

Modellbildung elastischer Roboter und Eigenwertanalyse

Jianqi Wang

Forschungsbericht Nr. 7/98

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In dem vorliegenden Forschungsbericht wird zuerst eine Übersicht über die Modellbildung elastischer Roboter gegeben. Dann wird die Modellbildung für einen ein- und zweiachsigen elastischen Roboter dargestellt. Die Masse und das Trägheitsmoment der Nutzlast stehen nur explizit in den resultierenden Modellen, sie haben keinen impliziten Einfluß auf die Dynamik. Deshalb sind die Modelle für den Entwurf robuster Regler geeignet. Außerdem werden nicht nur die linearen, sondern auch die nichtlinearen Glieder über die verallgemeinerten elastischen Koordinaten in den entwickelten Modellen beibehalten. Darauf basierend wird durch numerische Analyse der Eigenwerte mehrerer Beispiele verdeutlicht, daß ein elastisches Robotersystem ein System mit Multizeitskalen ist.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	III
1 Einleitung	1
2 Modellbildung eines einachsigen Roboters	4
3 Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters	8
4 Analyse von Eigenwerten elastischer Robotersysteme	11
5 Zusammenfassung und Ausblick	16
6 Literaturverzeichnis	17
Anhang	20
A Elemente des Modells eines zweiachsigen elastischen Roboters	20

Nomenklatur

Vektoren und Matrizen

\mathbf{A}	Systemmatrix
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
$\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{I}_{n \times n}$	$(n \times n)$ -Einheitsmatrix
\mathbf{K}_e	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$	Trägheitsmatrix
$\mathbf{p}_i(x_i, t)$	Ortsvektor eines Punktes des i -ten Armes
\mathbf{Q}	Eingangsbelegungsmatrix
$\mathbf{q}(t)$	Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten
$\Delta \mathbf{q}(t)$	Positionsvektor des linearisierten Modells
\mathbf{q}^0	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten am Arbeitspunkt
$\mathbf{T}_{e1}, \mathbf{T}_{si}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{u}(t)$	Stellvektor
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_i(t)$	i -ter Untervektor von $\mathbf{x}(t)$
$\boldsymbol{\tau}(t)$	Gelenkmomentvektor

Skalare Größen

c_{ij}	Koeffizient von $\phi_{ij}(x_i)$
d_{ij}	Koeffizient von $\dot{\phi}_{ij}(x_i)$
E_k	kinetische Energie
E_p	potentielle Energie
$(EI)_i$	Biegesteifigkeit des i -ten Arms
h_i	i -tes Element von $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$
J_{hi}	Trägheitsmoment der i -ten Radnabe
J_{Li}	nominaler Wert des Trägheitsmoments der Nutzlast
J_p	Trägheitsmoment des Endeffektors
k_{eii}	i -tes diagonales Element von \mathbf{K}_e
L	Lagrange-Funktion
l_i	Länge des i -ten Arms
M_{ij}	i, j -tes Element von $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$
M_{Li}	nominaler Wert der Masse der Nutzlast
m_{hi}	Masse der i -ten Radnabe
m_p	Masse des Endeffektors
n	Anzahl der Gelenke
t	Zeit
$w_i(x_i, t)$	Auslenkung des i -ten Arms
w_{ij}	Modellparameter
x_i	örtliche Veränderliche

z_{ijk}	Modellparameter
$\delta_{ij}(t)$	j -te elastische Koordinate des i -ten Arms
$\theta_i(t)$	i -ter Gelenkwinkel
$\tau_i(t)$	Moment des i -ten Gelenks
λ_{ij}	Frequenz der j -ten Ansatzfunktion des i -ten Arms
λ_{ij}^k	Eigenwerte
ρ_i	Masse pro Längeneinheit des i -ten Arms
$\phi_{ij}(x_i)$	j -te Ansatzfunktion des i -ten Arms
$\phi_{ij0}(x_i)$	Ansatzfunktion
$\omega_{ij}(t)$	Kreisfrequenz der elastischen Schwingung

Operatoren

$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordnung „groß O“
$\mathcal{o}(\cdot)$	Ordnung „klein o“
$\mathbf{p}(\cdot)$	charakteristische Gleichung
$\frac{d}{dt}$	Ableitung nach der Zeit t
$\frac{\partial}{\partial s}$	partielle Ableitung nach s
\sum	Summation
δ_{jk}	Kronecker-Symbol
(\cdot)	Differentiation nach t
$(\cdot)'$	Differentiation nach x_i

Mengen

\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
--------------	--------------------------

1 Einleitung

Um den Wirkungsgrad eines Roboters bezüglich Nutzlast und Eigengewicht zu verbessern, können Roboter in Leichtbauweise gebaut werden. Das führt zu strukturellen Elastizitäten des Robotersystems, die in manchen Fällen, z. B. bei Putzrobotern, auch erwünscht sind. Da die Elastizitäten des Robotersystems großen Einfluß auf dessen Dynamik haben, müssen sie bei der Modellbildung berücksichtigt werden.

In der Literatur wird momentan eine Vielzahl von Berichten zum Thema Modellbildung elastischer Roboter veröffentlicht (Ackermann 1989, Bai 1996, Bernzen u. a. 1998, Book 1984, De Luca und Siciliano 1991, Hiller 1996, Yurkovich und Tzes 1990, Tzes und Yurkovich 1991). Davon gibt es aber nur verhältnismäßig wenige Beiträge zum Themenbereich experimenteller Modellbildung durch Parameteridentifikation (Yurkovich und Tzes 1990, Tzes und Yurkovich 1991) und numerischer Modellbildung mit Hilfe von Programmsystemen zur Simulation (Bernzen u. a. 1998, Hiller 1996). Die meisten Arbeiten behandeln die analytische Modellbildung elastischer Roboter.

Durch Unterteilung der einzelnen Körper in endliche Abschnitte, die mit geeigneten Federkräften und -momenten miteinander verbunden sind, hat Ackermann (1989) das Modellbildungsverfahren für starre Roboter direkt auf Systeme mit elastischen Körpern übertragen. Ein solches Vorgehen wäre als verallgemeinertes „diskretes Massenmodell“ („lumped mass model“) zu verstehen. Verallgemeinert deswegen, da die Trägheitseigenschaften der Einzelbauteile mit in die Betrachtung eingehen. Auf diese Weise wird das elastische Mehrkörpersystem (MKS) vollständig als starres Mehrkörpersystem abgebildet. Derartige Methoden, von denen in den sechziger Jahren vor allem für Raumfahrtanwendungen häufig Gebrauch gemacht wurde, haben sich jedoch kaum bewährt. Der Grund ist zum einen, daß im allgemeinen eine große Zahl von Freiheitsgraden berücksichtigt werden muß, dagegen sind z. B. bei Balkensystemen die Balkendynamik durch Bernoulli bekannt und daher werden wenige Variablen benötigt. Zum anderen wird die Balkendynamik ohnedies benötigt, um die Federparameter zu bestimmen. Es gibt jedoch kritische Fälle, bei denen die Parameterzuordnung nicht eindeutig ist.

Da die Geometrie der betrachteten elastischen Roboter einfache Berechnungen zuläßt, werden die elastischen Arme häufig als Ganzes betrachtet. Die Arbeiten zu diesen Themenbereichen unterscheiden sich in den folgenden Themengebieten: Beschreibung der kinematischen Größen, Diskretisierungsverfahren, Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichung. In den Arbeiten von Book (1984) und De Luca und Siciliano (1991) wird die elastische Deformation in einem körperfesten Koordinatensystem definiert. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt am eingespannten Ende im Schwerpunkt des Querschnitts befindet und dessen x -Achse in Richtung der Längsachse des unverformten Balkens weist. In diesem Fall haben die kinematischen Größen physikalische Bedeutung. Das resultierende Modell ist aber kompliziert. Zur Verringerung der Kompliziertheit des Modells werden

verschiedene körperfeste Koordinatensysteme definiert. In Sunada und Dubowsky (1983) und Gawronski u. a. (1995) wird das körperfeste Koordinatensystem des entsprechenden starren Roboters ausgewählt. Chang und Hamilton (1991) und Giovagnoni (1994) haben das körperfeste Koordinatensystem als das eines äquivalent starren Roboters (Equivalent Rigid Link System) definiert. Die x -Achse des von Benati und Morro (1994) definierten körperfesten Koordinatensystems weist in Richtung der Gerade durch die zwei Ränder (virtual rigid link). Außerdem haben Benati und Morro (1994) die starre Bewegung direkt im Inertialkoordinatensystem definiert. In Simo und Vu-Quoc (1986) wird die elastische Deformation direkt im Inertialkoordinatensystem definiert. Der Ursprung des von Baruh und Tadikonda (1989) definierten körperfesten Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Arms.

Der Gestaltung entsprechend kann ein elastischer Arm als Euler-Bernoulli-Balken ohne oder mit Längsdehnung (De Luca und Siciliano 1991, Fraser und Daniel 1991, Choura u. a. 1991), als Rayleigh-Bernoulli-Balken (Choura u. a. 1991) oder als Timoshenko-Balken (Naganathan und Soni 1988) betrachtet werden. Für kleine elastische Verformungen genügt die lineare elastische Theorie (Book 1984, Cannon und Schmitz 1984, De Luca und Siciliano 1991, Fraser und Daniel 1991, Choura u. a. 1991). Zur Modellierung elastischer Roboter mit einer großen Auslenkung soll aber die nichtlineare elastische Theorie verwendet werden (Hu und Ulsoy 1994, Kane u. a. 1987, Simo und Vu-Quoc 1987).

Zur Diskretisierung der elastischen Auslenkung wird die Modalanalyse-Methode (Barbieri und Özgüner 1988, Fraser und Daniel 1991), das Ritz-Verfahren (De Luca und Siciliano 1991, Fraser und Daniel 1991), das Galerkinsche Verfahren (Barbieri und Özgüner 1988), die Finite-Element-Methode (Jonker 1990, Naganathan und Soni 1988) und die Kantorovich'sche Methode (Benati und Morro 1994) verwendet. Das dynamische Modell eines elastischen Roboters kann beispielsweise mit Hilfe des Hamiltonprinzips (Barbieri und Özgüner 1988, Benati und Morro 1994), des Lagrange-Verfahrens (De Luca und Siciliano 1991), der Newton-Euler-Methode (Fukuda 1985, Sakawa u. a. 1985) oder der Kane'schen Gleichung (Kane u. a. 1987) aufgestellt werden.

Trotz der umfangreichen Arbeiten werden nur wenige Modelle mehrachsiger elastischer Roboter in der Literatur explizit angegeben. De Luca und Siciliano (1991) und Bai (1996) haben zwei explizite dynamische Modelle für einen zweiachsigen elastischen Roboter angegeben. Bei der Herleitung ihrer Modelle haben sie die Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten elastischen Balkens, an dessen Ende eine Nutzlast befestigt ist, als Ansatzfunktionen gewählt. Die Masse und das Trägheitsmoment der Nutzlast stehen nicht nur explizit in dem Modell, sondern haben auch implizit Einfluß auf die Dynamik durch die Ansatzfunktionen. Deshalb sind ihre Modelle nicht für den robusten Reglerentwurf geeignet. In der vorliegenden Arbeit wird die Modellbildung für einen ein- und zweiachsigen elastischen Roboter zunächst ausführlich dargestellt, da diese Ro-

boter später als Beispiel verwendet werden. Bei der Herleitung der Modelle werden auch die Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten elastischen Balkens, an dessen Ende eine Nutzlast befestigt ist, als Ansatzfunktionen gewählt. Diesmal werden aber nur die nominalen Werte der Masse und des Trägheitsmoments der Nutzlast verwendet. Anschließend wird die Eigenschaft der Polstellen des linearisierten Modells elastischer Roboter anhand mehrerer Beispiele analysiert. Mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf Ziele zukünftiger Forschungen schließt der Bericht ab.

2 Modellbildung eines einachsigen Roboters

Ein einfaches Beispiel für einen elastischen Roboter ist, der in Bild 2.1 skizzierte, einachsige Roboter. Der homogene elastische Arm bewegt sich in der horizontalen Ebene. $(EI)_1$, ρ_1 und l_1 bezeichnen die konstanten Werte von Biegesteifigkeit, Masse pro Längeneinheit und Länge des Arms. J_{h1} ist das Trägheitsmoment der Radnabe, $\tau_1(t)$ das Moment des Gelenks. Die Masse und das Trägheitsmoment der Nutzlast werden mit m_p und J_p dargestellt. Als Koordinatensysteme bieten sich das Inertialkoordinatensystem $\hat{O}_0\text{-}\hat{X}_0\hat{Y}_0$ und

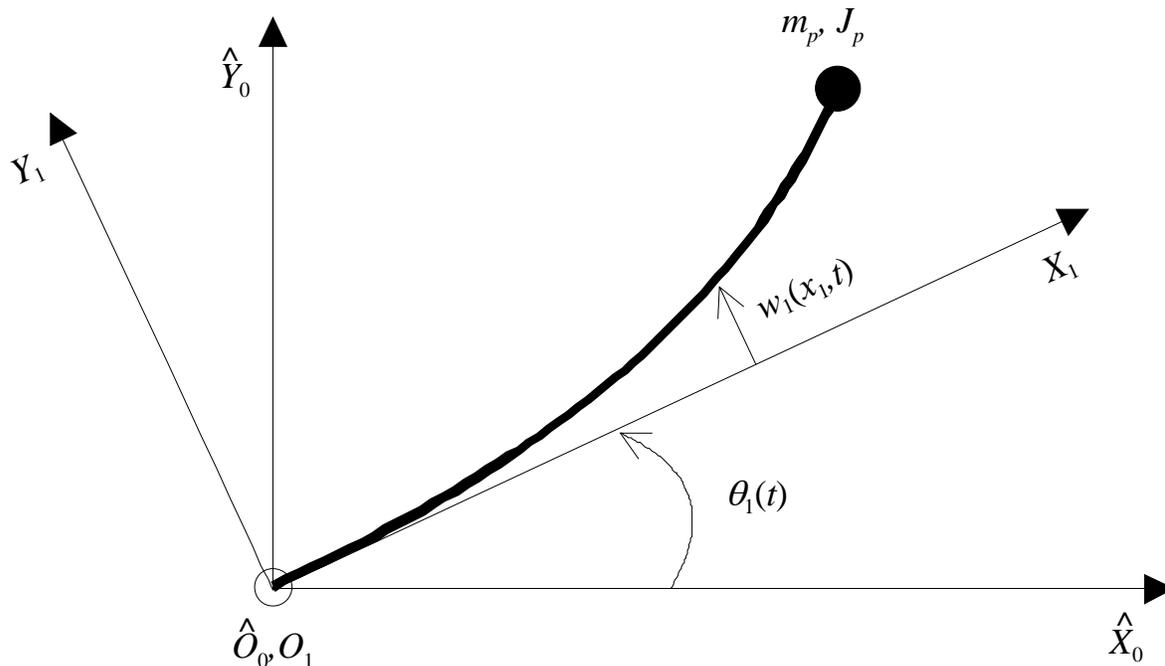


Bild 2.1: Einachsiger elastischer Roboter

das körperfeste Koordinatensystem $O_1\text{-}X_1Y_1$ an. Durch die orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{s1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t)) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ist das körperfeste Koordinatensystem mit dem Inertialkoordinatensystem verknüpft, dabei ist $\theta_1(t)$ der Gelenkwinkel.

Unter der Annahme, daß die Verformung des elastischen Arms nur durch reine Biegung $w_1(x_1, t)$ hervorgerufen wird, die sich in der horizontalen Ebene befindet und es sich bei dem Arm um einen Euler-Bernoulli-Balken handelt, läßt sich der Ortsvektor $\mathbf{p}_1(x_1, t)$ eines Punktes des Arms an der Stelle x_1 zum Zeitpunkt t mit Hilfe dieser orthogonalen Transformationsmatrix als

$$\mathbf{p}_1(x_1, t) = \mathbf{T}_{s1} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1(x_1, t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

im Inertialkoordinatensystem darstellen. Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{p}}_1(x_1, t) = \begin{bmatrix} -x_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - w_1(x_1, t) \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - \dot{w}_1(x_1, t) \sin \theta_1(t) \\ x_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - w_1(x_1, t) \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + \dot{w}_1(x_1, t) \cos \theta_1(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Mit „ $\dot{}$ “ und „ $'$ “ werden die Differentiation nach t und x_1 jeweils bezeichnet. Die gesamte kinetische Energie E_k und die potentielle Energie E_p werden berechnet zu

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} J_{h1} \dot{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 \dot{\mathbf{p}}_1^T(x_1, t) \dot{\mathbf{p}}_1(x_1, t) dx_1 + \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{p}}_1^T(l_1, t) \dot{\mathbf{p}}_1(l_1, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} J_p \left[\dot{\theta}_1(t) + \dot{w}'_1(l_1, t) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$E_p = \frac{1}{2} (EI)_1 \int_0^{l_1} w_1''(x_1, t) dx_1. \quad (2.5)$$

Unter Verwendung des Ritz'schen Ansatzes gilt hierbei (Barbieri und Özgüner 1988):

$$w_1(x_1, t) = \sum_{j=1}^2 \phi_{1j}(x_1) \delta_{1j}(t), \quad (2.6)$$

wobei $\phi_{1j}(x_1)$, $j = 1, 2$ die gegebene Ansatzfunktionen und $\delta_{1j}(t)$, $j = 1, 2$ die verallgemeinerten elastischen Koordinaten sind. Hier werden nur zwei Ansatzfunktionen berücksichtigt. Als Ansatzfunktionen werden die Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten Balkens, an dessen Ende eine Nutzlast befestigt ist, gewählt. Diese sind

$$\begin{aligned} \phi_{1j}(x_1) &= d_{1j} \{ \cosh(\lambda_{1j} x_1) - \cos(\lambda_{1j} x_1) - c_{1j} [\sinh(\lambda_{1j} x_1) - \sin(\lambda_{1j} x_1)] \} \\ &=: d_{1j} \phi_{1j0}(x_1), \quad j = 1, 2, \\ d_{1j} &= \sqrt{\frac{\rho_1 l_1}{\int_0^{l_1} \rho_1 \phi_{1j0}^2(x_1) dx_1 + M_{L1} \phi_{1j0}^2(l_1) + J_{L1} [\phi'_{1j0}(l_1)]^2}}, \\ c_{1j} &= \frac{[\cos(\lambda_{1j} l_1) + \cosh(\lambda_{1j} l_1)] - \frac{J_{L1} \lambda_{1j}^3}{\rho_1} [\sin(\lambda_{1j} l_1) + \sinh(\lambda_{1j} l_1)]}{[\sin(\lambda_{1j} l_1) + \sinh(\lambda_{1j} l_1)] - \frac{J_{L1} \lambda_{1j}^3}{\rho_1} [-\cos(\lambda_{1j} l_1) + \cosh(\lambda_{1j} l_1)]}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit den Werten für λ_{1j} , die sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{M_{L1} J_{L1} \lambda_{1j}^4}{\rho_1^2} \right) &+ \left(1 - \frac{M_{L1} J_{L1} \lambda_{1j}^4}{\rho_1^2} \right) \cos(\lambda_{1j} l_1) \cosh(\lambda_{1j} l_1) \\ &- (M_{L1} + J_{L1} \lambda_{1j}^2) \frac{\lambda_{1j}}{\rho_1} \sin(\lambda_{1j} l_1) \cosh(\lambda_{1j} l_1) \\ &+ (M_{L1} - J_{L1} \lambda_{1j}^2) \frac{\lambda_{1j}}{\rho_1} \cos(\lambda_{1j} l_1) \sinh(\lambda_{1j} l_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ergeben. Da die tatsächlichen Werte der Masse und des Trägheitsmoments der Nutzlast im allgemeinen im voraus unbekannt oder veränderlich während der Durchführung einer Handhabungsaufgabe sind, werden deren nominalen Werte, die mit M_{L1} und J_{L1} bezeichnet werden, hierbei verwendet. Für die Ansatzfunktionen gelten die Orthogonalitätsbeziehungen (Fraser und Daniel 1991):

$$\int_0^{l_1} \rho_1 \phi_{1j}(x_1) \phi_{1k}(x_1) dx_1 + M_{L1} \phi_{1j}(l_1) \phi_{1k}(l_1) + J_{L1} \phi'_{1j}(l_1) \phi'_{1k}(l_1) = \rho_1 l_1 \delta_{jk}, \quad (2.9)$$

$$\int_0^{l_1} (EI)_1 \phi''_{1j}(x_1) \phi''_{1k}(x_1) dx_1 = \rho_1 l_1 \omega_{1j}^2 \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2. \quad (2.10)$$

Hierbei ist δ_{jk} das Kronecker-Symbol. Mit ω_{1j} werden die Eigenkreisfrequenzen der j -ten Eigenschwingung bezeichnet und es gilt

$$\omega_{1j} = \sqrt{\frac{EI_1}{\rho_1}} \lambda_{1j}^2. \quad (2.11)$$

Mit $L = E_k - E_p$ ergeben sich die Lagrange-Gleichungen 2. Art für den elastischen Roboter zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1(t)} &= \tau_1(t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_{1j}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_{1j}(t)} &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aus dem Einsetzen von (2.3) bis (2.6) in (2.12) und durch Verwendung der Gl. (2.10) folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} M_{00}(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \ddot{\theta}_1(t) + \sum_{j=1}^2 M_{0j} \ddot{\delta}_{1j}(t) \\ + h_0(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)) &= \tau_1(t), \\ M_{i0} \ddot{\theta}(t) + \sum_{j=1}^2 M_{ij} \ddot{\delta}_{1j}(t) + h_i(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t)) + k_{ii} \delta_{ii}(t) &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit

$$\begin{aligned} M_{00}(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) &= J_{h1} + \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + m_p l_1^2 + J_p + \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 z_{1ij} \delta_{1j}(t) \right] \delta_{1i}(t) \\ &+ m_p \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \delta_{1i}(t) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$M_{0i} = w_{1i} + m_p l_1 \phi_{1i}(l_1) + J_p \phi'_{1i}(l_1), \quad i = 1, 2, \quad (2.15)$$

$$M_{ij} = z_{1ij} + m_p \phi_{1i}(l_1) \phi_{1j}(l_1) + J_p \phi'_{1i}(l_1) \phi'_{1j}(l_1), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.16)$$

$$M_{ij} = M_{ji}, \quad i = 1, 2; j = 0, 1, \dots, i-1, \quad (2.17)$$

$$h_0(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 z_{1ij} \delta_{1j}(t) \right] \dot{\delta}_{1i}(t) + m_p \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \delta_{1i}(t) \right] \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \dot{\delta}_{1i}(t) \right] \right\} \dot{\theta}_1(t), \quad (2.18)$$

$$h_i(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t)) = - \sum_{j=1}^2 [z_{1ij} + m_p \phi_{1i}(l_1) \phi_{1j}(l_1)] \delta_{1j}(t) \dot{\theta}_1^2(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.19)$$

$$k_{ii} = \rho_1 l_1 \omega_{1i}^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.20)$$

$$w_{1i} = \rho_1 \int_0^{l_1} x_1 \phi_{1i}(x_1) dx_1, \quad i = 1, 2, \quad (2.21)$$

$$z_{1ij} = \rho_1 \int_0^{l_1} \phi_{1i}(x_1) \phi_{1j}(x_1) dx_1, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.22)$$

3 Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters

Bild 3.1 skizziert den schematischen Aufbau eines Roboters, der aus zwei sich in einer horizontalen Ebene bewegenden homogenen elastischen Armen besteht. Die Arme sind so gestaltet, daß die Verformung des i -ten elastischen Arms nur durch reine Biegung $w_i(x_i, t)$

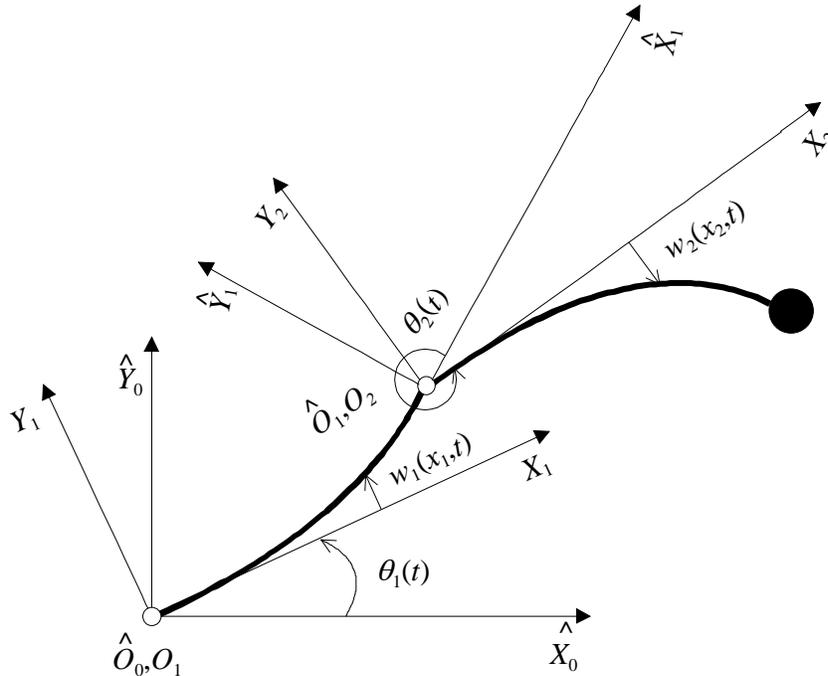


Bild 3.1: Zweiachsiger elastischer Roboter

hervorgerufen wird, die sich in der horizontalen Ebene befindet und es sich bei den Armen um Euler-Bernoulli-Balken handelt. Die physikalischen Parameter des Roboters stellen sich wie folgt dar:

- l_i Länge des i -ten Arms,
- ρ_i Masse pro Längeneinheit des i -ten Arms,
- $(EI)_i$ Biegesteifigkeit des i -ten Arms,
- m_{hi} Masse der i -ten Radnabe,
- J_{hi} Trägheitsmoment der i -ten Radnabe,
- m_p Masse der Nutzlast,
- J_p Trägheitsmoment der Nutzlast.

Zur Bestimmung der Lage des Roboters werden die folgenden Koordinatensysteme eingeführt:

- das Inertialkoordinatensystem $\hat{O}_0\text{-}\hat{X}_0\hat{Y}_0$,
- die körperfesten Koordinatensysteme $O_i\text{-}X_iY_i$ ($i = 1, 2$),
- das mit dem ersten Armende verbundene Koordinatensystem $\hat{O}_1\text{-}\hat{X}_1\hat{Y}_1$.

Die Koordinatensysteme $O_i-X_iY_i$ ($i = 1, 2$) sind durch die orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{si} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i(t)) & -\sin(\theta_i(t)) \\ \sin(\theta_i(t)) & \cos(\theta_i(t)) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

mit $\hat{O}_{i-1}-\hat{X}_{i-1}\hat{Y}_{i-1}$ verknüpft. Dabei ist $\theta_i(t)$ der i -te Gelenkwinkel. Unter der Annahme, daß die elastischen Verformungen klein sind, erfolgt der Übergang von dem Koordinatensystem $\hat{O}_1-\hat{X}_1\hat{Y}_1$ ins $O_1-X_1Y_1$ mittels

$$\mathbf{T}_{e1} = \begin{bmatrix} 1 & -w'_1(l_1, t) \\ w'_1(l_1, t) & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Mit Hilfe dieser Transformationsmatrizen läßt sich der Ortsvektor $\mathbf{p}_1(x_1, t)$ eines Punktes des ersten Armes an der Stelle x_1 zum Zeitpunkt t im Inertialkoordinatensystem wie folgt darstellen:

$$\mathbf{p}_1(x_1, t) = \mathbf{T}_{s1} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1(x_1, t) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Der Ortsvektor $\mathbf{p}_2(x_2, t)$ eines Punktes des zweiten Armes an der Stelle x_2 zum Zeitpunkt t im Inertialkoordinatensystem lautet

$$\mathbf{p}_2(x_2, t) = \mathbf{T}_{s1} \left\{ \begin{bmatrix} l_1 \\ w_1(l_1, t) \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{e1} \mathbf{T}_{s2} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_2(x_2, t) \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.4)$$

Die gesamte kinetische Energie E_k und die potentielle Energie E_p werden zu

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} J_{h1} \dot{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 \dot{\mathbf{p}}_1^T(x_1, t) \dot{\mathbf{p}}_1(x_1, t) dx_1 + \frac{1}{2} m_{h2} \dot{\mathbf{p}}_1^T(l_1, t) \dot{\mathbf{p}}_1(l_1, t) \\ &+ \frac{1}{2} J_{h2} \left[\dot{\theta}_1(t) + \dot{w}'_1(l_1, t) + \dot{\theta}_2(t) \right]^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 \dot{\mathbf{p}}_2^T(x_2, t) \dot{\mathbf{p}}_2(x_2, t) dx_2 \\ &+ \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{p}}_2^T(l_2, t) \dot{\mathbf{p}}_2(l_2, t) + \frac{1}{2} J_p \left[\dot{\theta}_1(t) + \dot{w}'_1(l_1, t) + \dot{\theta}_2(t) + \dot{w}'_2(l_2, t) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

und

$$E_p = \frac{1}{2} (EI)_1 \int_0^{l_1} w_1''(x_1, t) dx_1 + \frac{1}{2} (EI)_2 \int_0^{l_2} w_2''(x_2, t) dx_2 \quad (3.6)$$

berechnet. Nach dem Ritz-Ansatz können die elastischen Auslenkungen $w_i(x_i, t)$ ($i = 1, 2$) diskretisiert werden (Barbieri und Özgüner 1988):

$$w_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^2 \phi_{ij}(x_i) \delta_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.7)$$

wobei $\phi_{ij}(x_i)$, ($i, j = 1, 2$) die gegebenen Ansatzfunktionen und $\delta_{ij}(t)$ die verallgemeinerten elastischen Koordinaten sind. Hier werden nur zwei Ansatzfunktionen für jeden Arm berücksichtigt. Als Ansatzfunktionen werden die mit den Gl. (2.7)-(2.8) dargestellten

Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten Balkens, an dessen Ende eine Nutzlast mit der Masse M_{Li} und dem Trägheitsmoment J_{Li} befestigt ist, gewählt.

Die Differentialgleichungen des elastischen Handhabungssystems werden nun mit Hilfe der Gl. (2.12) ermittelt. Die resultierenden Bewegungsgleichungen werden in Matrixform dargestellt

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{K}_e \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}(t). \quad (3.8)$$

Dabei ist $\mathbf{q}(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \delta_{21}(t), \delta_{22}(t)]^T$ der Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten, $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) = [M_{ij}(\mathbf{q}(t)), i, j = 1, 2, \dots, 6]$ die positiv definite, symmetrische Trägheitsmatrix, $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = [h_1(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)), h_2(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)), \dots, h_6(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))]^T$ der Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte, $\mathbf{K}_e = \text{diag}\{0, 0, k_{e33}, k_{e44}, k_{e55}, k_{e66}\}$ die Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{Q} = [\mathbf{I}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 4}]^T$ die Eingangsbelegungsmatrix und $\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t)]^T$ der Gelenkmomentvektor.

Die Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$, \mathbf{K}_e und der Vektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ wurden mit Hilfe des Programmsystems MAPLE[®], einem Computer Algebra System (Char u. a. 1993), berechnet und sind im Anhang A angegeben.

4 Analyse von Eigenwerten elastischer Robotersysteme

Betrachtet wird ein elastischer Roboter, der aus n elastischen Armsegmenten besteht, die miteinander durch rotatorische Gelenke in Reihe verbunden werden. Wir beschränken uns auf einen sich nur in der horizontalen Ebene bewegendem Roboter. Das Moment des i -ten Gelenks wird mit $\tau_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet. Unter den vereinfachenden Annahmen, daß:

- die Verformung jedes elastischen Arms nur durch reine Biegung hervorgerufen wird, die in einer horizontalen Ebene ist und es sich bei den Armen um Euler-Bernoulli-Balken handelt,
- die Deformation jedes elastischen Arms nach dem Ritzansatz beschrieben werden kann, wobei als Ansatzfunktionen die ersten m Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten Balkens angesetzt werden,
- die Coulomb'sche und viskose Reibung in den Gelenken sowie die Strukturdämpfung des Arms vernachlässigbar sind,

stellen sich die Bewegungsgleichungen dieses Roboters mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens zweiter Art auch in der Form von Gl. (3.8) dar (De Luca und Siciliano 1991, Siciliano und Book 1988). In diesem Fall sind aber die Matrix \mathbf{Q} sowie die Vektoren $\mathbf{q}(t)$ und $\boldsymbol{\tau}(t)$ neu wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [\mathbf{I}_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times mn}]^T, \\ \mathbf{q}(t) &= [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t), \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dots, \delta_{1m}(t), \delta_{21}(t), \\ &\quad \delta_{22}(t), \dots, \delta_{2m}(t), \dots, \delta_{n1}(t), \delta_{n2}(t), \dots, \delta_{nm}(t)]^T, \\ \boldsymbol{\tau}(t) &= [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]^T. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei sind $\theta_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die Gelenkwinkel und $\delta_{ij}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) sind die j -ten elastischen Koordinaten des i -ten Armes. Die Dimension von $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$, \mathbf{K}_e sowie $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ ergeben sich zu $(m+1)n \times (m+1)n$, $(m+1)n \times (m+1)n$ und $(m+1)n$.

Gleichung (3.8) ist stark nichtlinear. Um die Eigenwerte dieses Systems zu ermitteln, wird zuerst das nichtlineare Systemmodell um den Arbeitspunkt $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^0$, $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}^0 = 0$ und $\boldsymbol{\tau}(t) = 0$ linearisiert. Dies geschieht durch eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied des Systems (3.8), die folgendes Ergebnis liefert (Wang 1996):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}^0) \Delta \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{u}(t), \quad (4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^0, \\ \mathbf{u}(t) &= \boldsymbol{\tau}(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das System aus Gl. (4.2) wird nun in Zustandsraumdarstellung überführt. Der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ des Systems wird aus $\Delta \mathbf{q}(t)$ und seiner ersten zeitlichen Ableitung $\Delta \dot{\mathbf{q}}(t)$ gebildet:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}(t) \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n(m+1)} (i = 1, 2). \quad (4.4)$$

Aus (4.2) und (4.4) folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -[\mathbf{M}(\mathbf{q}^0)]^{-1} \mathbf{K}_e, \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{M}(\mathbf{q}^0)]^{-1} \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Eigenwerte $\{\lambda_{ij}^k, i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m; k = 1, 2\}$ des Systems lassen sich aus der charakteristischen Gleichung ermitteln:

$$p(\lambda_{ij}^k) = \det \left(\lambda_{ij}^k \mathbf{I}_{2(m+1)n \times 2(m+1)n} - \begin{vmatrix} \mathbf{O}_{(m+1)n \times (m+1)n} & \mathbf{I}_{(m+1)n \times (m+1)n} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O}_{(m+1)n \times (m+1)n} \end{vmatrix} \right). \quad (4.7)$$

Anhand mehrerer Beispiele verdeutlichen wir nun die Eigenschaften der Eigenwerte elastischer Robotersysteme.

Beispiel 1. Betrachtet wird der Canadarm (Zaad und Khorasani 1996). Unter der Annahme, daß das 2. und 3. Gelenk in Strecklage festgehalten werden, kann der Canadarm als Beispiel für einen einachsigen elastischen Roboterarm ($n = 1$) betrachtet werden. Nach Zaad und Khorasani (1996) wird m zu 2 gesetzt und die Matrizen sowie Vektoren in Gl. (3.8) lassen sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) = \begin{bmatrix} 196040 + 4000,7(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t))^2 & 29022 & -27688 \\ 29022 & 4985,5 & -6633,4 \\ -27688 & -6633,4 & 13371 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \begin{bmatrix} 8001,4\dot{\theta}_1(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t))(\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{12}(t)) \\ -4000,7\dot{\theta}_1^2(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t)) \\ 4000,7\dot{\theta}_1^2(t)(\delta_{11}(t) - \delta_{12}(t)) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 123180 & 0 \\ 0 & 0 & 4865200 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Q} = [13,5 \ 0 \ 0]^T. \quad (4.11)$$

Mit $\mathbf{q}^0 = [0, 0, 0]^T$ berechnen sich die Eigenwerte des linearisierten Modells zu $\lambda_{10}^k = \{0, 0\}$, $\lambda_{11}^k = \pm 11,5338j$, $\lambda_{12}^k = \pm 217,3768j$ ($k = 1, 2$). \square

Beispiel 2. Betrachtet wird das im Abschnitt 2 angegebene Modell eines einachsigen Roboters. Die physikalischen Parameter des Roboters ergeben sich nach De Luca und Siciliano (1993) zu:

$$\begin{aligned} l_1 &= 0,5 \text{ m}, \\ \rho_1 &= 1 \text{ kg/m}, \\ (EI)_1 &= 10 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\ J_{h1} &= 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\ m_p &= 0,1 \text{ kg}, \\ J_p &= 0,0005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

Mit $M_{L1} = 0$, $J_{L1} = 0$ und $\mathbf{q}^0 = [0, 0, 0]^T$ berechnen sich die Eigenwerte des Systems Gl. (2.13)-(2.22) zu $\lambda_{10}^k = \{0, 0\}$, $\lambda_{11}^k = \pm 41,9778j$, $\lambda_{12}^k = \pm 215,0625j$ ($k = 1, 2$). \square

Beispiel 3. Betrachtet wird wieder das im Abschnitt 2 angegebene Modell eines einachsigen Roboters. In diesem Fall werden aber die Parameter des im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Gerhard-Mercator-Universität-GH-Duisburg aufgebauten Roboters verwendet, die wie folgt ermittelt wurde:

$$\begin{aligned} l_1 &= 0,42 \text{ m}, \\ \rho_1 &= 0,285 \text{ kg/m}, \\ (EI)_1 &= 0,4158 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\ J_{h1} &= 0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\ m_p &= 0 \text{ kg}, \\ J_p &= 0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

Mit $M_{L1} = 0$, $J_{L1} = 0$ und $\mathbf{q}^0 = [0, 0, 0]^T$ berechnen sich die Eigenwerte des Systems Gl. (2.13)-(2.22) zu $\lambda_{10}^k = \{0, 0\}$, $\lambda_{11}^k = \pm 27,8485j$, $\lambda_{12}^k = \pm 151,5369j$ ($k = 1, 2$). \square

Beispiel 4. Betrachtet wird das von De Luca und Siciliano (1991) vorgestellte Modell des im Abschnitt 3 dargestellten zweiachsigen Roboters. Die Belegung der Systemmatrizen in Gl. (3.8) sind in De Luca und Siciliano (1991) im einzelnen angegeben. Die physikalischen Parameter des Roboters ergeben sich nach De Luca und Siciliano (1991) zu:

$$\begin{aligned}
l_1 &= l_2 = 0,5 \text{ m}, \\
\rho_1 &= \rho_2 = 0,2 \text{ kg/m}, \\
(EI)_1 &= (EI)_2 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\
m_{h1} &= m_{h2} = 1 \text{ kg}, \\
J_{h1} &= J_{h2} = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
m_p &= 0,1 \text{ kg}, \\
J_p &= 0,0005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.
\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{q}^0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ berechnen sich die Eigenwerte des resultierenden linearen Modells zu $\lambda_{i0}^k = \{0, 0, 0, 0\}$, $\lambda_{i1}^k = \{\pm 8, 8337j, \pm 16, 6208j\}$, $\lambda_{i1}^k = \{\pm 101, 2588j, \pm 144, 3649j\}$ ($i, k = 1, 2$). \square

Beispiel 5. Betrachtet wird der im Abschnitt 3 dargestellte zweiachsige Roboter. Die physikalischen Parameter des Roboters ergeben sich nach De Luca und Siciliano (1993) zu:

$$\begin{aligned}
l_1 &= l_2 = 0,5 \text{ m}, \\
\rho_1 &= \rho_2 = 1,0 \text{ kg/m}, \\
(EI)_1 &= (EI)_2 = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\
m_{h1} &= m_{h2} = 1 \text{ kg}, \\
J_{h1} &= J_{h2} = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
m_p &= 0,1 \text{ kg}, \\
J_p &= 0,0005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.
\end{aligned}$$

Mit $M_{L1} = m_{h2} + \rho_2 l_2 + m_p$, $M_{L2} = m_p$, $J_{L1} = J_{h2} + \frac{1}{3}\rho_2 l_2^3 + m_p l_2^2 + J_p$, $J_{L2} = J_p$ und $\mathbf{q}^0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ berechnen sich die Eigenwerte des Systems zu $\lambda_{i0}^k = \{0, 0, 0, 0\}$, $\lambda_{i1}^k = \{\pm 27, 2612j, \pm 45, 3302j\}$, $\lambda_{i1}^k = \{\pm 212, 8809j, \pm 266, 3486j\}$ ($i, k = 1, 2$). \square

Die Resultate der vorausgegangenen Beispiele legen das folgende Ergebnis nahe: Es gilt für viele Roboter mit elastischen homogenen Armen, daß die Eigenwerte des Systems Nullen und rein imaginären Zahlen sind. Nach dem Betrag ihres Imaginärteils können die Eigenwerte in die folgenden $m + 1$ Gruppen eingeteilt werden: $\{\lambda_{i0}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$, $\{\lambda_{i1}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$, \dots , $\{\lambda_{im}^k, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2\}$. Die Beträge der Imaginärteile der verschiedenen Eigenwerte innerhalb einer Gruppe haben die gleiche Größenordnung. Also:

$$\frac{\lambda_{i_1 j}^{k_1}}{\lambda_{i_2 j}^{k_2}} = \mathbf{O}(1), \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n; k_1, k_2 = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.12)$$

Dabei heißt $\mathbf{O}(\cdot)$ von der Ordnung „groß O“. Dagegen unterscheiden sich die Beträge der Imaginärteile der Eigenwerte von verschiedenen Gruppen stark. Diese Gruppen sind so angeordnet, daß

$$\frac{\lambda_{i_1 j}^{k_1}}{\lambda_{i_2(j+1)}^{k_2}} = \mathbf{o}(1), \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n; k_1, k_2 = 1, 2; j = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (4.13)$$

$\mathfrak{o}(\cdot)$ bezeichnet die Ordnung „klein o“.

Weil die Imaginärteile dieser Eigenwerte zuständig für die Schwingungsfrequenz des Systems (3.8) sind, erkennen wir aus Chow u. a. (1978), daß das System (3.8) mittels der Singular-Perturbation-Methode behandelt werden kann. Es handelt sich bei dem System (3.8) um ein System mit $m + 1$ -Zeitskalen (Ladde und Siljak 1983).

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst eine Übersicht über die Modellbildung elastischer Roboter gegeben. Dann wird die Modellbildung für einen ein- und zweiachsigen elastischen Roboter dargestellt. Die Masse und das Trägheitsmoment der Nutzlast stehen nur explizit in den resultierenden Modellen, sie haben keinen impliziten Einfluß auf die Dynamik. Deshalb sind diese Modelle für den Robustreglerentwurf geeignet. Außerdem werden nicht nur die linearen, sondern auch die nichtlinearen Glieder über die verallgemeinerten elastischen Koordinaten in den entwickelten Modellen beibehalten. Darauf basierend wird durch numerische Analyse der Eigenwerte mehrerer Beispiele verdeutlicht, daß ein elastisches Robotersystem ein System mit Multizeitskalen ist.

Der Reglerentwurf für elastische Roboter mit Hilfe dieser Multizeitskalen-Eigenschaft kann Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

Der Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

6 Literaturverzeichnis

- Ackermann, J.** 1989. *Positionsregelung reibungsbehafteter elastischer Industrieroboter*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 180. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Bai, M.** 1996. *Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems*. Forschungsbericht 05/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Barbieri, E.** und **U. Özgüner**. 1988. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 110. 416–421.
- Baruh, H.** und **S. S. K. Tadikonda**. 1989. Issues in the dynamics and control of flexible robot manipulators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 12. 659–671.
- Benati, M.** und **A. Morro**. 1994. Formulation of equations of motion for a chain of flexible links using Hamilton's principle. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 81–88.
- Bernzen, W., B. Riege** und **S. Hartmann**. 1998. Modeling and model fitting of flexible robots – A multibody system toolkit approach. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 22. 165–175.
- Book, W. J.** 1984. Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms. *The International Journal of Robotics Research*.
- Cannon, R. H.** und **E. Schmitz**. 1984. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *The International Journal of Robotics Research* 3. 62–75.
- Chang, L.-W.** und **J. F. Hamilton**. 1991. The kinematics of robotic manipulators with flexible links using an equivalent rigid link system (ERLS) model. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113. 48–53.
- Char, B. W., K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan** und **S. M. Watt**. 1993. *Maple V Library Reference Manual*. New York: Springer-Verlag.
- Choura, S., S. Jayasuriya** und **M. A. Medick**. 1991. On the modeling, and open-loop control of a rotating thin flexible beam. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113. 26–33.
- Chow, J. H., J. J. Allemong** und **P. V. Kokotovic**. 1978. Singular perturbation analysis of systems with sustained high frequency oscillations. *Automatica* 14. 271–279.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano**. 1991. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 21. 826–839.

- De Luca, A.** und **B. Siciliano**. 1993. Regulation of flexible arms under gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9. 463–467.
- Fraser, A. R.** und **R. W. Daniel**. 1991. *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Fukuda, T.** 1985. Flexibility control of elastic robotic arms. *Journal of Robotic Systems* 2. 73–88.
- Gawronski, W., C.-H. C. Ih** und **S. J. Wang**. 1995. On dynamics and control of multi-link flexible manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117. 134–142.
- Giovagnoni, M.** 1994. A numerical and experimental analysis of a chain of flexible bodies. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 73–80.
- Hiller, M.** 1996. Modelling, simulation and control design for large and heavy manipulators. *Robotics and Autonomous Systems* 19. 167–177.
- Hu, F. L.** und **A. G. Ulsoy**. 1994. Dynamic modeling of constrained flexible robot arms for controller design. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 56–65.
- Jonker, B.** 1990. A finite element dynamic analysis of flexible manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 9. 59–74.
- Kane, T. R., R. R. Ryan** und **A. K. Banerjee**. 1987. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 10. 139–151.
- Ladde, G. S.** und **D. D. Siljak**. 1983. Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales. *Automatica* 14. 385–394.
- Naganathan, G.** und **A. H. Soni**. 1988. Nonlinear modeling of kinematic and flexibility effects in manipulator design. *Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*.
- Sakawa, Y., F. Masuno** und **S. Fukushima**. 1985. Modeling and feedback control of a flexible arm. *Journal of Robotic Systems* 2. 453–472.
- Siciliano, B.** und **W. J. Book**. 1988. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 7(4). 79–90.

- Simo, J. C.** und **L. Vu-Quoc**. 1986. On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: Part i. *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics* 53. 849–854.
- Simo, J. C.** und **L. Vu-Quoc**. 1987. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration* 119. 487–508.
- Sunada, W. H.** und **S. Dubowsky**. 1983. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*.
- Tzes, A. P.** und **S. Yurkovich**. 1991. Application and comparison of on-line identification methods for flexible manipulator control. *The International Journal of Robotics Research* 10. 515–527.
- Wang, J.** 1996. *Regelung eines zweiachsigen elastischen Roboters*. Forschungsbericht Nr. 17/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Yurkovich, S.** und **A. P. Tzes**. 1990. Experiments in identification and control of flexible-link manipulators. *IEEE Control Systems Magazine* 10. 41–47.
- Zaad, K. H.** und **K. Khorasani**. 1996. Control of non-minimum phase singularly perturbed systems with application to flexible-link manipulators. *International Journal of Control* 63. 679–701.

A Elemente des Modells eines zweiachsigen elastischen Roboters

Die Elemente der Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ vom Modell (3.8) ergeben sich zu:

$$M_{11} = m_{111} + m_{112}c_2 + (m_{113}t_1 + m_{114}t_2)s_2 \quad ,$$

$$M_{12} = m_{121} + m_{122}c_2 + (m_{123}t_1 + m_{124}t_2)s_2 \quad ,$$

$$M_{13} = m_{131} + m_{132}c_2 + (m_{133}t_2 + m_{134}\delta_{12})s_2 \quad ,$$

$$M_{14} = m_{141} + m_{142}c_2 + (m_{143}t_2 + m_{144}\delta_{11})s_2 \quad ,$$

$$M_{15} = m_{151} + m_{152}c_2 + m_{153}t_1s_2 \quad ,$$

$$M_{16} = m_{161} + m_{162}c_2 + m_{163}t_1s_2 \quad ,$$

$$M_{22} = m_{221} \quad ,$$

$$M_{23} = m_{231} + m_{232}c_2 + (m_{233}t_2 + m_{234}w'_{1e})s_2 \quad ,$$

$$M_{24} = m_{241} + m_{242}c_2 + (m_{243}t_2 + m_{244}w'_{1e})s_2 \quad ,$$

$$M_{25} = m_{251} \quad ,$$

$$M_{26} = m_{261} \quad ,$$

$$M_{33} = m_{331} + m_{332}c_2 + m_{333}t_2s_2 \quad ,$$

$$M_{34} = m_{341} + m_{342}c_2 + m_{343}t_2s_2 \quad ,$$

$$M_{35} = m_{351} + m_{352}c_2 + m_{353}w'_{1e}s_2 \quad ,$$

$$M_{36} = m_{361} + m_{362}c_2 + m_{363}w'_{1e}s_2 \quad ,$$

$$M_{44} = m_{441} + m_{442}c_2 + m_{443}t_2s_2 \quad ,$$

$$M_{45} = m_{451} + m_{452}c_2 + m_{453}w'_{1e}s_2 \quad ,$$

$$M_{46} = m_{461} + m_{462}c_2 + m_{463}w'_{1e}s_2 \quad ,$$

$$M_{55} = m_{551} \quad ,$$

$$M_{56} = m_{561} \quad ,$$

$$M_{66} = m_{661}$$

mit

$$\begin{aligned} m_{111} = & J_{h1} + J_{h2} + J_p + J_{o1} + z_{111}\delta_{11}^2 + 2z_{112}\delta_{11}\delta_{12} + z_{122}\delta_{12}^2 \\ & + (m_{h2} + m_2 + m_p)(l_1^2 + w_{1e}^2) \\ & + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)](1 + w_{1e}'^2) \quad , \end{aligned}$$

$$m_{112} = 2(m_2d_2 + m_pl_2)(l_1 + w_{1e}w'_{1e}) + 2t_1t_2 \quad ,$$

$$m_{113} = 2(m_2d_2 + m_pl_2) \quad ,$$

$$m_{114} = -2(l_1 + w_{1e}w'_{1e}) \quad ,$$

$$\begin{aligned}
m_{121} &= J_{h2} + J_p + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)](1 + w_{1e}'^2) , \\
m_{122} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(l_1 + w_{1e}w_{1e}' \right) + t_1t_2 , \\
m_{123} &= m_2d_2 + m_pl_2 , \\
m_{124} &= - \left(l_1 + w_{1e}w_{1e}' \right) , \\
\\
m_{131} &= w_{11} + (m_{h2} + m_2 + m_p) l_1 \phi_{11,e} + (J_{h2} + J_p) \phi'_{11,e} \\
&\quad + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi'_{11,e} , \\
m_{132} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(\phi_{11,e} + l_1\phi'_{11,e} \right) + \left(-\phi_{11,e}\phi'_{12,e} + \phi'_{11,e}\phi_{12,e} \right) t_2\delta_{12} , \\
m_{133} &= - \left(\phi_{11,e} + l_1\phi'_{11,e} \right) , \\
m_{134} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(-\phi_{11,e}\phi'_{12,e} + \phi'_{11,e}\phi_{12,e} \right) , \\
\\
m_{141} &= w_{12} + (m_{h2} + m_2 + m_p) l_1 \phi_{12,e} + (J_{h2} + J_p) \phi'_{12,e} \\
&\quad + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi'_{12,e} , \\
m_{142} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(\phi_{12,e} + l_1\phi'_{12,e} \right) + \left(\phi_{11,e}\phi'_{12,e} - \phi'_{11,e}\phi_{12,e} \right) t_2\delta_{11} , \\
m_{143} &= - \left(\phi_{12,e} + l_1\phi'_{12,e} \right) , \\
m_{144} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(\phi_{11,e}\phi'_{12,e} - \phi'_{11,e}\phi_{12,e} \right) \\
\\
m_{151} &= J_p\phi'_{21,e} + (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) \left(1 + w_{1e}'^2 \right) , \\
m_{152} &= t_{21} \left(l_1 + w_{1e}w_{1e}' \right) , \\
m_{153} &= t_{21} , \\
\\
m_{161} &= J_p\phi'_{22,e} + (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) \left(1 + w_{1e}'^2 \right) , \\
m_{162} &= t_{22} \left(l_1 + w_{1e}w_{1e}' \right) , \\
m_{163} &= t_{22} , \\
\\
m_{221} &= [J_{h2} + J_p + J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)](1 + w_{1e}'^2) , \\
\\
m_{231} &= [J_{h2} + J_p + J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi'_{11,e} , \\
m_{232} &= \left[(m_2d_2 + m_pl_2) - w_{1e}'t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
m_{233} &= -\phi_{11,e} , \\
m_{234} &= -(m_2d_2 + m_pl_2) \phi_{11,e} ,
\end{aligned}$$

$$m_{241} = [J_{h2} + J_p + J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi'_{12,e} ,$$

$$m_{242} = [(m_2d_2 + m_pl_2) - w'_{1e}t_2] \phi_{12,e} ,$$

$$m_{243} = -\phi_{12,e} ,$$

$$m_{244} = -(m_2d_2 + m_pl_2) \phi_{12,e} ,$$

$$m_{251} = J_p\phi'_{21,e} + (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) (1 + w_{1e}'^2) ,$$

$$m_{261} = J_p\phi'_{22,e} + (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) (1 + w_{1e}'^2) ,$$

$$m_{331} = z_{111} + (m_{h2} + m_2 + m_p)\phi_{11,e}^2 + (J_{h2} + J_p)\phi_{11,e}'^2 + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi_{11,e}'^2 ,$$

$$m_{332} = 2(m_2d_2 + m_pl_2)\phi_{11,e}\phi'_{11,e} ,$$

$$m_{333} = -2\phi_{11,e}\phi'_{11,e} ,$$

$$m_{341} = z_{112} + (m_{h2} + m_2 + m_p)\phi_{11,e}\phi_{12,e} + (J_{h2} + J_p)\phi_{11,e}'\phi'_{12,e} + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi_{11,e}'\phi'_{12,e} ,$$

$$m_{342} = (m_2d_2 + m_pl_2) (\phi_{11,e}\phi'_{12,e} + \phi'_{11,e}\phi_{12,e}) ,$$

$$m_{343} = -(\phi_{11,e}\phi'_{12,e} + \phi'_{11,e}\phi_{12,e}) ,$$

$$m_{351} = \left[(w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e} + J_p\phi'_{21,e}) + (z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} ,$$

$$m_{352} = \phi_{11,e}t_{21} ,$$

$$m_{353} = -\phi_{11,e}t_{21} ,$$

$$m_{361} = \left[(w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e} + J_p\phi'_{22,e}) + (z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} ,$$

$$m_{362} = \phi_{11,e}t_{22} ,$$

$$m_{363} = -\phi_{11,e}t_{22} ,$$

$$m_{441} = z_{122} + (m_{h2} + m_2 + m_p)\phi_{12,e}^2 + (J_{h2} + J_p)\phi_{12,e}'^2 + [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] \phi_{12,e}'^2 ,$$

$$m_{442} = 2(m_2d_2 + m_pl_2)\phi_{12,e}\phi'_{12,e} ,$$

$$m_{443} = -2\phi_{12,e}\phi'_{12,e} ,$$

$$m_{451} = \left[(w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e} + J_p\phi'_{21,e}) + (z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} ,$$

$$m_{452} = \phi_{12,e}t_{21} ,$$

$$m_{453} = -\phi_{12,e}t_{21} ,$$

$$\begin{aligned}
m_{461} &= \left[(w_{22} + m_p l_2 \phi_{22,e} + J_p \phi'_{22,e}) + (z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} , \\
m_{462} &= \phi_{12,e} t_{22} , \\
m_{463} &= -\phi_{12,e} t_{22} ,
\end{aligned}$$

$$m_{551} = J_p \phi'^2_{21,e} + (z_{211} + m_p \phi^2_{21,e}) (1 + w'^2_{1e}) ,$$

$$m_{561} = J_p \phi'_{21,e} \phi'_{22,e} + (z_{212} + m_p \phi_{21,e} \phi_{22,e}) (1 + w'^2_{1e}) ,$$

$$m_{661} = J_p \phi'^2_{22,e} + (z_{222} + m_p \phi^2_{22,e}) (1 + w'^2_{1e}) .$$

Die Elemente des Vektors $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ vom Modell (3.8) ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \left[(h_{101} \dot{\theta}_2 + h_{102} \dot{\delta}_{11} + h_{103} \dot{\delta}_{12} + h_{104} \dot{\delta}_{21} + h_{105} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_1 \right. \\
&+ (h_{106} \dot{\theta}_2 + h_{107} \dot{\delta}_{11} + h_{108} \dot{\delta}_{12} + h_{109} \dot{\delta}_{21} + h_{110} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_2 \\
&+ (h_{111} \dot{\delta}_{21} + h_{112} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{11} + (h_{113} \dot{\delta}_{21} + h_{114} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{12} \left. \right] s_2 \\
&+ \left[(h_{115} \dot{\theta}_2 + h_{116} \dot{\delta}_{11} + h_{117} \dot{\delta}_{12} + h_{118} \dot{\delta}_{21} + h_{119} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_1 \right. \\
&+ (h_{120} \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\delta}_{11} + h_{122} \dot{\delta}_{12} + h_{123} \dot{\delta}_{21} + h_{124} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_2 \\
&+ (h_{125} \dot{\delta}_{21} + h_{126} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{11} + (h_{127} \dot{\delta}_{21} + h_{128} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{12} \left. \right] c_2 \\
&+ (h_{129} \dot{\delta}_{11} + h_{130} \dot{\delta}_{12} + h_{131} \dot{\delta}_{21} + h_{132} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_1 \\
&+ (h_{133} \dot{\delta}_{11} + h_{134} \dot{\delta}_{12} + h_{135} \dot{\delta}_{21} + h_{136} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_2 \\
&+ (h_{137} \dot{\delta}_{21} + h_{138} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{11} + (h_{139} \dot{\delta}_{21} + h_{140} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{12} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= (h_{201} \dot{\theta}_1 + h_{202} \dot{\delta}_{11} + h_{203} \dot{\delta}_{12}) \dot{\theta}_1 s_2 \\
&+ (h_{204} \dot{\theta}_1 + h_{205} \dot{\delta}_{11} + h_{206} \dot{\delta}_{12}) \dot{\theta}_1 c_2 \\
&+ (h_{207} \dot{\delta}_{11} + h_{208} \dot{\delta}_{12} + h_{209} \dot{\delta}_{21} + h_{210} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_1 \\
&+ (h_{211} \dot{\delta}_{11} + h_{212} \dot{\delta}_{12} + h_{213} \dot{\delta}_{21} + h_{214} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_2 \\
&+ (h_{215} \dot{\delta}_{21} + h_{216} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{11} + (h_{217} \dot{\delta}_{21} + h_{218} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{12} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= \left[(h_{301} \dot{\theta}_1 + h_{302} \dot{\theta}_2 + h_{303} \dot{\delta}_{12} + h_{304} \dot{\delta}_{21} + h_{305} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_1 \right. \\
&+ (h_{306} \dot{\theta}_2 + h_{307} \dot{\delta}_{11} + h_{308} \dot{\delta}_{12} + h_{309} \dot{\delta}_{21} + h_{310} \dot{\delta}_{22}) \dot{\theta}_2 \\
&+ (h_{311} \dot{\delta}_{21} + h_{312} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{11} + (h_{313} \dot{\delta}_{21} + h_{314} \dot{\delta}_{22}) \dot{\delta}_{12} \left. \right] s_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(h_{315} \dot{\theta}_1 + h_{316} \dot{\theta}_2 + h_{317} \dot{\delta}_{12} + h_{318} \dot{\delta}_{21} + h_{319} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_1 \right. \\
& + \left. \left(h_{320} \dot{\theta}_2 + h_{321} \dot{\delta}_{11} + h_{322} \dot{\delta}_{12} + h_{323} \dot{\delta}_{21} + h_{324} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_2 \right] c_2 \\
& + \left(h_{325} \dot{\theta}_1 + h_{326} \dot{\theta}_2 + h_{327} \dot{\delta}_{21} + h_{328} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_1 \\
& + \left(h_{329} \dot{\theta}_2 + h_{330} \dot{\delta}_{21} + h_{331} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left(h_{332} \dot{\delta}_{21} + h_{333} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{11} + \left(h_{334} \dot{\delta}_{21} + h_{335} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{12} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_4 & = \left[\left(h_{401} \dot{\theta}_1 + h_{402} \dot{\theta}_2 + h_{403} \dot{\delta}_{11} + h_{404} \dot{\delta}_{21} + h_{405} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_1 \right. \\
& + \left(h_{406} \dot{\theta}_2 + h_{407} \dot{\delta}_{11} + h_{408} \dot{\delta}_{12} + h_{409} \dot{\delta}_{21} + h_{410} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left. \left(h_{411} \dot{\delta}_{21} + h_{412} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{11} + \left(h_{413} \dot{\delta}_{21} + h_{414} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{12} \right] s_2 \\
& + \left[\left(h_{415} \dot{\theta}_1 + h_{416} \dot{\theta}_2 + h_{417} \dot{\delta}_{11} + h_{418} \dot{\delta}_{21} + h_{419} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_1 \right. \\
& + \left. \left(h_{420} \dot{\theta}_2 + h_{421} \dot{\delta}_{11} + h_{422} \dot{\delta}_{12} + h_{423} \dot{\delta}_{21} + h_{424} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_2 \right] c_2 \\
& + \left(h_{425} \dot{\theta}_1 + h_{426} \dot{\theta}_2 + h_{427} \dot{\delta}_{21} + h_{428} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_1 \\
& + \left(h_{429} \dot{\theta}_2 + h_{430} \dot{\delta}_{21} + h_{431} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left(h_{432} \dot{\delta}_{21} + h_{433} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{11} + \left(h_{434} \dot{\delta}_{21} + h_{435} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{12} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_5 & = \left(h_{501} \dot{\theta}_1 + h_{502} \dot{\delta}_{11} + h_{503} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 s_2 \\
& + \left(h_{504} \dot{\theta}_1 + h_{505} \dot{\delta}_{11} + h_{506} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 c_2 \\
& + \left(h_{507} \dot{\theta}_1 + h_{508} \dot{\theta}_2 + h_{509} \dot{\delta}_{11} + h_{510} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 \\
& + \left(h_{511} \dot{\theta}_2 + h_{512} \dot{\delta}_{11} + h_{513} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left(h_{514} \dot{\delta}_{21} + h_{515} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{11} + \left(h_{516} \dot{\delta}_{21} + h_{517} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{12} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_6 & = \left(h_{601} \dot{\theta}_1 + h_{602} \dot{\delta}_{11} + h_{603} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 s_2 \\
& + \left(h_{604} \dot{\theta}_1 + h_{605} \dot{\delta}_{11} + h_{606} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 c_2 \\
& + \left(h_{607} \dot{\theta}_1 + h_{608} \dot{\theta}_2 + h_{609} \dot{\delta}_{11} + h_{610} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_1 \\
& + \left(h_{611} \dot{\theta}_2 + h_{612} \dot{\delta}_{11} + h_{613} \dot{\delta}_{12} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left(h_{614} \dot{\delta}_{21} + h_{615} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{11} + \left(h_{616} \dot{\delta}_{21} + h_{617} \dot{\delta}_{22} \right) \dot{\delta}_{12}
\end{aligned}$$

mit

$$h_{101} = -2(m_2 d_2 + m_p l_2) \left(l_1 + w_{1e} w'_{1e} \right) - 2t_1 t_2 \quad ,$$

$$\begin{aligned}
h_{102} &= 2(m_2 d_2 + m_p l_2) t_{11} - 2(\phi'_{11,e} w_{1e} + \phi_{11,e} w'_{1e}) t_2 \quad , \\
h_{103} &= 2(m_2 d_2 + m_p l_2) t_{12} - 2(\phi'_{12,e} w_{1e} + \phi_{12,e} w'_{1e}) t_2 \quad , \\
h_{104} &= -2t_{21} (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) \quad , \\
h_{105} &= -2t_{22} (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) \quad , \\
h_{106} &= -(m_2 d_2 + m_p l_2) (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) - t_1 t_2 \quad , \\
h_{107} &= -2[(m_2 d_2 + m_p l_2) l_1 + w_{1e} t_2] \phi'_{11,e} \quad , \\
h_{108} &= -2[(m_2 d_2 + m_p l_2) l_1 + w_{1e} t_2] \phi'_{12,e} \quad , \\
h_{109} &= -2t_{21} (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) \quad , \\
h_{110} &= -2t_{22} (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) \quad , \\
h_{111} &= -2l_1 t_{21} \phi'_{11,e} \quad , \\
h_{112} &= -2l_1 t_{22} \phi'_{11,e} \quad , \\
h_{113} &= -2l_1 t_{21} \phi'_{12,e} \quad , \\
h_{114} &= -2l_1 t_{22} \phi'_{12,e} \quad , \\
\\
h_{115} &= 2(m_2 d_2 + m_p l_2) t_1 - 2(l_1 + w_{1e} w'_{1e}) t_2 \quad , \\
h_{116} &= 2(m_2 d_2 + m_p l_2) (\phi'_{11,e} w_{1e} + \phi_{11,e} w'_{1e}) + 2t_{11} t_2 \quad , \\
h_{117} &= 2(m_2 d_2 + m_p l_2) (\phi'_{12,e} w_{1e} + \phi_{12,e} w'_{1e}) + 2t_{12} t_2 \quad , \\
h_{118} &= 2t_{21} t_1 \quad , \\
h_{119} &= 2t_{22} t_1 \quad , \\
h_{120} &= (m_2 d_2 + m_p l_2) t_1 - (l_1 + w_{1e} w'_{1e}) t_2 \quad , \\
h_{121} &= 2[(m_2 d_2 + m_p l_2) w_{1e} - l_1 t_2] \phi'_{11,e} \quad , \\
h_{122} &= 2[(m_2 d_2 + m_p l_2) w_{1e} - l_1 t_2] \phi'_{12,e} \quad , \\
h_{123} &= 2v_{21} t_1 \quad , \\
h_{124} &= 2v_{22} t_1 \quad , \\
h_{125} &= 2t_{21} \phi'_{11} w_{1e} \quad , \\
h_{126} &= 2t_{22} \phi'_{11} w_{1e} \quad , \\
h_{127} &= 2t_{21} \phi'_{12} w_{1e} \quad , \\
h_{128} &= 2t_{22} \phi'_{12} w_{1e} \quad , \\
\\
h_{129} &= 2[z_{111} \delta_{11} + z_{112} \delta_{12} + (m_{h2} + m_2 + m_p) \phi_{11,e} w_{1e}] \\
&\quad + 2\phi'_{11,e} [J_{o2} + z_{211} \delta_{21}^2 + 2z_{212} \delta_{21} \delta_{22} + z_{222} \delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} \quad , \\
h_{130} &= 2[z_{112} \delta_{11} + z_{122} \delta_{12} + (m_{h2} + m_2 + m_p) \phi_{12,e} w_{1e}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\phi'_{12,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{131} &= 2(z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{132} &= 2(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{133} &= 2\phi'_{11,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{134} &= 2\phi'_{12,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{135} &= 2(z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{136} &= 2(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{137} &= 2 \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} + (w_{21} + l_2m_p\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} , \\
h_{138} &= 2 \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} + (w_{22} + l_2m_p\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} , \\
h_{139} &= 2 \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} + (w_{21} + l_2m_p\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} , \\
h_{140} &= 2 \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} + (w_{22} + l_2m_p\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} , \\
\\
h_{201} &= (m_2d_2 + m_pl_2) \left(l_1 + w_{1e}w'_{1e} \right) + t_1t_2 , \\
h_{202} &= 2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) - w'_{1e}t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{203} &= 2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) - w'_{1e}t_2 \right] \phi_{12,e} , \\
\\
h_{204} &= -(m_2d_2 + m_pl_2)t_1 + \left(l_1 + w_{1e}w'_{1e} \right) t_2 , \\
h_{205} &= 2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{206} &= 2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{12,e} , \\
\\
h_{207} &= 2\phi'_{11,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{208} &= 2\phi'_{12,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{209} &= 2(z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{210} &= 2(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{211} &= 2\phi'_{11,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{212} &= 2\phi'_{12,e} [J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p(l_2^2 + w_{2e}^2)] w'_{1e} , \\
h_{213} &= 2(z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{214} &= 2(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) \left(1 + w'_{1e}\right) , \\
h_{215} &= 2 \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} + (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{216} &= 2 \left[z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e} + (w_{22} + m_p l_2 \phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{11,e} , \\
h_{217} &= 2 \left[z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e} + (w_{21} + m_p l_2 \phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} , \\
h_{218} &= 2 \left[z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e} + (w_{22} + m_p l_2 \phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \phi'_{12,e} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{301} &= -(m_2 d_2 + m_p l_2) t_{11} + \left(\phi'_{11,e} w_{1e} + \phi_{11,e} w'_{1e} \right) t_2 , \\
h_{302} &= -2 \left[(m_2 d_2 + m_p l_2) - w'_{1e} t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{303} &= -2 (m_2 d_2 + m_p l_2) \left(\phi_{11,e} \phi'_{12,e} - \phi_{12,e} \phi'_{11,e} \right) , \\
h_{304} &= -2 \phi_{11,e} t_{21} , \\
h_{305} &= -2 \phi_{11,e} t_{22} , \\
h_{306} &= - \left[(m_2 d_2 + m_p l_2) - w'_{1e} t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{307} &= -2 (m_2 d_2 + m_p l_2) \phi_{11,e} \phi'_{11,e} , \\
h_{308} &= -2 (m_2 d_2 + m_p l_2) \phi_{11,e} \phi'_{12,e} , \\
h_{309} &= -2 \phi_{11,e} t_{21} , \\
h_{310} &= -2 \phi_{11,e} t_{22} , \\
h_{311} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{11,e} t_{21} , \\
h_{312} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{11,e} t_{22} , \\
h_{313} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{12,e} t_{21} , \\
h_{314} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{12,e} t_{22} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{315} &= -(m_2 d_2 + m_p l_2) \left(\phi'_{11,e} w_{1e} + \phi_{11,e} w'_{1e} \right) - t_{11} t_2 , \\
h_{316} &= -2 \left[(m_2 d_2 + m_p l_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{317} &= -2 \left(\phi_{11,e} \phi'_{12,e} - \phi_{12,e} \phi'_{11,e} \right) t_2 , \\
h_{318} &= -2 \phi_{11,e} t_{21} w'_{1e} , \\
h_{319} &= -2 \phi_{11,e} t_{22} w'_{1e} , \\
h_{320} &= - \left[(m_2 d_2 + m_p l_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{11,e} , \\
h_{321} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{11,e} t_2 , \\
h_{322} &= -2 \phi_{11,e} \phi'_{12,e} t_2 , \\
h_{323} &= -2 \phi_{11,e} t_{21} w'_{1e} , \\
h_{324} &= -2 \phi_{11,e} t_{22} w'_{1e} ,
\end{aligned}$$

$$h_{325} = -[z_{111} \delta_{11} + z_{112} \delta_{12} + (m_{h2} + m_2 + m_p) \phi_{11,e} w_{1e}]$$

$$\begin{aligned}
& -\phi'_{11,e} \left[J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} , \\
h_{326} &= -2\phi'_{11,e} \left[J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} , \\
h_{327} &= 2\phi'_{11,e} \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} - (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{328} &= 2\phi'_{11,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{329} &= -\phi'_{11,e} \left[J_{o2} + z_{211}\delta_{21}^2 + 2z_{212}\delta_{21}\delta_{22} + z_{222}\delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} , \\
h_{330} &= 2\phi'_{11,e} \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} - (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{331} &= 2\phi'_{11,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{332} &= 2\phi_{11,e}'^2 (z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) , \\
h_{333} &= 2\phi_{11,e}'^2 (z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) , \\
h_{334} &= 2\phi'_{11,e}\phi'_{12,e} (z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e}) , \\
h_{335} &= 2\phi'_{11,e}\phi'_{12,e} (z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) , \\
\\
h_{401} &= -(m_2d_2 + m_pl_2)t_{12} + \left(\phi'_{12,e}w_{1e} + \phi_{12,e}w'_{1e} \right) t_2 , \\
h_{402} &= -2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) - w'_{1e}t_2 \right] \phi_{12,e} , \\
h_{403} &= 2(m_2d_2 + m_pl_2) \left(\phi_{11,e}\phi'_{12,e} - \phi_{12,e}\phi'_{11,e} \right) \\
h_{404} &= -2\phi_{12,e}t_{21} , \\
h_{405} &= -2\phi_{12,e}t_{22} , \\
h_{406} &= - \left[(m_2d_2 + m_pl_2) - w'_{1e}t_2 \right] \phi_{12,e} , \\
h_{407} &= -2(m_2d_2 + m_pl_2) \phi_{12,e}\phi'_{11,e} , \\
h_{408} &= -2(m_2d_2 + m_pl_2) \phi_{12,e}\phi'_{12,e} , \\
h_{409} &= -2\phi_{12,e}t_{21} , \\
h_{410} &= -2\phi_{12,e}t_{22} , \\
h_{411} &= -2\phi_{12,e}\phi'_{11,e}t_{21} , \\
h_{412} &= -2\phi_{12,e}\phi'_{11,e}t_{22} , \\
h_{413} &= -2\phi_{12,e}\phi'_{12,e}t_{21} , \\
h_{414} &= -2\phi_{12,e}\phi'_{12,e}t_{22} , \\
\\
h_{415} &= -(m_2d_2 + m_pl_2) \left(\phi'_{12,e}w_{1e} + \phi_{12,e}w'_{1e} \right) - t_{12}t_2 , \\
h_{416} &= -2 \left[(m_2d_2 + m_pl_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{12,e} , \\
h_{417} &= 2 \left(\phi_{11,e}\phi'_{12,e} - \phi_{12,e}\phi'_{11,e} \right) t_2 , \\
h_{418} &= -2\phi_{12,e}t_{21}w'_{1e} , \\
h_{419} &= -2\phi_{12,e}t_{22}w'_{1e} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{420} &= - \left[(m_2 d_2 + m_p l_2) w'_{1e} + t_2 \right] \phi_{12,e} \quad , \\
h_{421} &= -2\phi_{12,e} \phi'_{11,e} t_2 \quad , \\
h_{422} &= -2\phi_{12,e} \phi'_{12,e} t_2 \quad , \\
h_{423} &= -2\phi_{12,e} t_{21} w'_{1e} \quad , \\
h_{424} &= -2\phi_{12,e} t_{22} w'_{1e} \quad , \\
\\
h_{425} &= - \left[z_{112} \delta_{11} + z_{122} \delta_{12} + (m_{h2} + m_2 + m_p) \phi_{12,e} w_{1e} \right] \\
&\quad - \phi'_{12,e} \left[J_{o2} + z_{211} \delta_{21}^2 + 2z_{212} \delta_{21} \delta_{22} + z_{222} \delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} \quad , \\
h_{426} &= -2\phi'_{12,e} \left[J_{o2} + z_{211} \delta_{21}^2 + 2z_{212} \delta_{21} \delta_{22} + z_{222} \delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} \quad , \\
h_{427} &= 2\phi'_{12,e} \left[z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e} - (w_{21} + m_p l_2 \phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{428} &= 2\phi'_{12,e} \left[z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e} - (w_{22} + m_p l_2 \phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{429} &= -\phi'_{12,e} \left[J_{o2} + z_{211} \delta_{21}^2 + 2z_{212} \delta_{21} \delta_{22} + z_{222} \delta_{22}^2 + m_p (l_2^2 + w_{2e}^2) \right] w'_{1e} \quad , \\
h_{430} &= 2\phi'_{12,e} \left[z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e} - (w_{21} + m_p l_2 \phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{431} &= 2\phi'_{12,e} \left[z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e} - (w_{22} + m_p l_2 \phi_{22,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{432} &= 2\phi'_{11,e} \phi'_{12,e} (z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e}) \quad , \\
h_{433} &= 2\phi'_{11,e} \phi'_{12,e} (z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e}) \quad , \\
h_{434} &= 2\phi_{12,e}'^2 (z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e}) \quad , \\
h_{435} &= 2\phi_{12,e}'^2 (z_{212} \delta_{21} + z_{222} \delta_{22} + m_p \phi_{22,e} w_{2e}) \quad , \\
\\
h_{501} &= t_{21} \left(l_1 + w_{1e} w'_{1e} \right) \quad , \\
h_{502} &= 2\phi_{11,e} t_{21} \quad , \\
h_{503} &= 2\phi_{12,e} t_{21} \quad , \\
\\
h_{504} &= -t_{21} t_1 \quad , \\
h_{505} &= 2\phi_{11,e} t_{21} w'_{1e} \quad , \\
h_{506} &= 2\phi_{12,e} t_{21} w'_{1e} \quad , \\
\\
h_{507} &= - (z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e}) \left(1 + w_{1e}'^2 \right) \quad , \\
h_{508} &= -2 (z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e}) \left(1 + w_{1e}'^2 \right) \quad , \\
h_{509} &= -2\phi'_{11,e} \left[z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e} - (w_{21} + m_p l_2 \phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{510} &= -2\phi'_{12,e} \left[z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e} - (w_{21} + m_p l_2 \phi_{21,e}) w'_{1e} \right] \quad , \\
h_{511} &= - (z_{211} \delta_{21} + z_{212} \delta_{22} + m_p \phi_{21,e} w_{2e}) \left(1 + w_{1e}'^2 \right) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{512} &= -2\phi'_{11,e} \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} - (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{513} &= -2\phi'_{12,e} \left[z_{211}\delta_{21} + z_{212}\delta_{22} + m_p\phi_{21,e}w_{2e} - (w_{21} + m_pl_2\phi_{21,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{514} &= 2\phi'_{11,e} (z_{211} + m_p\phi_{21,e}^2) w'_{1e} , \\
h_{515} &= 2\phi'_{11,e} (z_{212} + m_p\phi_{21,e}\phi_{22,e}) w'_{1e} , \\
h_{516} &= 2\phi'_{12,e} (z_{211} + m_p\phi_{21,e}^2) w'_{1e} , \\
h_{517} &= 2\phi'_{12,e} (z_{212} + m_p\phi_{21,e}\phi_{22,e}) w'_{1e} , \\
\\
h_{601} &= t_{22} (l_1 + w_{1e}w'_{1e}) , \\
h_{602} &= 2\phi_{11,e}t_{22} , \\
h_{603} &= 2\phi_{12,e}t_{22} , \\
\\
h_{604} &= -t_{22}t_1 , \\
h_{605} &= 2\phi_{11,e}t_{22}w'_{1e} , \\
h_{606} &= 2\phi_{12,e}t_{22}w'_{1e} , \\
\\
h_{607} &= -(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) (1 + w_{1e}'^2) , \\
h_{608} &= -2(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) (1 + w_{1e}'^2) , \\
h_{609} &= -2\phi'_{11,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{610} &= -2\phi'_{12,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{611} &= -(z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e}) (1 + w_{1e}'^2) , \\
h_{612} &= -2\phi'_{11,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{613} &= -2\phi'_{12,e} \left[z_{212}\delta_{21} + z_{222}\delta_{22} + m_p\phi_{22,e}w_{2e} - (w_{22} + m_pl_2\phi_{22,e}) w'_{1e} \right] , \\
h_{614} &= 2\phi'_{11,e} (z_{212} + m_p\phi_{21,e}\phi_{22,e}) w'_{1e} , \\
h_{615} &= 2\phi'_{11,e} (z_{222} + m_p\phi_{22,e}^2) w'_{1e} , \\
h_{616} &= 2\phi'_{12,e} (z_{212} + m_p\phi_{21,e}\phi_{22,e}) w'_{1e} , \\
h_{617} &= 2\phi'_{12,e} (z_{222} + m_p\phi_{22,e}^2) w'_{1e} .
\end{aligned}$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{K}_e vom Modell (3.8) ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
k_{e33} &= m_1\omega_{11}^2 , \\
k_{e44} &= m_1\omega_{12}^2 , \\
k_{e55} &= m_2\omega_{21}^2 , \\
k_{e66} &= m_2\omega_{22}^2 .
\end{aligned}$$

Dabei gelten für:

$$\begin{aligned}
s_2 &\stackrel{\Delta}{=} \sin(\theta_2) \quad , \\
c_2 &\stackrel{\Delta}{=} \cos(\theta_2) \quad , \\
d_2 &= l_2/2 \\
m_i &= \rho_i l_i \quad i = 1, 2 \\
J_{oi} &= \frac{1}{3} \rho_i l_i^3 \quad i = 1, 2 \\
\phi_{ij,e} &= \phi_{ij}(l_i) \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \\
\phi'_{ij,e} &= \left. \frac{\partial \phi_{ij}(x_i)}{\partial x_i} \right|_{x_i=l_i} \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \\
w_{1e} &= \phi_{11,e} \delta_{11} + \phi_{12,e} \delta_{12} \\
w'_{1e} &= \phi'_{11,e} \delta_{11} + \phi'_{12,e} \delta_{12} \\
w_{2e} &= \phi_{21,e} \delta_{21} + \phi_{22,e} \delta_{22} \\
t_1 &\stackrel{\Delta}{=} t_{11} \delta_{11} + t_{12} \delta_{12} \quad , \\
t_2 &\stackrel{\Delta}{=} t_{21} \delta_{21} + t_{22} \delta_{22} \quad , \\
t_{11} &= \phi_{11,e} - l_1 \phi'_{11,e} \quad , \\
t_{12} &= \phi_{12,e} - l_1 \phi'_{12,e} \quad , \\
t_{21} &= v_{21} + m_p \phi_{21,e} \quad , \\
t_{22} &= v_{22} + m_p \phi_{22,e} \quad , \\
v_{2j} &= \int_0^{l_2} \rho_2 \phi_{2j}(x_2) dx_2 \quad j = 1, 2 \quad , \\
w_{ij} &= \int_0^{l_i} \rho_i x_i \phi_{ij}(x_i) dx_i \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \quad , \\
z_{ijk} &= \int_0^{l_i} \rho_i \phi_{ij}(x_i) \phi_{ik}(x_i) dx_i \quad i, j, k = 1, 2 \quad .
\end{aligned}$$