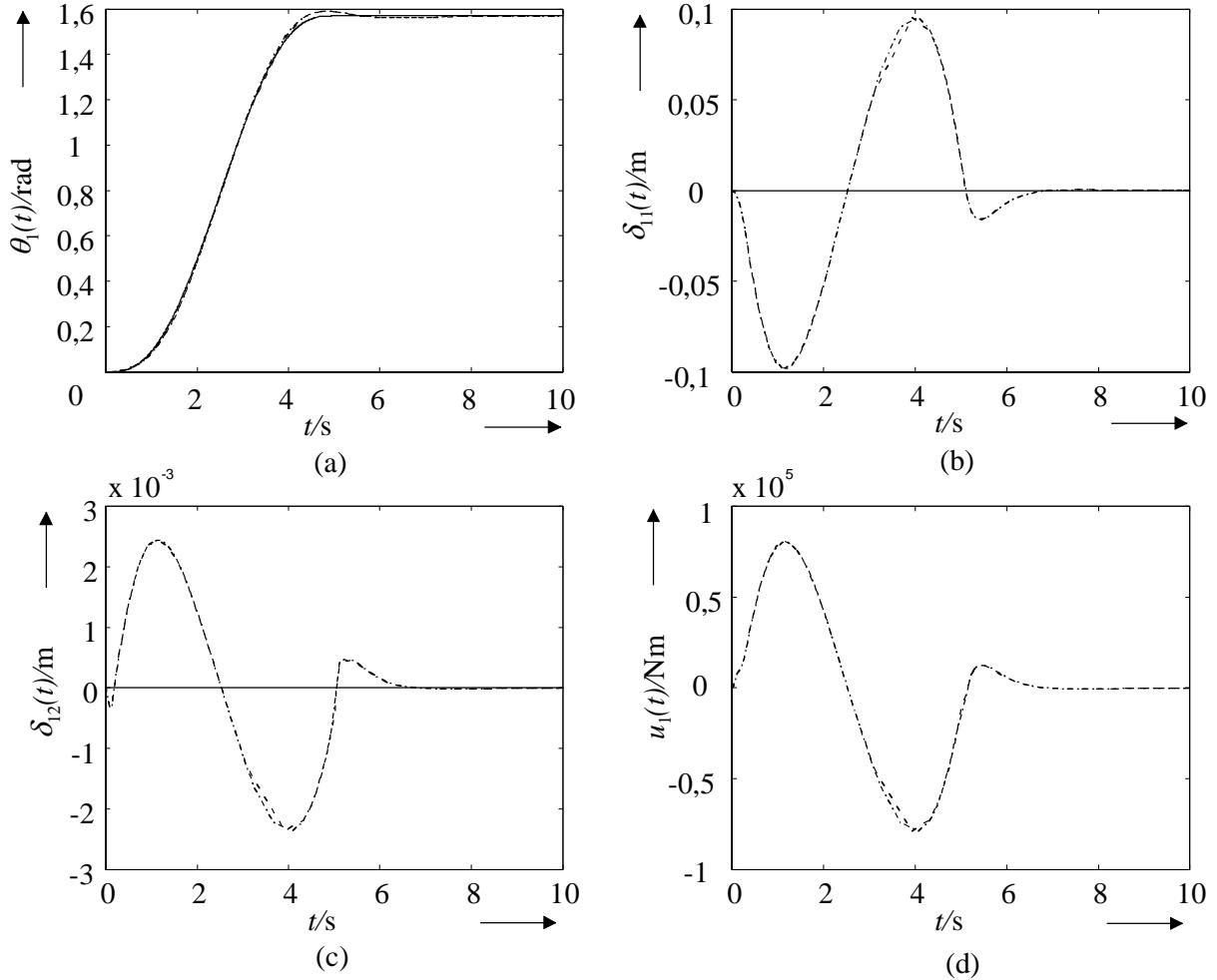
Bei der Simulation wird die Sollbahn des Gelenks zu

$$\theta_1^d(t) = \begin{cases} \left(6\frac{t^5}{5^5} - 15\frac{t^4}{5^4} + 10\frac{t^3}{5^3}\right)\frac{\pi}{2} & \text{für } t \leq 5 \text{ s} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } t > 5 \text{ s} \end{cases} \quad (4.6)$$

gewählt. Die Reglerparameter in Gl. (3.2) werden zu  $K_d^0 = 2$ ,  $K_p^0 = 1$  gesetzt. Als Polvorgabe für das geschlossene Grenzschichtteilsystem (2.25) ( $k = 1, 2$ ) werden  $(-0,8197 \pm 0,8197j)/\mu_1$  und  $(-0,6100 \pm 0,6100j)/\mu_2$  gewählt. Mit diesen Polen ergeben sich  $\mathbf{K}_1 = [0 \ -7630,5278]$  und  $\mathbf{K}_2 = [0 \ -418,5536]$  in Gl. (3.3) ( $k = 1, 2$ ). Die Reglervektoren in

Gl. (3.5) lassen sich zu  $K_0^* = 1$ ,  $\mathbf{K}_1^* = [0 \ -88009, 0104]$ ,  $\mathbf{K}_2^* = [0 \ -90983, 8263]$  berechnen.

Die Robustheit des Reglers (3.5) wird anhand der Regelung des linearen bzw. nichtlinearen Modells überprüft. Die Simulation beginnt mit den Anfangsbedingungen:  $\theta_1(0) = \delta_{11}(0) = \delta_{12}(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\delta}_{11}(0) = \dot{\delta}_{12}(0) = 0$ . Die Simulationsergebnisse sind in dem Bild 4.1 dargestellt.



**Bild 4.1:** (a) Winkel des Gelenks  $\theta_1(t)$ ; (b) Elastische Koordinate  $\delta_{11}(t)$ ; (c) Elastische Koordinate  $\delta_{12}(t)$ ; (d) Moment des Motors  $u_1(t)$ . „—“ Sollbahn; „- -“ lineares Modell; „- ·-“ nichtlineares Modell.

## 4.2 Zweigliedriger elastischer Roboterarm

Betrachtet wird das von De Luca und Siciliano (1991) vorgestellte Modell eines planaren elastischen Roboterarms, der aus zwei Gliedern ( $n = 2$ ) besteht. Zur Beschreibung der elastischen Deformationen werden zwei Ansatzfunktionen pro elastischem Glied ( $m = 2$ ) verwendet. Die Belegung der Systemmatrizen in Gl. (2.1) sind in De Luca und Siciliano (1991) im einzelnen angegeben. Die physikalischen Parameter des Roboters ergeben sich

nach De Luca und Siciliano (1993) zu:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_2 = 0,5 \text{ m}, \\
 \rho_1 &= \rho_2 = 1,0 \text{ kg/m}, \\
 (EI)_1 &= (EI)_2 = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\
 d_1 &= d_2 = 0,25 \text{ m}, \\
 m_1 &= m_2 = 0,5 \text{ kg}, \\
 J_{o1} &= J_{o2} = 0,0083 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
 m_{h1} &= m_{h2} = 1 \text{ kg}, \\
 J_{h1} &= J_{h2} = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
 m_p &= 0,1 \text{ kg}, \\
 J_p &= 0,0005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.
 \end{aligned}$$

Die Frequenzen der Ansatzfunktionen sind:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= 1,40 \text{ Hz}, & \lambda_{12} &= 5,10 \text{ Hz}, \\
 \lambda_{21} &= 5,21 \text{ Hz}, & \lambda_{22} &= 32,46 \text{ Hz}.
 \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich zu:

$$\boldsymbol{K}_e = \text{diag}(0 \ 0 \ 38,79 \ 513,37 \ 536,09 \ 20792,09). \quad (4.7)$$

Die mit den Ansatzfunktionen verbundenen Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned}
 \phi_{11,e} &= 0,39, & \phi_{12,e} &= 0,36, \\
 \phi'_{11,e} &= 1,34, & \phi'_{12,e} &= -1,38, \\
 \phi_{21,e} &= 1,49, & \phi_{22,e} &= -0,75, \\
 \phi'_{21,e} &= 4,30, & \phi'_{22,e} &= -15,49, \\
 v_{11} &= 0,069, & v_{12} &= 0,12, \\
 v_{21} &= 0,28, & v_{22} &= 0,30, \\
 w_{11} &= 0,026, & w_{12} &= 0,0405, \\
 w_{21} &= 0,104, & w_{22} &= 0,073.
 \end{aligned}$$

Mit  $\boldsymbol{q}^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  folgt aus Gl. (2.8):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 390,3589 & 3,9373 & 5520,9136 & 82,9665 \\ 0 & 0 & 10438,1700 & -340,9016 & -151630,1634 & -50842,3259 \\ 0 & 0 & -4270,7884 & 1615,4170 & 48943,4861 & 34040,0731 \\ 0 & 0 & 116,6448 & -2414,5601 & -708,9799 & -12524,7914 \\ 0 & 0 & 3688,1674 & -739,8932 & -58280,9561 & -15591,0318 \\ 0 & 0 & 63,3213 & -322,6628 & -384,8736 & -45972,1476 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 15,6303 & -16,9506 \\ -16,9506 & 801,7973 \\ -10,0897 & -269,7979 \\ -0,0073 & 0,6362 \\ -10,7533 & 295,3354 \\ -0,0040 & 2,4445 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Die Eigenwerte des resultierenden linearen Modells liegen bei  $\lambda_{10}^{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{20}^{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{11}^{1,2} = \pm 32,5329j$ ,  $\lambda_{21}^{1,2} = \pm 48,4947j$ ,  $\lambda_{12}^{1,2} = \pm 213,5491j$ ,  $\lambda_{22}^{1,2} = \pm 248,8475j$ . Die Perturbation-Parameter sind  $\mu_1 = 0,0252$ ,  $\mu_2 = 0,0043$ ;  $\varepsilon_1 = 0,0252$ ,  $\varepsilon_2 = 0,1723$ .  $\mathbf{B}_0^0$  in Gl. (3.4) ist

$$\mathbf{B}_0^0 = \begin{bmatrix} 2,2169 & -3,6667 \\ -3,6667 & 13,5384 \end{bmatrix}.$$

Die Sollbahnen der Gelenkwinkel werden zu

$$\theta_i^d(t) = \begin{cases} \left(6\frac{t^5}{t_{id}^5} - 15\frac{t^4}{t_{id}^4} + 10\frac{t^3}{t_{id}^3}\right)\theta_{if} & \text{für } t \leq t_{id}, \\ \theta_{if} & \text{für } t > t_{id}, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

gewählt. Hier sind  $\theta_{if} = \pi/4$  rad ( $i = 1, 2$ ) die Soll-Endpositionen der Gelenkwinkel,  $t_{id} = 5$  s ( $i = 1, 2$ ) sind die Zeiten bis zum Erreichen der Soll-Endposition. Bei den Simulationen werden die Reglermatrizen in Gl. (3.4) wie folgt gesetzt:

$$\mathbf{K}_d^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{K}_p^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Dämpfung der elastischen Schwingungen werden die vorgegebenen Pole der geschlossenen Grenzschichtteilsysteme (2.25) ( $k = 1, 2$ ) zu  $\{-0,5285 \pm 0,6625j, -0,7562 \pm 0,9482j\}/\mu_1$  und  $\{-0,5102 \pm 0,7720j, -0,6587 \pm 0,8196j\}/\mu_2$  gewählt. Somit ergeben sich

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0759 & 0,5447 \\ 0 & 0 & 0,0163 & -0,4574 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0257 & 12,0910 \\ 0 & 0 & 0,0035 & 0,4414 \end{bmatrix}$$

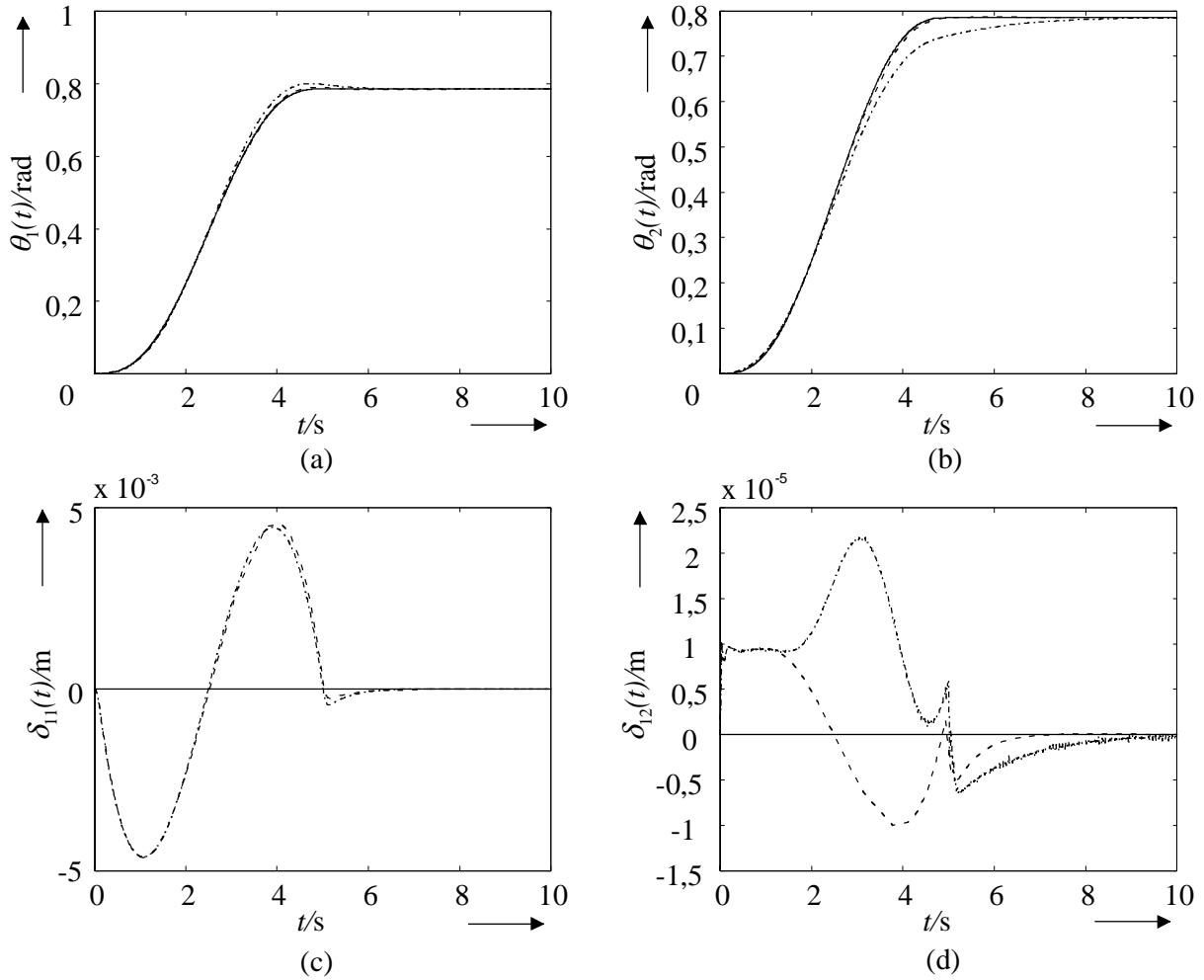
in Gl. (3.3) ( $k = 1, 2$ ). Daraus lassen sich die Reglermatrizen in Gl. (3.5) als

$$\mathbf{K}_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3,0162 & 21,634 \\ 0 & 0 & 0,6464 & -18,1688 \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$\mathbf{K}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5,9298 & 2787,2664 \\ 0 & 0 & 0,8042 & 101,7583 \end{bmatrix}$$

berechnen.

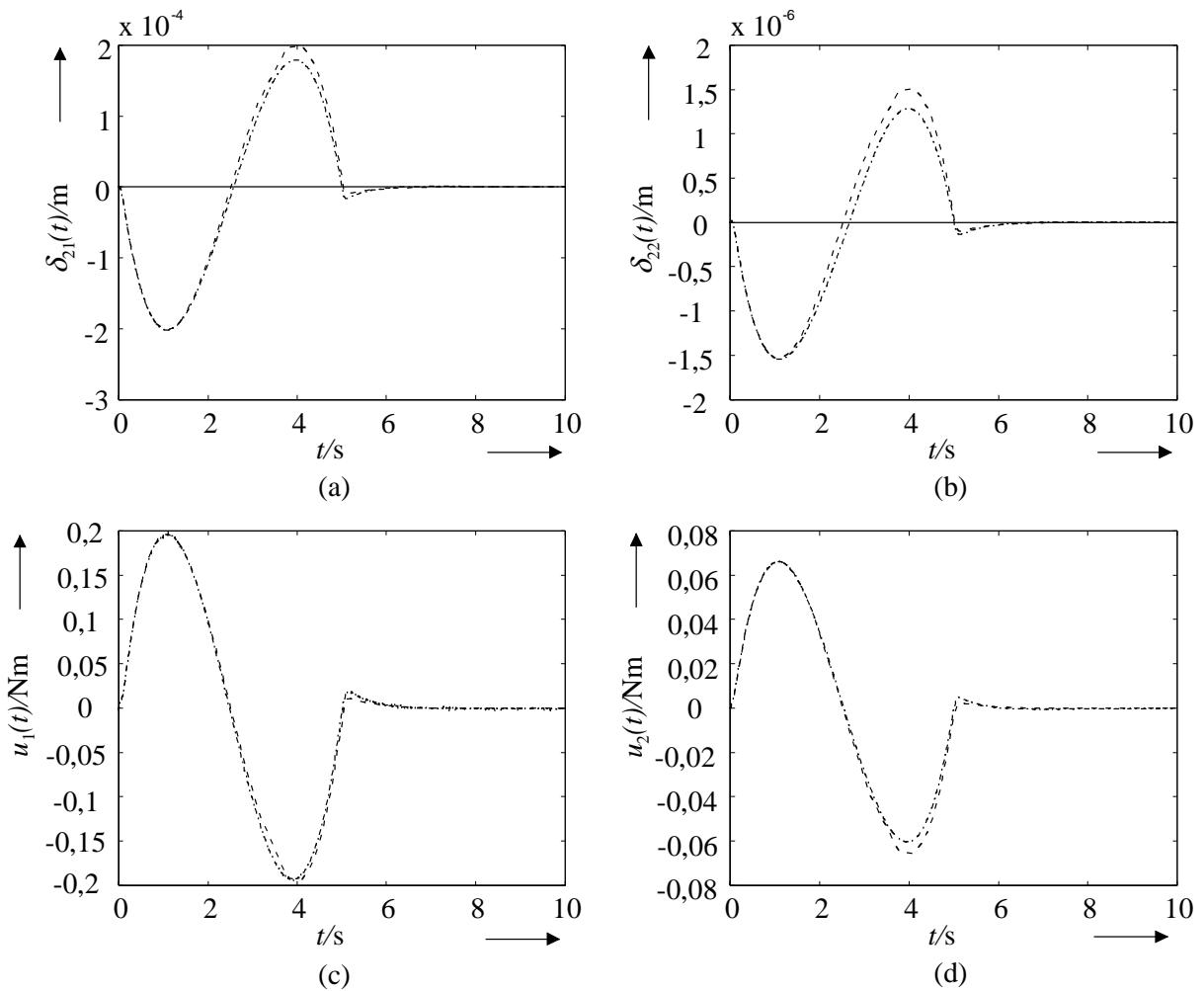
Die Robustheit des Reglers wird anhand der Regelung des linearen bzw. nichtlinearen Modells überprüft. Die Simulation beginnt mit den Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \delta_{11}(0) = \delta_{12}(0) = \delta_{21}(0) = \delta_{22}(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\delta}_{11}(0) = \dot{\delta}_{12}(0) = \dot{\delta}_{21}(0) = \dot{\delta}_{22}(0) = 0$ .



**Bild 4.2:** (a) Winkel des Schultergelenks  $\theta_1(t)$ ; (b) Winkel des Ellbogengelenks  $\theta_2(t)$ ; (c) Elastische Koordinate  $\delta_{11}(t)$ ; (d) Elastische Koordinate  $\delta_{12}(t)$ . „—“Sollbahn; „- -“ lineares Modell; „- · -“ nichtlineares Modell.

Die Ergebnisse werden in den Bildern 4.2 und 4.3 gezeigt.

Die beiden Beispiele zeigen, daß viele Roboter mit elastischen Armen Systeme mit Multizeitskalen sind, und daß mit der vorgestellten Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode der Reglerentwurf für diese Systeme wesentlich erleichtert wird. Die Simulationsergebnisse der beiden Beispiele zeigen, daß der resultierende Regler für das lineare und das nichtlineare Modell gut funktioniert, obwohl dem Reglerentwurf ein lineares Modell zugrunde liegt. Aus den Simulationsergebnissen erkennen wir außerdem, daß die Gelenkwinkel der geregelten Roboter der vorgegebenen Bahn mit hoher Genauigkeit folgen und die Anteile der elastischen Schwingungen mit den Eigenfrequenzen der Arme sehr gut gedämpft werden. Der Betrag der elastischen Koordinaten ist hauptsächlich der Beitrag des quasistationären Anteils, der nur von  $u^0(t)$  abhängig ist und bei einer Regelung der Endeffektorposition des Roboters leicht berücksichtigt werden kann.



**Bild 4.3:** (a) Elastische Koordinate  $\delta_{21}(t)$ ; (b) Elastische Koordinate  $\delta_{22}(t)$ ; (c) Moment des Motors im Schultergelenk  $u_1(t)$ ; (d) Moment des Motors im Ellbogengelenk  $u_2(t)$ . „- -“ lineares Modell; „- ·“ nichtlineares Modell.

## 5 Versuchsergebnisse

### 5.1 Aufbau des Versuchsträgers

Das in dieser Arbeit betrachtete elastische Handhabungssystem ist in Bild 5.1 dargestellt. Bild 5.2 zeigt den Signalflußplan des Versuchsträgers, der aus einem sich in der horizontalen Ebene bewegenden elastischen Arm besteht. Dieser wird durch eine elektrische Gleichstrommotor-Getriebe-Kombination angetrieben. Die Steuerspannung für den Motor wird von einem Rechner (PC486DX-100) durch eine D/A-Wandlerkarte RTI 815 (Analog Devices 1991) und einen Verstärker LC 3002 (Faulhaber 1994) ausgegeben. Ein optischer Impulsgeber vom Typ Faulhaber-HEDS 5010C02 (Faulhaber 1994) zusammen mit der DEC4-01 Zählerkarte von MOVTEC GmbH liefert dem Rechner die Winkelposition des Motors. Die Bestimmung der Deformationen des elastischen Arms wird mit Dehnungsmeßstreifen (DMS) der Firma HBM (Hoffmann 1987) an zwei Meßpunkten durchgeführt. Hierzu wurden auf jeder Seite des Roboterarms in der Biegeebene pro Meßpunkt ein Dehnungsmeßstreifen appliziert. Der erste Anbringungsort liegt 0,052m von der Einspannstelle entfernt. Der zweite liegt 0,2m von der Einspannstelle entfernt. Die zwei Einzelmeßstreifen werden zu einer Wheatstone'schen Halbbrücke zusammengeschaltet. Die Ausgangsspannung der Halbbrückenschaltung wird in einem HBM-Meßverstärker (KWS 3073) aufbereitet und über die A/D-Wandlerkarte RTI815 in den Prozeßrechner geleitet.

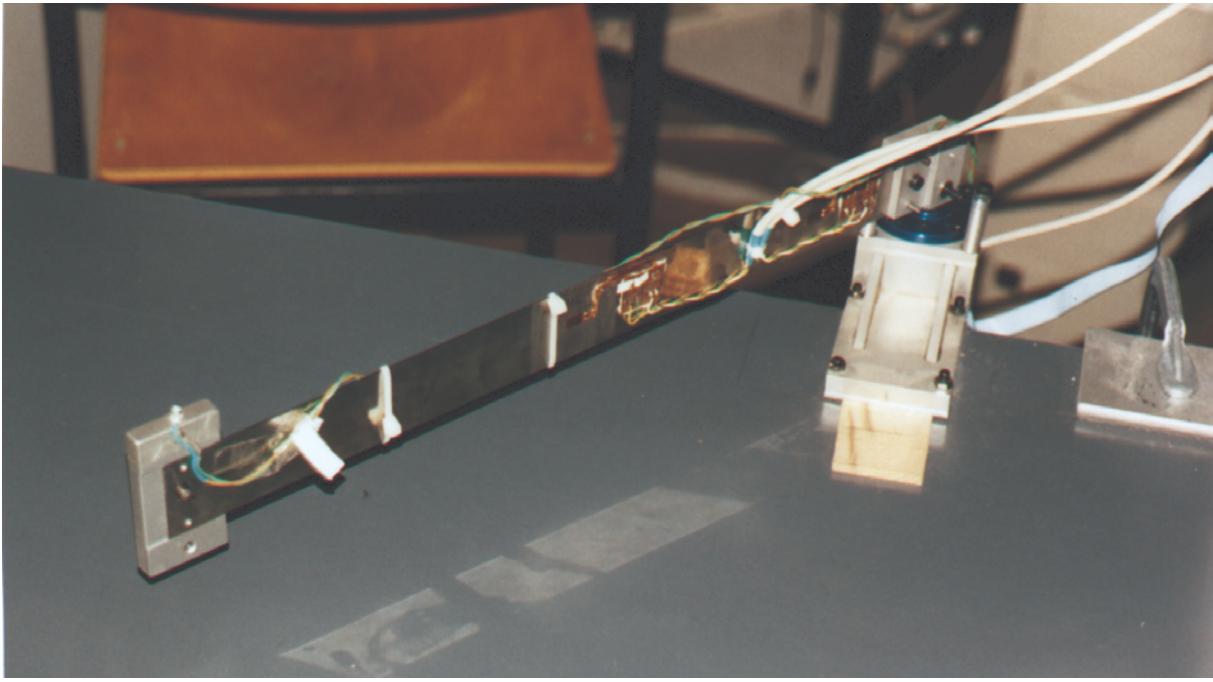


Bild 5.1: Laborroboter

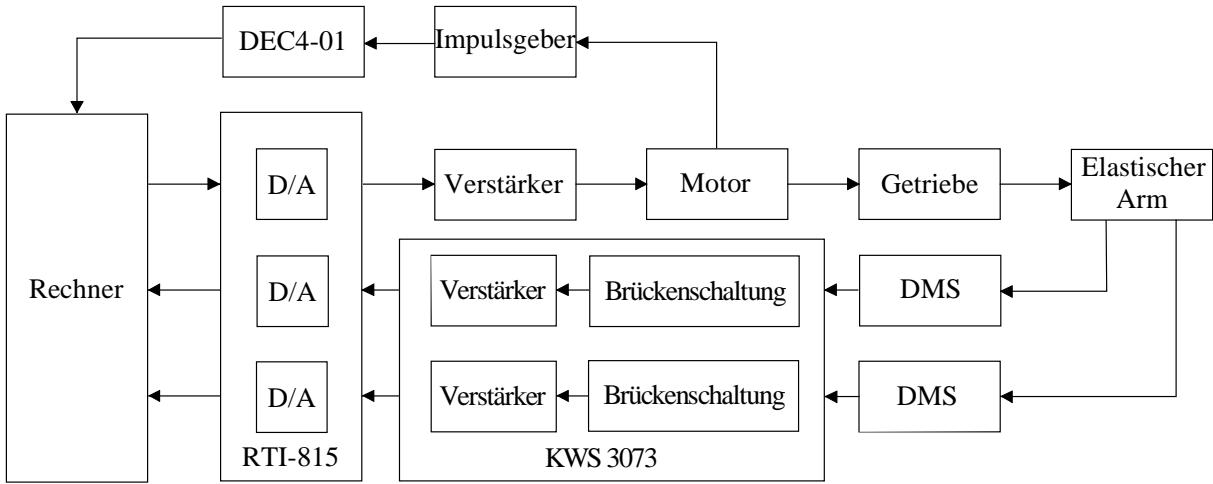


Bild 5.2: Signalfußplan des Prüfstandes

## 5.2 Modellierung des Versuchsträgers

### D/A-Wandler

Der Eingang des D/A-Wandlers ist ein 12 Bit Digitalsignal, der Ausgang eine Analogspannung im Bereich von  $-10$  bis  $+10$  V. Somit wird der D/A-Wandler näherungsweise als ein lineares Element mit der Verstärkung von  $1/204,8$  V/Digit modelliert.

### LC 3002

Der LC 3002 ist in der Betriebsart „Stromregelung“ eingesetzt. Durch Verwendung des Least-Squares-Verfahrens lässt sich ein Modell des LC 3002 aus Messungen wie folgt herleiten:

$$i_a(t) = 0,3846u_a(t) - 0,0072 = 0,3846[u_a(t) - 0,0187] \text{ A.} \quad (5.1)$$

Dabei entspricht  $i_a(t)$  dem Ausgangstrom des LC 3002, seine Eingangsspannung wird mit  $u_a(t)$  bezeichnet.

### Motor

Unter Vernachlässigung der Reibung im Motor wird die Dynamik des Motors durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$k_M i_a(t) = \tau_m(t) + J_m \ddot{\theta}_m(t). \quad (5.2)$$

Hierbei ist  $k_M = 0,04288$  Nm/A die Drehmomentkonstante,  $\tau_m(t)$  ist das Ausgangsmoment des Motors,  $J_m = 6,437 \cdot 10^{-6}$  kg · m<sup>2</sup> entspricht dem Rotorträgheitsmoment und der Drehwinkel des Motors wird mit  $\theta_m(t)$  bezeichnet.

## Getriebe

Für das Getriebe gilt:

$$\tau_1(t)\dot{\theta}_1(t) = \eta_{g1}\tau_m(t)\dot{\theta}_m(t). \quad (5.3)$$

Hierbei sind  $\tau_1(t)$ ,  $\theta_1(t)$  sowie  $\eta_{g1} = 0,7$  das Ausgangsmoment, der Drehwinkel sowie der Wirkungsgrad des Getriebes.  $\dot{\theta}_1(t)$  ist durch das Untersetzungsverhältnis  $n_{g1} = 66$  mit  $\dot{\theta}_m(t)$  verknüpft:

$$\dot{\theta}_m(t) = n_{g1}\dot{\theta}_1(t). \quad (5.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (5.4) in (5.3) ergibt sich

$$\tau_m(t) = \frac{1}{\eta_{g1}n_{g1}}\tau_1(t). \quad (5.5)$$

## Elastischer Arm

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den Roboter ohne Endmasse. Die physikalischen Parameter des Arms sind:

$$l_h = 0,03 \text{ m},$$

$$l = 0,42 \text{ m},$$

$$\rho = 0,285 \text{ kg/m},$$

$$J_h = 0,00002 \text{ kgm}^2,$$

$EI$  wird nachfolgend experimentell ermittelt.

Nach dem Ritz-Ansatz lässt sich die elastische Auslenkung  $w_1(x, t)$  des Arms wie folgt beschreiben

$$w_1(x, t) = \phi_{11}(x)\delta_{11}(t) + \phi_{12}(x)\delta_{12}(t). \quad (5.6)$$

Dabei sind  $\phi_{1i}(x)(i = 1, 2)$  Ansatzfunktionen und es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{1i}(x) &= \cosh(\lambda_{1i}x) - \cos(\lambda_{1i}x) - c_{1i}[\sinh(\lambda_{1i}x) - \sin(\lambda_{1i}x)], \\ c_{1i} &= \frac{\cos(\lambda_{1i}l) + \cosh(\lambda_{1i}l)}{\sin(\lambda_{1i}l) + \sinh(\lambda_{1i}l)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

$\lambda_{1i}$  ( $i = 1, 2$ ) bezeichnen die Kreisfrequenzen der Ansatzfunktionen und sind die Lösung der Gleichung

$$1 + \cos(\lambda_{1i}l) \cosh(\lambda_{1i}l) = 0. \quad (5.8)$$

Mit Hilfe von Gl. (5.6) ergeben sich die Elemente in Gl. (2.1) wie folgt:

$$\begin{aligned} M_{11} &= J_h + \rho \left[ \frac{1}{12} l^3 + l \left( l_h + \frac{l}{2} \right)^2 \right] + \rho l [\delta_{11}^2(t) + \delta_{12}^2(t)], \\ M_{12} &= v_{11}, \\ M_{13} &= v_{12}, \\ M_{22} &= \rho l, \\ M_{23} &= 0, \\ M_{33} &= \rho l, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\rho l \left[ \delta_{11}(t) \dot{\delta}_{11}(t) + \delta_{12}(t) \dot{\delta}_{12}(t) \right] \dot{\theta}_1(t), \\ h_2 &= -\rho l \delta_{11}(t) \dot{\theta}_1^2(t), \\ h_3 &= -\rho l \delta_{12}(t) \dot{\theta}_1^2(t), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} k_{e11} &= \rho l \omega_{11}^2, \\ k_{e12} &= \rho l \omega_{12}^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit

$$\begin{aligned} v_{1i} &= \rho \int_0^l (l_h + x) \phi_{1i}(x) dx, \\ \omega_{1i} &= \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \lambda_{1i}^2, \end{aligned} \quad i = 1, 2. \quad (5.12)$$

Die Biegesteifigkeit  $EI$  des elastischen Arms kann durch die Verwendung der von Fraser und Daniel (1991) vorgestellten experimentellen Methode ermittelt werden: Bei stehendem Motor erfährt das Armende infolge eines manuellen Schlages zuerst eine Auslenkung von 2cm aus der Ruhelage und wird dann losgelassen. Bild 5.3a zeigt die aus den Messungen berechneten freien Schwingungen des Arms und Bild 5.3b die normierte Leistungsspektraldichte  $S_x(f)/\max(S_x(f))$  der Signale. Aus Bild 5.3b kann man die erste Eigenfrequenz der Schwingungen  $f_{11} = 4,2318\text{Hz}$  ablesen. Aus Gl. (5.12) folgt:

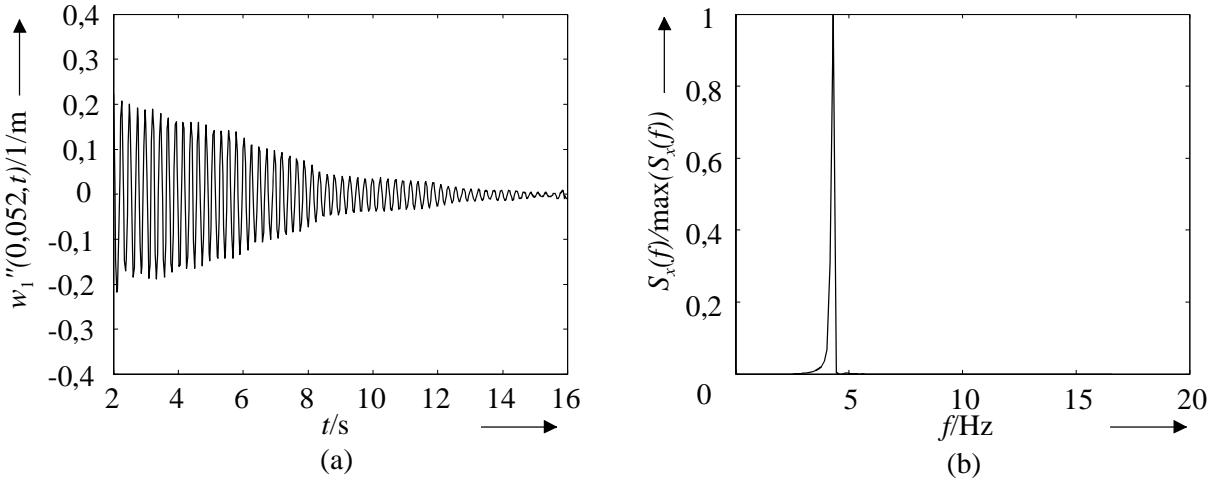
$$EI = \frac{\rho (2\pi f_{11})^2}{\lambda_{11}^4} = 0,5072. \quad (5.13)$$

Im folgenden wird  $EI=0,4158$  gesetzt, weil die mit Hilfe der Rayleigh-Ritz-Methode geschätzte Eigenfrequenz der Schwingung größer ist als die exakte Frequenz.

### Impulsgeber

Die Auflösung des Impulsgebers beträgt 100 Impulse pro Umdrehung. Da der Impulsgeber auf der Motorseite angebracht ist, muß das Getriebe mit der Untersetzung  $n_{g1}$  berücksichtigt werden. Somit ist die Zahl der gesamten Ausgangsimpulse des Impulsgebers  $n_{IG}$  durch

$$\theta_1(t) = \frac{2\pi}{100n_{g1}} n_{IG} \quad (5.14)$$



**Bild 5.3:** Freie Schwingung des Arms (a), (b): normierte Leistungsspektraldichte

mit dem Winkel des Getriebes verknüpft.

### Zählerkarte

Der Zählbereich ist 16Bit und der Zusammenhang zwischen seinem Ausgang \$n\_{ZK}\$ und Eingang lässt sich mit

$$n_{ZK} = 4n_{IG} \quad (5.15)$$

beschreiben.

### Dehnungsmeßstreifen

Da die DMS-Meßsysteme an den zwei Meßstellen identisch sind, sind die Modelle der zu diesen zwei Systemen gehörenden Elemente gleich. Die relative Widerstandsänderung \$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)\_i\$ des DMS ist durch den „\$k\$-Faktor“ \$k\_{DMS} = 2,07\$ des DMS mit der zweiten Ableitung nach der örtlichen Größe der elastischen Durchbiegung \$w\_1(x, t)\$ an der \$i\$-ten Meßstelle verknüpft:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_i = \pm \frac{1}{2} k_{DMS} d \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1(x, t) \Big|_{x=x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (5.16)$$

wobei \$d = 0,001\text{m}\$ die Dicke des Arms ist. Dabei liegt bei positivem Vorzeichen eine positive Dehnung und bei negativem Vorzeichen eine negative Dehnung (Stauchung) vor.

### Brückenschaltung

Die zwei Dehnungsmeßstreifen an der gleichen Meßstelle werden in eine Wheatstone-Brücke geschaltet, mit der man auch kleinste Widerstandsänderungen messen kann. Da

in der DMS-Technik nur sehr kleine Widerstandsänderungen vorliegen und eine Halbbrückenschaltung gewählt wurde, besteht folgender Zusammenhang zwischen Brücken speisespannung  $U_B = 5V$  und Brückenausgangsspannung  $U_{Ai}$ :

$$U_{Ai} = \frac{1}{2} U_B \left( \frac{\Delta R}{R} \right)_i . \quad (5.17)$$

### HBM-Meßverstärker

Der Verstärkungsfaktor des Meßverstärkers beträgt 1000.

### A/D-Wandler

Der Eingang des A/D-Wandlers ist eine Analogspannung im Bereich von  $-10$  bis  $+10V$ , der Ausgang ein 12 Bit Digitalsignal. Somit lässt er sich als ein lineares Element mit der Verstärkung von 204,8 Digit/V darstellen.

### Reibungen

Die im betrachteten Robotersystem auftretende Reibung wird wie folgt dargestellt:

$$M_R = M_{Rv} + M_{RC} . \quad (5.18)$$

Dabei bezeichnet  $M_{Rv}$  die viskose Reibung,  $M_{RC}$  die Coulomb'sche-Reibung. Aus Erfahrungen mit diesem Versuchsträger werden

$$M_{Rv} = 0,1\dot{\theta}_1(t) \text{ und} \quad (5.19)$$

$$M_{RC} = \begin{cases} \text{sign}(\dot{\theta}_1(t))0,14b_m [0,6 + 0,4e^{-0,25|\dot{\theta}_1(t)|}] & \text{für } \dot{\theta}_1(t) \neq 0 \\ \text{sign}(u(t))0,14b_m & \text{für } \dot{\theta}_1(t) = 0 \text{ und } |u_a(t) - 0,0187| > 0,14 \\ b_m u(t) & \text{für } \dot{\theta}_1(t) = 0 \text{ und } |u_a(t) - 0,0187| \leq 0,14 \end{cases} \quad (5.20)$$

mit

$$b_m = 0,3846\eta_{g1}n_{g1}k_M \quad (5.21)$$

gewählt.

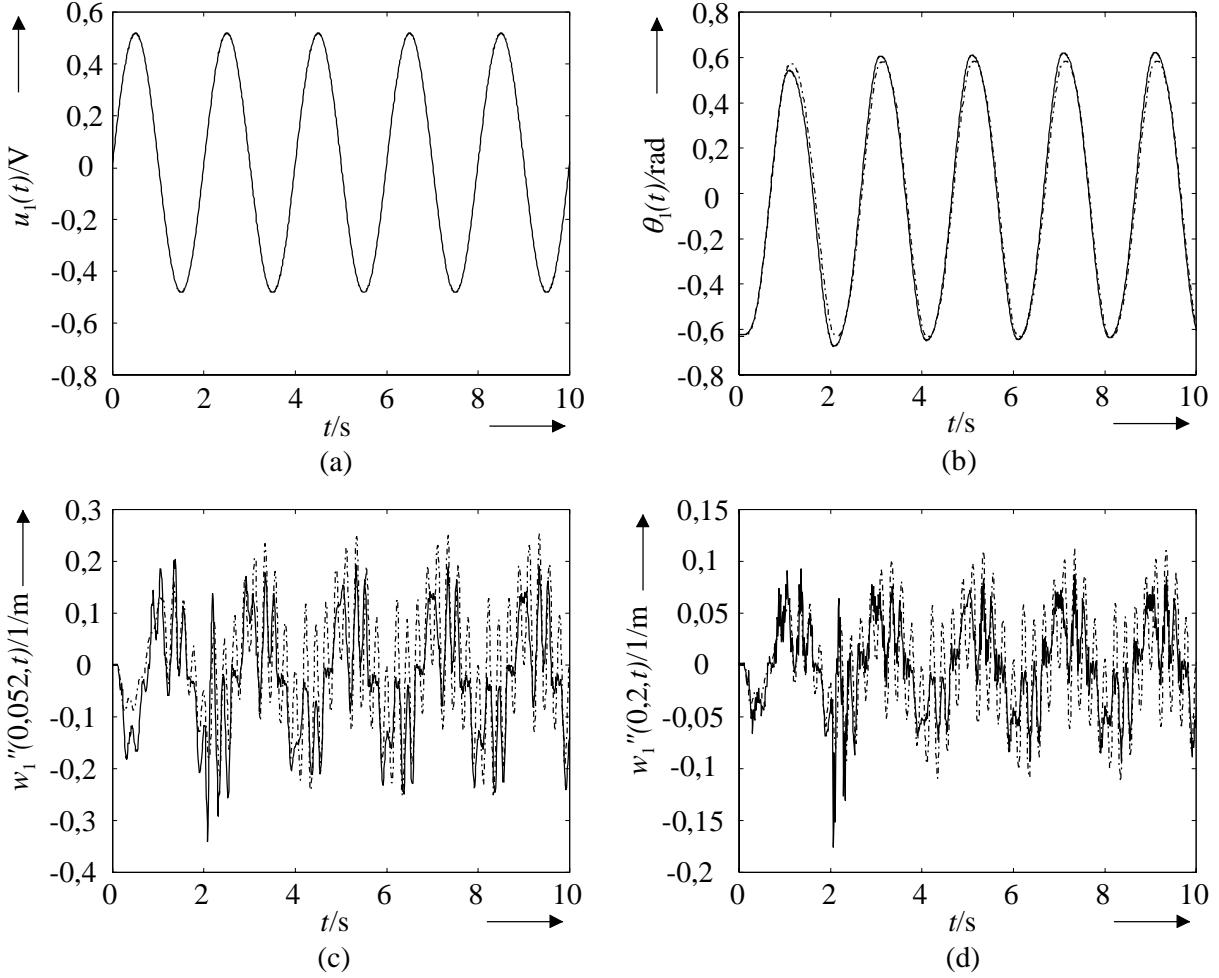
Durch Zusammenfassen der Modelle der einzelnen Elemente ergibt sich das Modell des Versuchsträgers zu:

$$\begin{bmatrix} M_{11} + \eta_{g1}n_{g1}^2J_m & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_{11}(t) \\ \ddot{\delta}_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 + M_R \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{e11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{e12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \delta_{11}(t) \\ \delta_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_a(t) - 0,0187] , \quad (5.22)$$

mit den Meßgleichungen

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{2\pi}{4 \cdot 100 n_{g1}} n_{ZK}, \\ w_1''(0, 052, t) &= -\frac{4}{204,8 \cdot 1000 d k_{DMS} U_B} U_{d1}, \\ w_1''(0, 2, t) &= \frac{4}{204,8 \cdot 1000 d k_{DMS} U_B} U_{d2}.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Dabei bezeichnet  $U_{di}$  ( $i = 1, 2$ ) das durch den  $i$ -ten A/D-Wandler gelieferte digitale Signal.

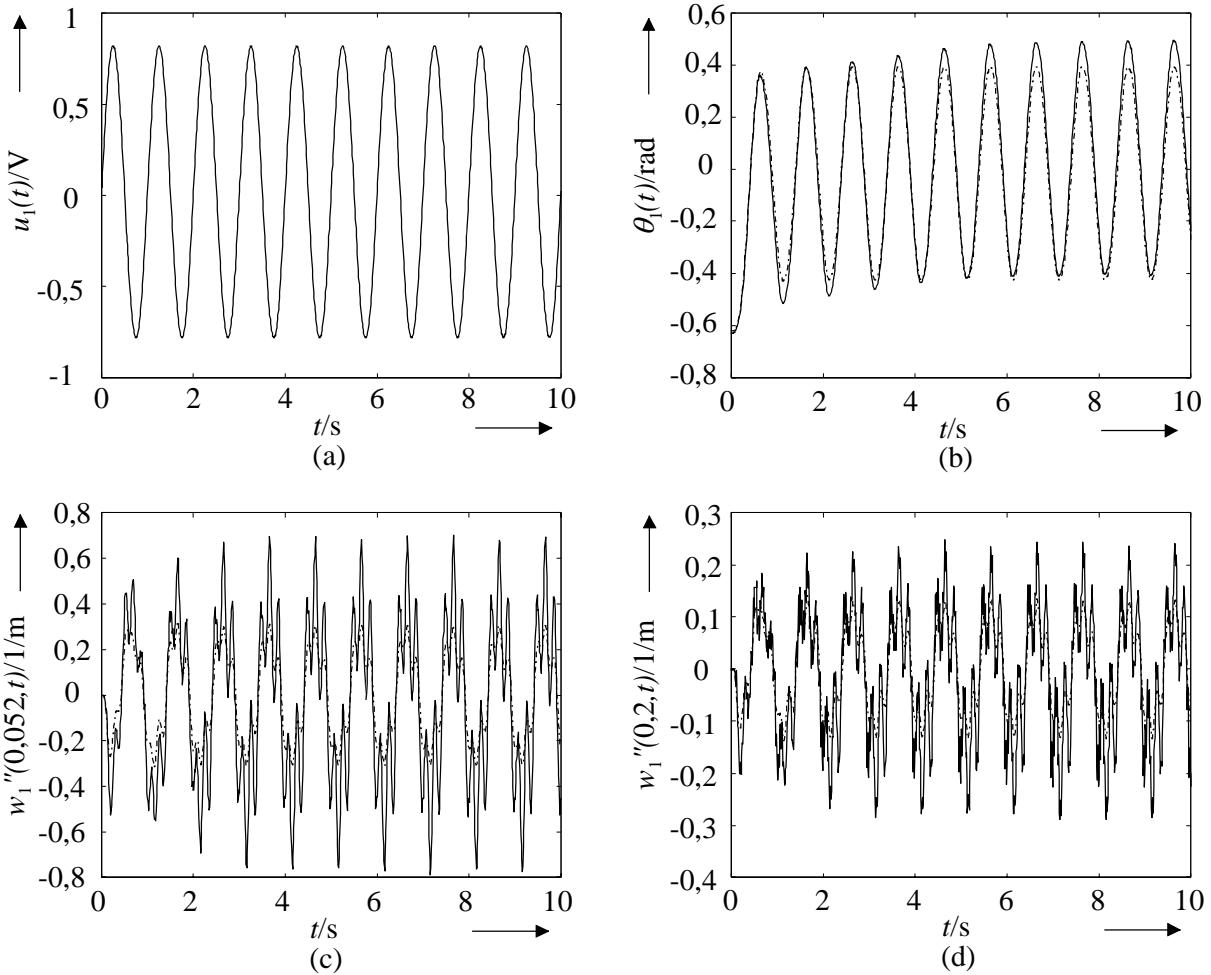


**Bild 5.4:** (a) Eingangsspannung 1; (b) Gelenkwinkel; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052$  m; (d) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2$  m („—“ gemessen; „-·-“ simuliert)

### 5.3 Simulationsstudien

Um die Güte des Modells (5.22) zu überprüfen, wird das Systemmodell mit drei verschiedenen Eingangsspannungen

1.  $u_a(t) = 0,5 \sin(\pi t) + 0,0187$  V,

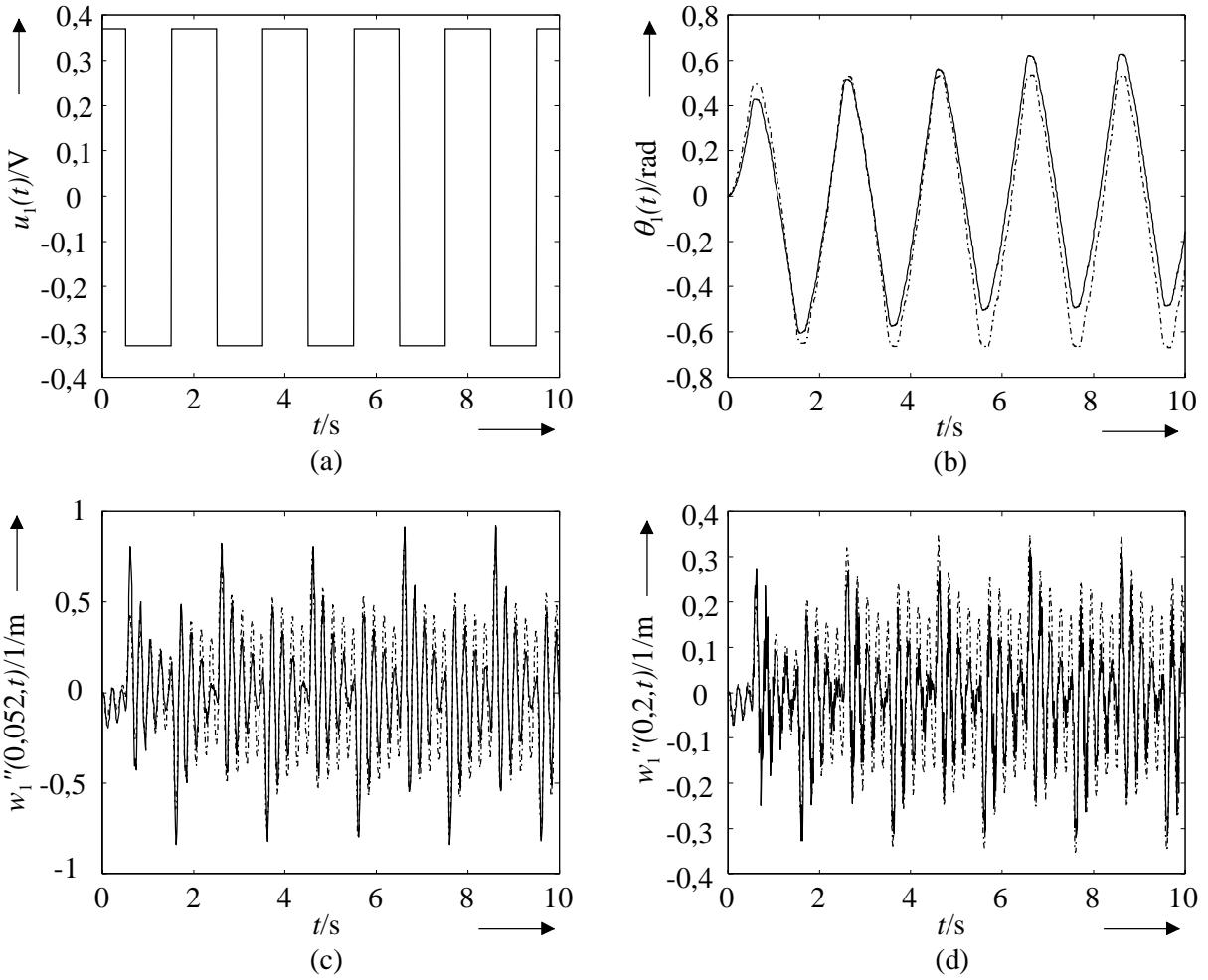


**Bild 5.5:** (a) Eingangsspannung 2; (b) Gelenkwinkel; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052$  m; (d) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2$  m („--“ gemessen; „-·-“ simuliert)

2.  $u_a(t) = 0,8 \sin(2\pi t) + 0,0187$  V,
3.  $u_a(t) = 0,35 \text{square}(\pi(t + 1/2)) + 0,0187$  V

simuliert. In Bild 5.4, 5.5 bzw. 5.6 werden die Simulationsergebnisse mit den am Versuchsträger gemessenen Ausgängen verglichen. Die gemessenen Ausgangsgrößen des Versuchsträgers sind die Gelenkwinkel  $\theta_1(t)$  und die Biegung  $w_1''(x, t)$  am Meßpunkt  $x = 0,052$  m sowie  $x = 0,2$  m.

Es ist zu erkennen, daß das Modell den Versuchsträger mit ausreichender Güte beschreibt. Sowohl die Gelenkwinkel, als auch die Frequenzen der Schwingungen an den zwei Meßstellen stimmen mit den entsprechenden gemessenen Größen gut überein. Die Ursache für die geringen Abweichungen zwischen der simulierten und gemessenen Schwingungsamplitude ist die vernachlässigte Strukturdämpfung. Aus Bild 5.4, 5.5 und 5.6 ist auch der Einfluß des Getriebespiels klar zu erkennen.



**Bild 5.6:** (a) Eingangsspannung 3; (b) Gelenkwinkel; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052 \text{ m}$ ; (d) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2 \text{ m}$  („—“ gemessen; „—·“ simuliert)

#### 5.4 Regelungsergebnisse

In diesem Abschnitt wird das vorgestellte Reglerentwurfsverfahren mit Hilfe des Laborversuchsträgers experimentell verifiziert. Im Hinblick auf das Modell des Versuchsträgers wird der Regler in vier Anteile

$$u_1(t) = u^0(t) + \hat{u}^1(t) + \hat{u}^2(t) + u_R(t) \quad (5.24)$$

aufgespalten. Die ersten drei Anteile sind für die Bahnverfolgungsregelung des Gelenkwinkels und für die Dämpfung der elastischen Schwingungen zuständig, der letzte Anteil  $u_R(t)$  beschreibt die Kompensation der trockenen Reibung und des Offsets des Motorverstärkers. Durch Verwendung des im Abschnitt 3 vorgestellten Reglerentwurfsverfahren folgen

$$u^0(t) = \frac{0,0283}{b_m} \left[ \ddot{\theta}_1^d(t) + \frac{0,1}{0,0283} \dot{\theta}_1(t) - 12(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_1^d(t)) - 36(\theta_1(t) - \theta_1^d(t)) \right], \quad (5.25)$$

$$K_0^* = 1, \quad (5.26)$$

$$K_1^* = [0 \quad -0,3712], \quad (5.27)$$

$$K_2^* = [0 \quad -9,9703]. \quad (5.28)$$

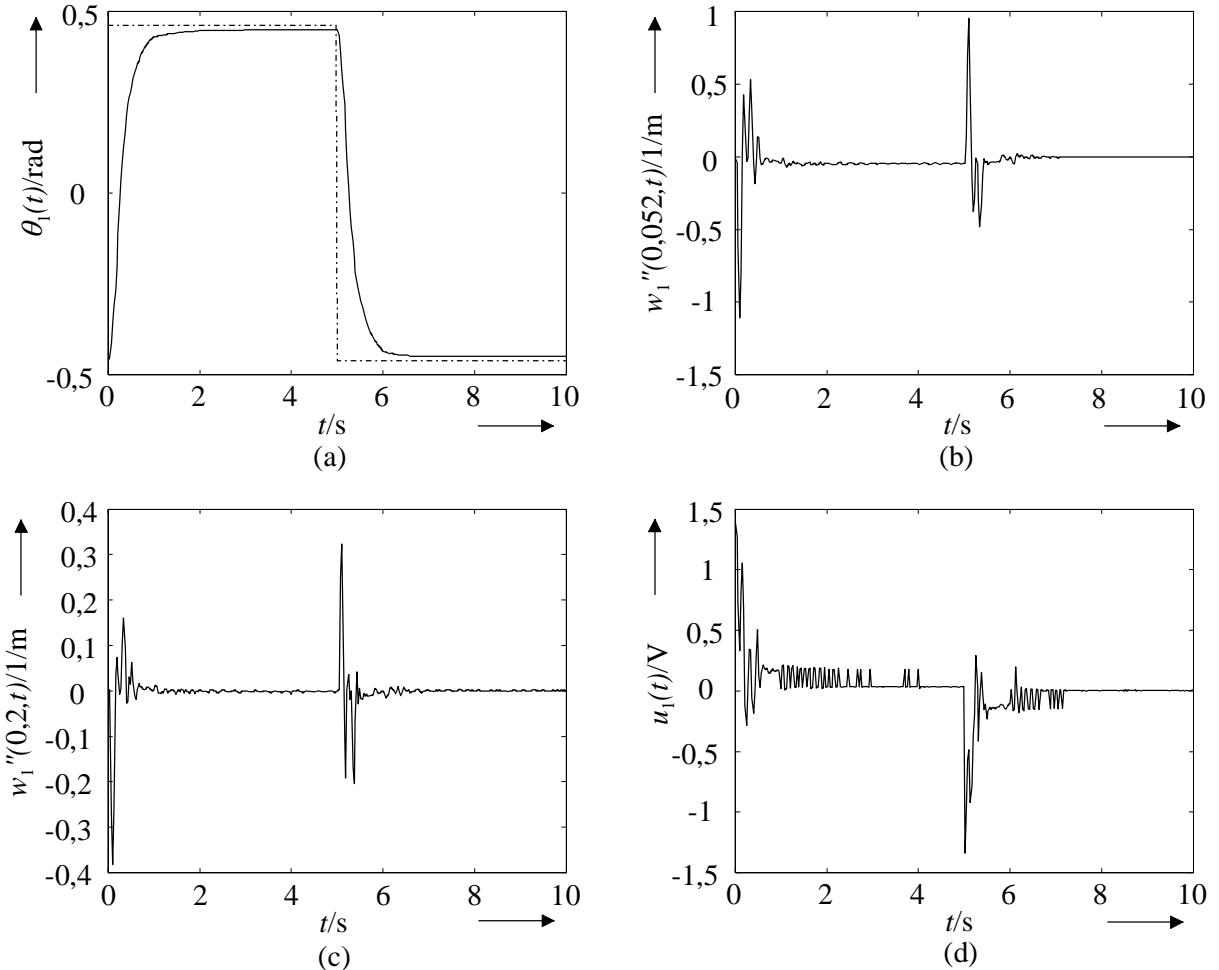
Für  $u_R(t)$  gilt:

$$u_R(t) = M_{RC}/b_m + 0,0187. \quad (5.29)$$

Zur Realisierung des Reglers (5.24) lassen sich  $\delta_{11}(t)$  und  $\delta_{12}(t)$  zu

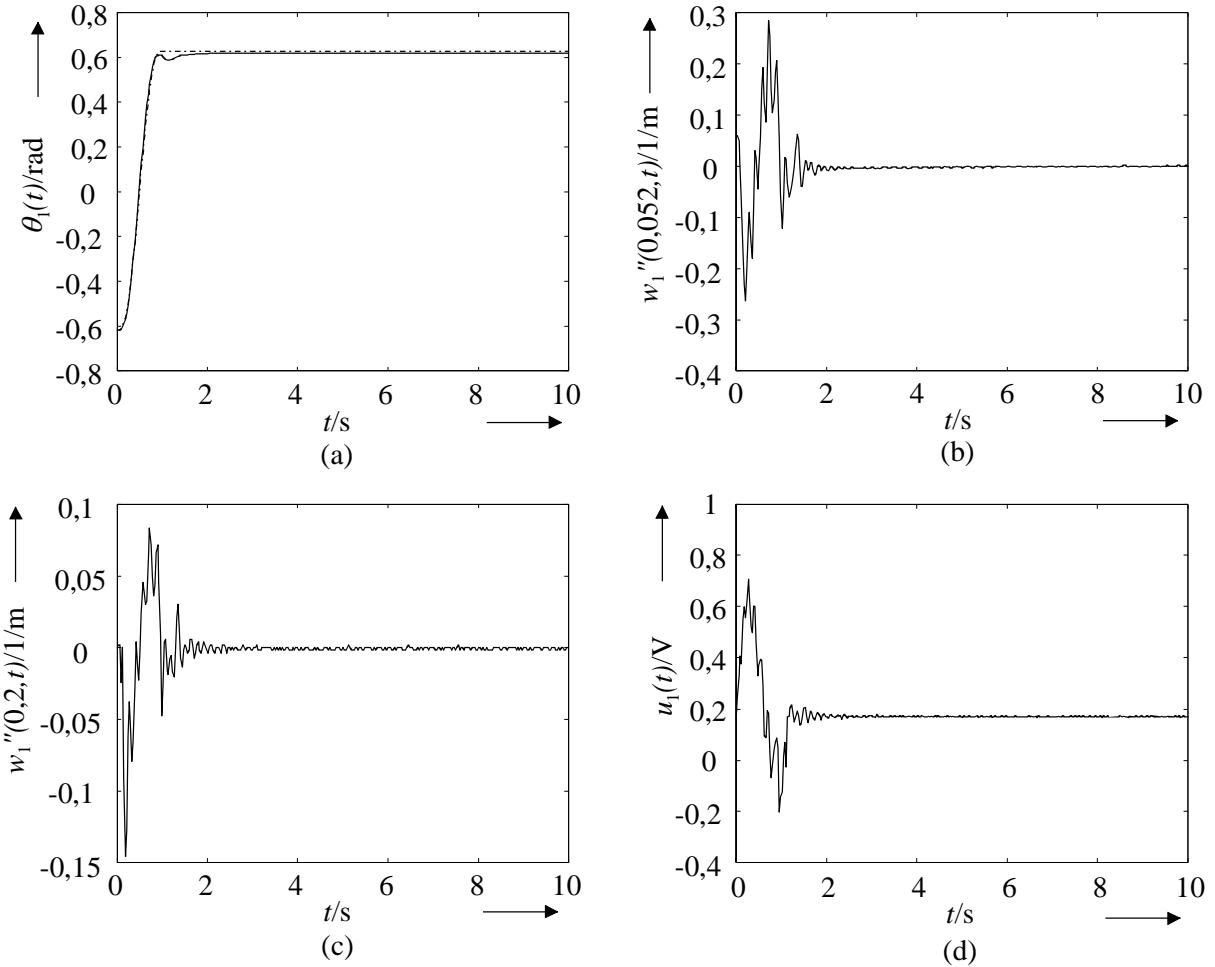
$$\begin{bmatrix} \delta_{11}(t) \\ \delta_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}''(0,052) & \phi_{12}''(0,052) \\ \phi_{11}''(0,2) & \phi_{12}''(0,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1''(0,052,t) \\ w_1''(0,2,t) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

berechnen.  $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\delta}_{11}(t)$  bzw.  $\dot{\delta}_{12}(t)$  werden durch numerische Differentiation von  $\theta_1(t)$ ,  $\delta_{11}(t)$  bzw.  $\delta_{12}(t)$  ermittelt.



**Bild 5.7:** (a) Gelenkwinkel; (b) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052$  m; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2$  m; (d) Eingangsspannung („—“ gemessen; „-·-“ Sollbahn).

Der Regler (5.24) wird am Versuchsträger für drei verschiedenen Sollbahnen angewendet:



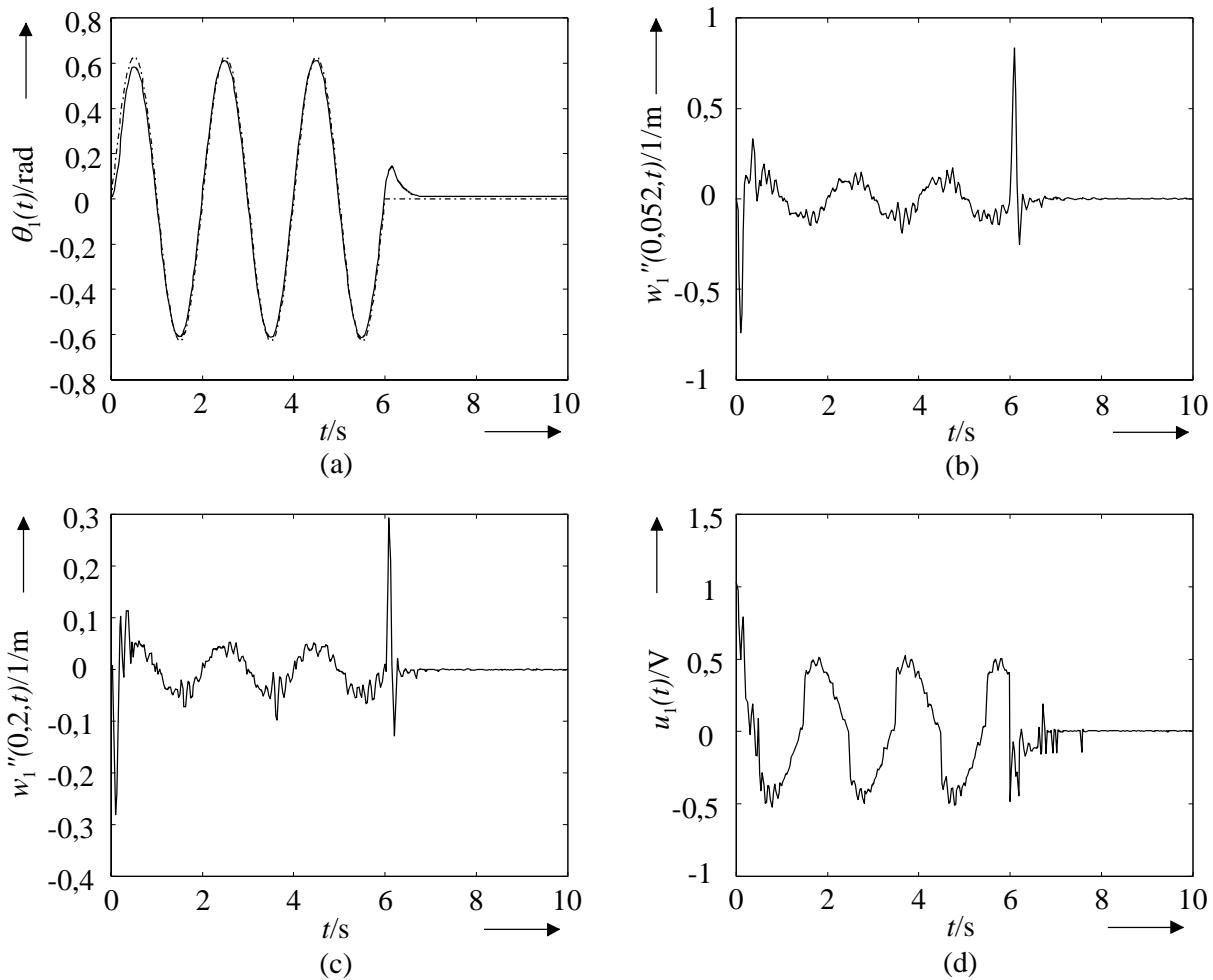
**Bild 5.8:** (a) Gelenkwinkel; (b) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052 \text{ m}$ ; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2 \text{ m}$ ; (d) Eingangsspannung („—“ gemessen; „-·-“ Sollbahn).

1. Sprungfunktion von 1 rad (siehe Bild 5.7a),

$$2. \theta_1^d(t) = \begin{cases} -0,2\pi + 0,4\pi(6t^5 - 15t^4 + 10t^3) & \text{für } t \leq 1 \text{ s}, \\ 0,2\pi & \text{für } t > 1 \text{ s}, \end{cases}$$

$$3. \theta_1^d = \begin{cases} 0,2\pi \sin(\pi t) & \text{für } t \leq 6 \text{ s}, \\ 0 & \text{für } t > 6 \text{ s}. \end{cases}$$

Die experimentellen Ergebnisse sind in Bild 5.7, 5.8 bzw. 5.9 dargestellt. Daraus ist zu erkennen, daß der Regler für die drei Sollbahnen sehr gut funktioniert. Das Gelenk kann den drei Sollbahnen mit hoher Genauigkeit folgen, obwohl die Sollbewegungen sehr schnell sind. Gleichzeitig werden die elastischen Schwingungen gut gedämpft. Die geringen Abweichungen der Stellgröße von Null (s. Bild 5.7d für  $1 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ ) sind auf Rauschen der Meßsignale zurückzuführen.



**Bild 5.9:** (a) Gelenkwinkel; (b) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,052 \text{ m}$ ; (c) Biegung am Meßpunkt  $x = 0,2 \text{ m}$ ; (d) Eingangsspannung („—“ gemessen; „-·-“ Sollbahn).

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Forschungsbericht wird eine Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode zur Regelung von Robotern mit elastischen Armen entwickelt. Hierzu wird das Modell des Roboters zunächst in Multiparameter-Multizeitskalen-Form dargestellt. Anschließend wird ein rekursiver Algorithms zur Dekomposition des Robotersystems mit Hilfe der Multiparameter-Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode vorgestellt. Durch Verwendung des vorgestellten Algorithmus kann man nicht nur die Starrkörperdynamik von der elastischen Dynamik, sondern auch die elastische Dynamik nach verschiedenen Schwingungsfrequenzen trennen. Auf der Basis der resultierenden Teilsysteme wird ein Reglerentwurfsverfahren für Roboter mit elastischen Gliedern angegeben. Die vorgestellte Methode wird sowohl durch Simulationen eines einachsigen und eines zweigliedrigen elastischen Roboterarms, als auch durch experimentelle Studien an einem einachsigen elastischen Roboter verifiziert. Die Ergebnisse zeigen, daß durch Verwendung der vorgestellten Methode der Reglerentwurf für Roboter mit elastischen Armen wesentlich erleichtert wird und der daraus resultierende Regler effektiv ist.

Obwohl die Strukturdämpfung des Armes in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wird, kann die vorgestellte Methode auch direkt für das Modell mit Strukturdämpfung verwendet werden. Außerdem kann die korrigierte Singular-Perturbation-Methode oder das Verfahren mittels Integralmannigfaltigkeit zur Erhöhung der Genauigkeit verwendet werden, wenn die Werte  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) nicht klein genug sind.

Bisher wurde angenommen, daß die Endmasse und das Massenträgheitsmoment des Roboters bekannt ist und unveränderlich während der Bewegung bleibt. Die Erweiterung dieser Arbeit auf die unbekannte oder veränderliche Endmasse kann Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

Der Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

## 7 Literaturverzeichnis

- Analog Devices** 1991. *RTI-800/815 user's manual*. München: Analog Devices, Inc.
- Baruh, H. und S. S. K. Tadikonda**. 1989. Issues in the dynamics and control of flexible robot manipulators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 12. 659–671.
- Benati, M. und A. Morro**. 1994. Formulation of equations of motion for a chain of flexible links using Hamilton's principle. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 81–88.
- Book, W. J.** 1993. Controlled motion in an elastic world. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 115. 252–261.
- Choura, S., S. Jayasuriya und M. A. Medick**. 1991. On the modeling, and open-loop control of a rotating thin flexible beam. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113. 26–33.
- Chow, J. H., J. J. Allemong und P. V. Kokotovic**. 1978. Singular perturbation analysis of systems with sustained high frequency oscillations. *Automatica* 14. 271–279.
- De Luca, A. und B. Siciliano**. 1991. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 21. 826–839.
- De Luca, A. und B. Siciliano**. 1993. Regulation of flexible arms under gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9. 463–467.
- Faulhaber, F.** 1994. *Motoren-Leistung auf kleinstem Raum*. Schönaich: F. Faulhaber GmbH & Co. KG.
- Föllinger, O.** 1994. *Regelungstechnik*. Heidelberg: Hüthig.
- Fraser, A. R. und R. W. Daniel**. 1991. *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Friedland, B.** 1987. *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Gawronski, W., C.-H. C. Ih und S. J. Wang**. 1995. On dynamics and control of multi-link flexible manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117. 134–142.
- Hoffmann, K.** 1987. *Technik des Messens mit Dehnungsmeßstreifen*. Darmstadt: Hottinger Baldwin Meßtechnik GmbH.

- Kokotovic, P., H. K. Khalil und J. O'Reilly.** 1986. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. New York: Academic Press.
- Ladde, G. S. und D. D. Siljak.** 1983. Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales. *Automatica* 14. 385–394.
- Riege, B.** 1996. *Zur Strukturanalyse der Modelle elastischer Handhabungssysteme*. Forschungsbericht Nr. 09/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme*. München: R. Oldenbourg Verlag.
- Siciliano, B. und W. J. Book.** 1988. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 7(4). 79–90.
- Wang, J.** 1996. *Regelung eines zweiachsigen elastischen Roboters*. Forschungsbericht Nr. 17/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Zaad, K. H. und K. Khorasani.** 1996. Control of non-minimum phase singularly perturbed systems with application to flexible-link manipulators. *International Journal of Control* 63. 679–701.