

# **Erweiterte Anwendbarkeit differentialalgebraischer Analysemethoden durch die Nutzung von Ersatzsystemen**

Jan Polzer

Forschungsbericht Nr. 10/98

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Mit Hilfe der Differentialalgebra lassen sich viele systemtheoretische Zusammenhänge untersuchen. Um die Differentialalgebra anwenden zu können, müssen aber bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein. So sind zur Systembeschreibung nur rationale Funktionen in den Differentialgleichungen erlaubt. In dieser Arbeit wird ein Algorithmus vorgestellt, der, ausgehend von einem analytischen System, ein Ersatzsystem liefert, welches den Anforderungen der Differentialalgebra genügt. Anstelle des „Originalsystems“ kann dann das Ersatzsystem untersucht werden. Mit Hilfe des Ersatzsystemalgorithmus ist es somit auch möglich Systeme mit differentialalgebraischen Methoden zu behandeln, die zunächst die Voraussetzungen nicht erfüllen.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundidee des Ersatzsystemalgorithmus</b>	<b>2</b>
<b>3 Ersatzsystemalgorithmus</b>	<b>6</b>
3.1 Trigonometrische Funktionen . . . . .	9
3.2 Wurzelfunktionen . . . . .	14
3.3 Logarithmus- und Exponentialfunktionen . . . . .	15
<b>4 Anwendungsbeispiel: Inverses Pendel</b>	<b>16</b>
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>21</b>
<b>6 Literaturverzeichnis</b>	<b>22</b>
<b>Anhang</b>	<b>23</b>
<b>A Modellbildung des inversen Pendels</b>	<b>23</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
CAS	Computer-Algebra-System
$\Sigma$	System

## Skalare und vektorwertige Größen

$a$	Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des inversen Pendels
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift eines ALS (Vektorfeld)
$a(\mathbf{x})$	Drift eines ALS (skalarwertige Funktion)
$\tilde{\mathbf{a}}$	Hilfsdriftvektorfeld des Ersatzsystems
${}^k \mathbf{a}$	Hilfsdriftvektorfeld des Systemtransformationsalgorithmus
$\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{x}}), {}^k \mathbf{a}({}^k \mathbf{x})$	Drift eines transformierten ALS
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines ALS
$B(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines ALS der Dimension $1 \times 1$
$\tilde{\mathbf{B}}$	Hilfseingangsmatrix des Ersatzsystems
${}^k \mathbf{B}$	Hilfseingangsmatrix des Ersatzsystemalgorithmus
$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}), {}^k \mathbf{B}({}^k \mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines transformierten ALS
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsfunktion eines ALS (Vektorfeld)
$c(\mathbf{x})$	Skalarwertige Ausgangsfunktion
$\tilde{\mathbf{c}}$	Hilfsausgangsfunktion des Ersatzsystems
${}^k \mathbf{c}$	Hilfsausgangsfunktion des Ersatzsystemalgorithmus
$\hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}), {}^k \mathbf{c}({}^k \mathbf{x})$	Ausgangsfunktion eines transformierten ALS (Vektorfeld)
$\mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)})$	$k$ -te zeitliche Ableitung des Systemausgangs
$f_R$	Koeffizient der Reibkraft
$F_r$	Geschwindigkeitsabhängige Reibkraft
$g$	Schwerkraft
$g_i$	Skalarwertige Hilfsfunktion
$i, j, k, \tilde{k}, l$	Laufindizes
$J$	Massenträgheitsmoment bzgl. des Drehpunktes
$K_1$	Drehmomentkonstante
$K_2$	EMK-Konstante
$K_R, K_k, K_0, K_e$	Reibkennlinienparameter
$K_v, K_\varphi, K_x$	Verstärkungsfaktoren
$m$	Dimension des Eingangsvektors, Gesamtmasse des inversen Pendels
$m_p$	Masse des Pendels
$m_w$	Masse des Schlittens
$M_R$	Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment

---

$n$	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$
$n_k$	Dimension des Systemzustandes im $k$ -ten Iterationsschritt des Ersatzsystemalgorithmus
$p$	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
$R_a$	Konstante des Elektromotors
$r_i(\mathbf{x}), \hat{r}_i({}^k\mathbf{x})$	Skalarwertige Hilfsfunktion des Ersatzsystems
$r_0$	Radius der Seiltrommel des inversen Pendels
$t$	Zeit
$\mathbf{u}(t)$	Stellgrößenvektor
$u(t)$	Stellgröße
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor des Systems
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	Zustandsvektor eines transformierten Systems
$x(t)$	Skalare Zustandsvariable, Schlittenposition
$\mathbf{y}(t)$	Systemausgangsvektor
$y(t)$	Skalarer Systemausgang
$\gamma$	Matrixfunktion
$\varphi(t)$	Pendelwinkel
$\sigma$	Anzahl der Hilfsfunktionen bei der ersten Substitution
$\sigma_k$	Anzahl der Hilfsfunktionen bei der ersten Zustandserweiterung im $k$ -ten Iterationsschritt des Ersatzsystemalgorithmus
$\delta$	Gesamtanzahl der benötigten Hilfsfunktionen
$\delta_k$	Gesamtanzahl der benötigten Hilfsfunktionen im $k$ -ten Iterationsschritt des Ersatzsystemalgorithmus

## Mengen

$\emptyset$	Leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit „0“
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

## Operatoren

$\forall$	Für alle
$\subset$	Teilmenge oder gleich
$\cap$	Vereinigung von Mengen
$\cup$	Schnitt von Mengen
$/$	Körpererweiterung
$[.]^T$	Transponierte zu $[.]$
$(\cdot)^{(k)}$	$k$ -te zeitliche Ableitung von $(\cdot)$

# 1 Einleitung

Inzwischen lassen sich viele systemtheoretische Zusammenhänge bei nichtlinearen Systemen mit Hilfe der Differentialalgebra beschreiben. Die Differentialalgebra geht bei der Systembeschreibung von Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen aus (Fliess 1988), welche rational bezüglich ihrer Argumente sein müssen. Aus diesen Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen kann ein Zustandsmodell gebildet werden. Bei der physikalischen Modellbildung geht man normalerweise in der umgekehrten Reihenfolge vor. Dabei werden oft nichtrationale Funktionen verwendet. Die für die Differentialalgebra notwendigerweise rationalen Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen stellen für die Modelle real existierender Anlagen keine Einschränkung dar, da für sie ggf. ein entsprechendes Ersatzsystem gefunden werden kann (Fliess 1987). Besitzt man allerdings kein solches Ersatzsystem, ist es nicht möglich, die Differentialalgebra zur Systemuntersuchung heranzuziehen. Die systematische Konstruktion des Ersatzsystems bildet den Gegenstand dieser Arbeit.

Grundlegende Überlegungen wie ein solches Ersatzsystem aussehen kann, finden sich vielfach in der Literatur, wie z.B. bei Fortell (1995). Diese Grundgedanken ermöglichen jedoch noch keine automatisierte Anwendung. Der in dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus liefert ein Ersatzsystem, welches den Anforderungen der Differentialalgebra genügt. Die Trajektorien der Lösungen des „*Originalsystems*“ stimmen mit den ersten Komponenten der Lösungen des Ersatzsystems überein. Dieser Zusammenhang legitimiert die weitere Untersuchung des Ersatzsystems anstelle des ursprünglichen Systems. Ferner ist dieser Sachverhalt für spätere physikalische Interpretationen wichtig. Der Algorithmus ist so formuliert, daß eine direkte Umsetzung in ein Computer–Algebra–System möglich ist.

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 finden sich einführende Überlegungen in die Problematik hinsichtlich der Konstruktion eines Ersatzsystems. Des weiteren sind dort die Grundideen des Ersatzsystemalgorithmus dargelegt. Der Abschnitt 3 beschreibt den kompletten Ersatzsystemalgorithmus. Es hat sich herausgestellt, daß für alle nichtrationalen Funktionen eine gesonderte Untersuchung durchzuführen ist. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, wollte man alle nur erdenklichen nichtrationalen Funktionen bezüglich einer optimalen Konstruktionsanweisung untersuchen. Daher wird hier nur für die, bei der Modellbildung gängigsten nichtrationalen Funktionen die optimale Konstruktionsanweisung vorgestellt. Als die wichtigsten nichtrationalen Funktionen, bezüglich der Modellbildung, werden hier die trigonometrischen Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens, Arcussinus, Arcuskosinus und Arcustangens), die Wurzelfunktion, die Logarithmus- und die Exponentialfunktion angenommen. Als Anwendungsbeispiel dient im Abschnitt 4 das analytische Modell des inversen Pendels. Den Abschluß bildet eine Zusammenfassung mit Ausblicken in dem Abschnitt 5.

## 2 Grundidee des Ersatzsystemalgorithmus

Ist das Ziel der Modellbildung eines technischen Systems ein ALS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad , \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p,\end{aligned}\tag{2.1}$$

führt dies meist zu nichtrationalen Funktionen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{c}$ , weshalb die Differentialalgebra zumeist nicht direkt zur Systemanalyse herangezogen werden kann. Wie bereits erwähnt, gibt es für die Modelle real existierender Anlagen Ersatzsysteme (Fliess 1987). Diese Ersatzsysteme verwenden nur rationale Funktionen zur Systembeschreibung. So mit ist es möglich, mit differentialalgebraischen Analysemethoden die Ersatzsysteme zu untersuchen.

Zur Einführung in die Problematik der Konstruktion eines Ersatzsystems dient das nachfolgende Beispiel 2.1. In diesem wird ein skalares System mit einem trigonometrischen Term durch Substitutionen und Zustandserweiterungen in ein ALS transformiert, welches den Voraussetzungen der Differentialalgebra genügt.

Im Anschluß an das Beispiel wird die exemplarisch vorgeführte Ersatzsystemkonstruktion ganz allgemein formuliert. Diese allgemeine Darstellung besitzt zwar eine sehr kompakte Form, läßt sich aber noch nicht als programmierbarer Algorithmus auffassen. Aus diesem Grund schließt sich der Abschnitt *Ersatzsystemalgorithmus* an, in dem die Thematik so aufbereitet wird, daß die Ersatzsystemkonstruktion programmiert werden kann.

**Beispiel 2.1:** Für das skalare System der Form (2.1) mit

$$\begin{aligned}a(x) &:= \frac{1}{\sin(x)}, \\ B(x) &:= x \quad \text{und} \\ c(x) &:= 2x\end{aligned}\tag{2.2}$$

ist ein Ersatzsystem zu bestimmen. Dies ist notwendig, um die Differentialalgebra anwenden zu können, da die Funktion  $a(x)$  nichtrational ist. Um das Problem zu beheben, definiert man die Hilfsfunktion  $r_1(x) := \sin(x)$ . Mit dieser Hilfsfunktion läßt sich das Zustandsmodell ( $x_1 := x$ ) um eine neue Zustandsgröße  $x_2(t) := r_1(x_1(t))$  erweitern. Die zeitliche Ableitung der neuen Zustandsgröße ist folgendermaßen darstellbar:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d}{dt}r_1(x_1(t)) = \cos(x_1(t)) \dot{x}_1(t) = \cos(x_1(t)) \left[ \frac{1}{x_2(t)} + x_1(t)u(t) \right] \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}&= \underbrace{\cos(x_1(t)) \frac{1}{x_2(t)}}_{=: q_1(\mathbf{x}(t))} + \underbrace{\cos(x_1(t)) x_1(t)}_{=: Q_1(\mathbf{x}(t))} u(t) .\end{aligned}\tag{2.4}$$

Diese Erweiterung liefert das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2(t)} \\ q_1(x_1(t)) \\ 2x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ Q_1(x_1(t)) \end{bmatrix} u(t) \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2(t)} \\ \cos(x_1(t)) \frac{1}{x_2(t)} \\ 2x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cos(x_1(t)) x_1(t) \end{bmatrix} u(t) \quad (2.6)$$

Durch den auftretenden Kosinusterm in  $\dot{x}_2$  genügt das System (2.6) immer noch nicht den Anforderungen der Differentialalgebra. Eine zusätzliche Hilfsfunktion  $r_2(x_1) := \cos(x_1)$  löst jedoch dieses Problem. Mit dieser Hilfsfunktion wird erneut eine Systemerweiterung über die Zustandsgröße  $x_3(t) := r_2(x_1(t))$  durchgeführt. Die zeitliche Ableitung der neuen Zustandsgröße  $x_3$  lässt sich, ganz analog zur Ableitung von  $x_2$ , durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \frac{d}{dt} r_2(x_1(t)) = -\sin(x_1(t)) \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \left[ \frac{1}{x_2(t)} + x_1(t)u(t) \right] \\ &= \underbrace{-1}_{=: q_2(\mathbf{x}(t))} + \underbrace{(-1)x_2(t) x_1(t)}_{=: Q_2(\mathbf{x}(t))} u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ausdrücken.

Die beiden neuen Zustandsgrößen  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  liefern jetzt das Ersatzsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2(t)} \\ x_3(t) \frac{1}{x_2(t)} \\ q_2(\mathbf{x}(t)) \\ 2x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t)x_1(t) \\ Q_2(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix} u(t), \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2(t)} \\ x_3(t) \frac{1}{x_2(t)} \\ -1 \\ 2x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t)x_1(t) \\ -x_2(t)x_1(t) \end{bmatrix} u(t), \quad (2.9)$$

Das Ersatzsystem (2.9) besitzt in  $x_1(t)$  die gleiche Lösung wie das ursprüngliche System (2.2). Da nur noch rationale Funktionen verwendet werden, ist jetzt die Anwendung der Differentialalgebra auf das Ersatzsystem (2.9) möglich.  $\square$

Das im Beispiel 2.1 angesprochene Problem der Systemtransformation soll nun allgemein gelöst werden. Zunächst sind in  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  alle Terme, die eine Klassifikation als rationale Funktion in  $\mathbf{x}$  verhindern, durch Hilfsfunktionen  $r_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, \dots, \sigma$ ) zu substituieren. Die sich daraus ergebenden Funktionen  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x}))$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x}))$  und  $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x}))$  sind rational in  $\mathbf{x}$  und  $r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})$ . Die Identitäten

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})) &\equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})) &\equiv \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})) &\equiv \mathbf{c}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.10}$$

gelten für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , für die die Funktionen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{c}$  definiert sind.

Eine solche Substitution ist immer möglich, und die Lösungen des Systems (2.1) sind identisch mit denen des Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})) \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Im nächsten Schritt wird das Zustandsmodell um  $\sigma$  Zustände mittels der Vorschrift

$$x_{n+k} := r_k(\mathbf{x}) \quad , \quad k = 1, \dots, \sigma\tag{2.12}$$

erweitert. Die zeitlichen Ableitungen der neu eingeführten Systemzustände lassen sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n+k} &= \frac{d}{dt}r_k(\mathbf{x}) =: \underbrace{q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma})}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{Q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma})}_{\in \mathbb{R}^{1 \times m}} \mathbf{u} \\ &\quad \text{für } k \in \{1, \dots, \sigma\}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Die Definition der Funktionen  $q_k$  und  $Q_k$  ( $k \in 1, \dots, \sigma$ ) soll so verstanden werden, daß in der zeitlichen Ableitung von  $r_k(\mathbf{x})$  alle nichtrationalen Funktionen für die bereits Hilfsfunktionen bzw. neue Systemzustände eingeführt wurden, durch diese zu ersetzen sind. Aus diesem Grund können die neu eingeführten Funktionen  $q_k$  und  $Q_k$  ( $k \in 1, \dots, \sigma$ ) auch von den soeben definierten Systemzuständen  $x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}$  abhängen. Eine Aufteilung der zeitlichen Ableitung der neuen Systemzustände, wie sie in (2.13) vorgenommen wird, ist möglich, da ein ALS zugrundegelegt wird. Diese Voraussetzung ermöglicht nämlich die Substitution von  $\dot{x}_i$  in  $\frac{d}{dt}r_i(\mathbf{x})$  durch  $[a_i(\mathbf{x}) + B_i(\mathbf{x})\mathbf{u}]$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

Insgesamt ergibt sich das System

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \\ q_1(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \\ \vdots \\ q_\sigma(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \\ Q_1(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \\ \vdots \\ Q_\sigma(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}),$$

welches in den ersten  $n$  Zuständen die gleichen Lösungen wie das System (2.1) aufweist. Damit jedoch eine Transformation entsteht, welche den Anforderungen der Differentialalgebra genügt, müssen die zeitlichen Ableitungen der Hilfsfunktionen  $r_1(\mathbf{x}), \dots, r_\sigma(\mathbf{x})$  rationale Ausdrücke ergeben, d.h. es muß

$$\begin{aligned} q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) &\stackrel{!}{\in} \mathbb{R}[\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}] \quad \text{und} \\ Q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}) &\stackrel{!}{\in} \mathbb{R}[\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\sigma}], \forall k = 1, \dots, \sigma \end{aligned} \quad (2.15)$$

gelten. Ist die Bedingung (2.15) nicht erfüllt, kann dieses Problem oft durch die Einführung weiterer Hilfsfunktionen ( $r_{\sigma+1}(\mathbf{x}), \dots, r_\delta(\mathbf{x})$ ) bzw. weiterer Systemzustände behoben werden (vgl. Beispiel 2.1). Sind keine weiteren Hilfsfunktionen notwendig, nimmt  $\delta$  den Wert  $\delta = \sigma$  an.

Gilt jetzt

$$\begin{aligned} q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) &\stackrel{!}{\in} \mathbb{R}[\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}] \quad \text{und} \\ Q_k(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) &\stackrel{!}{\in} \mathbb{R}[\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}], \forall k = 1, \dots, \delta, \end{aligned} \quad (2.16)$$

so stimmen die Lösungen der ersten  $n$  Zustände des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \\ q_1(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \\ \vdots \\ q_\delta(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \\ Q_1(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \\ \vdots \\ Q_\delta(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+\delta}),$$

$$\Leftrightarrow: \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+\delta}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{cases}, \quad (2.18)$$

mit denen des Anfangssystems (2.1) überein. Da die Funktionen  $\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}})$  und  $\hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}})$  rational sind, ist die Anwendung der Differentialalgebra auf das Ersatzsystem (2.18) möglich.

### 3 Ersatzsystemalgorithmus

Die im vorhergehenden Abschnitt dargestellte Idee zur Konstruktion eines Ersatzsystems wird nun als Algorithmus formuliert, damit eine automatisierte Anwendung erfolgen kann. Für die folgenden nichtrationalen Funktionen ist explizit angegeben, wie die optimalen Konstruktionsanweisungen zu gestalten sind:

- Trigonometrische Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens, Arcussinus, Arcuskosinus und Arcustangens),
- die Wurzelfunktion und
- die Logarithmus- und Exponentialfunktion.

Die Konstruktion des Ersatzsystems für ein ALS der Form (2.1) erfolgt iterativ in jeweils drei Teilschritten: Im ersten Teilschritt werden die zur Zustandserweiterung benötigten Hilfsfunktionen bestimmt (vgl. (2.10)). Der zweite Teilschritt erweitert das Zustandsmodell, wobei der Übersichtlichkeit halber in diesem Teilschritt die konkreten Transformationsanweisungen einiger besonders wichtiger nichtrationaler Funktionen teilweise in die Unterabschnitte 3.1, 3.2 und 3.3 ausgelagert werden. Der dritte und letzte Teilschritt überprüft, ob das Ersatzsystem bereits den Anforderungen der Differentialalgebra genügt. Ist dies nicht der Fall, sind noch weitere Iterationsschritte erforderlich.

Im nachfolgenden Algorithmus werden diese Variablen verwendet:

- $n_{k-1}$  : Dimension des Systemzustandes im  $(k-1)$ -ten Iterationsschritt ( $k \in \mathbb{N}_0$ ).
- $\sigma_k$  : Anzahl der Hilfsfunktionen, die für die erste Zustandserweiterung im  $k$ -ten Iterationsschritt notwendig sind.
- $\delta_k$  : Gesamtzahl der neuen Systemzustände im  $k$ -ten Iterationsschritt. Dieser Wert wird ggf. mehrfach in einem Iterationsschritt gesetzt bzw. erhöht.

Zur **Initialisierung** ( $k = 0$ ) setze

$$\left. \begin{array}{lcl} {}^0\boldsymbol{x} & := & \boldsymbol{x} \\ {}^0\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) & := & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \\ {}^0\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) & := & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \\ {}^0\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) & := & \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} =: {}^0\sum \quad \text{und} \quad \delta_0 := 0 . \quad (3.1)$$

Der Transformationsalgorithmus wird mit  $k = 1$  gestartet.

**Iterationsschritt**  $k, k \geq 1$ :

**Teilschritt k.1:** Setze abkürzend die Variable

$$n_{k-1} := n + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i , \quad (3.2)$$

und bestimme für das ALS  ${}^{k-1}\Sigma$  die Hilfsfunktionen  $r_1({}^{k-1}\mathbf{x}), \dots, r_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x})$ , um das System in der Form

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} &= {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, r_1({}^{k-1}\mathbf{x}), \dots, r_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x})) + {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, r_1({}^{k-1}\mathbf{x}), \dots, r_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x}))\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, r_1({}^{k-1}\mathbf{x}), \dots, r_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x})) \end{aligned}$$

mit (3.3)

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\mathbf{x} &\in \mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

schreiben zu können (vgl. (2.11)).

**Teilschritt k.2:** Erweitere das Zustandsmodell  ${}^{k-1}\Sigma$  anhand der Hilfsfunktionen

$r_1({}^{k-1}\mathbf{x}), \dots, r_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x})$  um  $\sigma_k$  Zustände mittels

$${}^{k-1}x_{n_{k-1}+j}(t) := r_j({}^{k-1}\mathbf{x}(t)), \quad j = 1, \dots, \sigma_k . \quad (3.4)$$

Die zeitlichen Ableitungen der mit (3.4) neu eingeführten Systemzustände lassen sich folgendermaßen aufteilen:

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{x}_{n+j} &= \frac{d}{dt}r_j({}^{k-1}\mathbf{x}) \\ &=: \underbrace{q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k})}_{\in \mathbb{R}} + \\ &\quad + \underbrace{Q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k})}_{\in \mathbb{R}^{1 \times m}} \mathbf{u} , \\ k &\in \{1, \dots, \sigma\} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Definition der Funktionen  $q_j$  und  $Q_j$  ( $j \in \{1, \dots, \sigma\}$ ) soll so verstanden werden, daß in der zeitlichen Ableitung von  $r_j(\mathbf{x})$  ( $j \in \{1, \dots, \sigma\}$ ) alle nichtrationalen Funktionen, für die bereits Hilfsfunktionen bzw. neue Systemzustände eingeführt wurden, durch diese zu ersetzen sind. Aus diesem Grund können die neu eingeführten Funktionen  $q_j$  und  $Q_j$  ( $j \in \{1, \dots, \sigma\}$ ) auch von den in (3.4) neu definierten Systemzuständen abhängen. Eine Aufteilung der zeitlichen Ableitung der neuen Systemzustände wie sie in (3.5) vorgenommen wird, ist möglich, da ein ALS zugrundegelegt wird. Diese Voraussetzung ermöglicht nämlich die Substitution von  ${}^{k-1}\dot{x}_i$  in  $\frac{d}{dt}r_i({}^{k-1}\mathbf{x})$  durch  $[{}^{k-1}a_i({}^{k-1}\mathbf{x}) + {}^{k-1}B_i({}^{k-1}\mathbf{x})\mathbf{u}]$  ( $i \in \{1, \dots, n_{k-1}\}$ ).

Die Erweiterung des Systems  ${}^{k-1}\Sigma$  hat (vgl. (2.14)) die Gestalt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\sigma_k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ \vdots \\ q_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ Q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ \vdots \\ Q_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.6) \\ \mathbf{y} &= {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}). \end{aligned}$$

Ausgangsbelegung der Variable  $\delta_k$  für die erneute Systemerweiterung ist

$$\delta_k := \sigma_k. \quad (3.7)$$

Die neuen Zustandsgrößen  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+i}$ , deren zeitliche Ableitung  $[q_i + Q_i \mathbf{u}]$  keinen rationalen Ausdruck darstellt, erfordern weitere Transformationsmaßnahmen. In den Unterabschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 ist für die gebräuchlichsten nichtlinearen Funktionen angegeben, wie die optimale Konstruktionsanweisung aussieht. Je nachdem welche Maßnahme durchgeführt wird, erweitert sich ggf. nochmals das Zustandsmodell. Eine Erweiterung des Zustandsmodells führt zu einem neuen Wert in der Variable  $\delta_k$  ( $\delta_k \geq \sigma_k$ ). In einigen Fällen werden im Unterabschnitt 3.1 die neuen Funktionen  $\hat{q}_i$  und  $\hat{Q}_i$  ( $i \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ) gebildet. Alle Funktionen  $\hat{q}_j$  und  $\hat{Q}_j$  ( $j \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ), welche **nicht** in dem Unterabschnitt 3.1 explizit definiert wurden, sind über die Identitäten

$$\begin{aligned} \hat{q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) &:= q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}), \\ \hat{Q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) &:= Q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}), \\ j &\in \{1, \dots, \delta_k\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

einzuführen. Insgesamt resultiert aus diesem Iterationsschritt (vgl. (2.17)) das System

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \hat{q}_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{q}_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \hat{Q}_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{Q}_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.9) \\
\mathbf{y} &= {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k})
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow: \left\{ \begin{array}{l} {}^k\dot{\mathbf{x}} = {}^k\mathbf{a}({}^k\mathbf{x}) + {}^k\mathbf{B}({}^k\mathbf{x}) {}^k\mathbf{u} \quad {}^k\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_{k-1}+\delta_k}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} = {}^k\mathbf{c}({}^k\mathbf{x}) \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{array} \right\} =: {}^k\sum. \quad (3.10)$$

**Teilschritt k.3:** Der Ersatzsystemalgorithmus kann abgebrochen werden, wenn

$$\hat{q}_i({}^k\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[{}^k\mathbf{x}] \quad \wedge \quad \hat{Q}_i({}^k\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times m}[{}^k\mathbf{x}] \quad \forall i \in \{1, \dots, \delta_k\} \quad (3.11)$$

gilt. Ist (3.11) nicht erfüllt, fährt man mit dem Teilschritt k.1 fort.  $\square$

### 3.1 Trigonometrische Funktionen

Dieser Unterabschnitt ist als Teil des Ersatzsystemalgoritmus (Teilschritt k.2) zu sehen und nicht als autonome Konstruktionsanleitung. Im folgenden wird dargelegt, wie die Zustandserweiterungen bzw. Substitutionen für die nichtrationalen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens, Arcussinus, Arcuskosinus und Arcustangens vorzunehmen sind.

**Sinus:** Jede neue Zustandsgröße  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+i}$  ( $i \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ) in (3.4), die einem Sinusterm der Form

$$\begin{aligned}
{}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \sin(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})), \\
g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \delta_k\}
\end{aligned} \quad (3.12)$$

entspricht und deren zeitliche Ableitung nichtrational ist, d. h.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= q_i({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\
&+ Q_i({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \mathbf{u} \\
&\notin \mathbb{R}[{}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}],
\end{aligned} \quad (3.13)$$

erfordert eine weitere Hilfsfunktion und einen neuen Systemzustand. Jede neue Zustandsgröße der Form (3.12) erfordert eine Systemerweiterung. Die daraus resultierenden Systemerweiterungen seien hier für eine Zustandsgröße  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+j}$  ( $j \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ), die die Bedingungen (3.12) und (3.13) erfüllt, dargestellt:

Eingeführt werden die neue Hilfsfunktion  $r_{\delta_k+1}$  und der neue Systemzustand  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  durch

$$r_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}) := \cos(g_j({}^{k-1}\boldsymbol{x})) \quad ; \quad {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1} := r_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}). \quad (3.14)$$

Die zeitliche Ableitung der neuen Zustandsvariable  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  definiert die Funktionen  $\hat{q}_{\delta_k+1}$  und  $\hat{Q}_{\delta_k+1}$  durch

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k+1} &= -\sin(g_j({}^{k-1}\boldsymbol{x})) \dot{g}_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}) = -{}^{k-1}x_{n_{k-1}+j} \dot{g}_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}) \\ &=: \hat{q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\ &\quad + \hat{Q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \boldsymbol{u}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Der Kosinusterm in

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n_{k-1}+j} &= q_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\ &\quad + Q_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \boldsymbol{u} \\ &= \cos(g_j({}^{k-1}\boldsymbol{x})) \dot{g}_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ist durch  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  zu ersetzen. Durch diese Substitution werden die Hilfsfunktionen  $\hat{q}_j$  und  $\hat{Q}_j$  eingeführt:

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+j} &= {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1} \dot{g}_j({}^{k-1}\boldsymbol{x}) \\ &=: \hat{q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) + \\ &\quad + \hat{Q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\boldsymbol{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \boldsymbol{u}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Insgesamt resultiert das System

$$\begin{bmatrix} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+j} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \\ \vdots \\ q_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ q_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ Q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{Q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \\ \vdots \\ Q_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ Q_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{y} = {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) .$$

Pro Zustandsgröße, die (3.12) und (3.13) erfüllt, muß  $\delta_k$  um eins erhöht werden, dies geschieht nach der jeweiligen Systemerweiterung (3.18).

Ganz analog zum Sinus wird der Kosinus transformiert:

**Kosinus:** Jede neue Zustandsgröße  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+i}$  ( $i \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ) in (3.4), die einem Kosinusterm der Form

$$\begin{aligned}
{}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \cos(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})) , \\
g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \delta_k\}
\end{aligned} \quad (3.19)$$

entspricht und deren zeitliche Ableitung nichtrational ist, d. h.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= q_i({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\
&\quad + Q_i({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \mathbf{u} \\
&\notin \mathbb{R}[{}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}] ,
\end{aligned} \quad (3.20)$$

erfordert eine weitere Hilfsfunktion und einen neuen Systemzustand. Jede neue Zustandsgröße der Form (3.19) erfordert eine Systemerweiterung. Die daraus resultierenden Systemerweiterungen seien hier für eine Zustandsgröße  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+j}$  ( $j \in \{1, \dots, \delta_k\}$ ), die die Bedingungen (3.19) und (3.20) erfüllt, dargestellt:

Eingeführt werden die neue Hilfsfunktion  $r_{\delta_k+1}$  und der neue Systemzustand  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  durch

$$r_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}) := \sin(g_j({}^{k-1}\mathbf{x})) \quad \wedge \quad {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1} := r_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}) . \quad (3.21)$$

Die zeitliche Ableitung der neuen Zustandsvariable  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  definiert die Funktionen  $\hat{q}_{\delta_k+1}$  und  $\hat{Q}_{\delta_k+1}$  durch

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k+1} &= \cos(g_j({}^{k-1}\mathbf{x})) \dot{g}_j({}^{k-1}\mathbf{x}) = {}^{k-1}x_{n_{k-1}+j} \dot{g}_j({}^{k-1}\mathbf{x}) \\ &=: \hat{q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\ &\quad + \hat{Q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der Sinusterm in

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n_{k-1}+j} &= q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) + \\ &\quad + Q_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \mathbf{u} \\ &= -\sin(g_j({}^{k-1}\mathbf{x})) \dot{g}_j({}^{k-1}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ist durch  ${}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}$  zu ersetzen. Durch diese Substitution werden die Hilfsfunktionen  $\hat{q}_j$  und  $\hat{Q}_j$  eingeführt:

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+j} &= {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1} \dot{g}_j({}^{k-1}\mathbf{x}) \\ &=: \hat{q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) + \\ &\quad + \hat{Q}_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Insgesamt führt dies zu dem System

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+j} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\delta_k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \\ \vdots \\ q_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ q_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ Q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ \vdots \\ \hat{Q}_j({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \\ \vdots \\ Q_{\delta_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) \\ Q_{\delta_k+1}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k+1}) \end{bmatrix} \mathbf{u} , \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y} = {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\delta_k}) .$$

Für jede Zustandsgröße, die (3.19) und (3.20) erfüllt, muß  $\delta_k$  um eins erhöht werden, dies geschieht nach der jeweiligen Systemerweiterung (3.25).

**Tangens:** Wird der Tangens in (3.4) verwendet und haben die neuen Systemzustände die Form

$$\begin{aligned} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \tan(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})) , \\ g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), i \in \{1, \dots, \sigma_k\} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

dann sind keine weiteren Transformationen erforderlich. Denn die Ableitung ergibt

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = [1 + g_i^2({}^{k-1}x_{n_{k-1}+i})] \dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x}) , \quad (3.27)$$

was, von  $\dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x})$  abgesehen, ein polynomiauer Ausdruck ist. Im nächsten Iterationsschritt muß geprüft werden, ob  $\dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x})$  einer Transformation bedarf.

Nun zu einem trigonometrischen Term, der für die Approximation der Reibung eine besonders wichtige Rolle spielt, dem Arcustangens.

**Arcustangens:** Die Verwendung des Arcustangens im System (3.4) durch

$$\begin{aligned} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \arctan(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})) , \\ g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

erfordert bezüglich des Arcustangens keine weiteren Transformationen. Denn die Ableitung der neuen Systemzustände ergibt

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = \frac{1}{1 + g_i^2({}^{k-1}\mathbf{x})} \dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x}) , \quad (3.29)$$

was, von  $\dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x})$  und  $g_i({}^{k-1}\mathbf{x})^2$  abgesehen, ein rationaler Ausdruck ist. Im nächsten Iterationsschritt muß geprüft werden, ob die beiden eben genannten Terme einer Transformation bedürfen.

**Arcussinus:** Wird der Arcussinus in den neu eingeführten Zuständen in (3.4) mit

$$\begin{aligned} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \arcsin(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})) , \\ g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

verwendet, so besitzt die Ableitung die Gestalt

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = \frac{1}{\sqrt{1 - g_i^2({}^{k-1}\mathbf{x})}} \dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x}) . \quad (3.31)$$

Dies ist zwar kein rationaler Ausdruck, es muß jedoch nur die Wurzelfunktion ersetzt werden, was im nächsten Iterationsschritt geschieht. Diese Transformation ist im Unterabschnitt 3.2 beschrieben. Die Frage, ob  $\dot{g}_i(\mathbf{x})$  und  $g_i^2(\mathbf{x})$  rational sind, wird im nächsten bzw. übernächsten Iterationsschritt geklärt.

**Arcuskosinus:** Der Arcuskosinus weist prinzipiell die gleichen Eigenschaften wie der Arcussinus auf, d.h. sind in den neuen Systemzuständen Terme in (3.4) der Form

$$\begin{aligned} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \arccos(g_i({}^{k-1}\mathbf{x})) , \\ g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

enthalten, so ergibt sich als Ableitung

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = \frac{-1}{\sqrt{1 - g_i^2({}^{k-1}\mathbf{x})}} \dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x}) . \quad (3.33)$$

Dies ist zwar kein rationaler Ausdruck, es muß aber wie beim Arcussinus nur die Wurzelfunktion ersetzt werden. Eine Aufgabe, die im nächsten Iterationsschritt durchgeführt und im Unterabschnitt 3.2 behandelt wird. Die Frage, ob  $\dot{g}_i(\mathbf{x})$  und  $g_i^2(\mathbf{x})$  rational sind, wird wie beim Arcussinus im nächsten bzw. übernächsten Iterationsschritt geklärt.

### 3.2 Wurzelfunktionen

Dieser Unterabschnitt ist wieder als Element des Ersatzsystemalgorithms, Teilschritt k.2, zu verstehen.

Bei der Verwendung der Wurzelfunktion ist genauso vorzugehen wie bei der Verwendung des Arcustanges, denn alle neuen Systemzustände in (3.4) der Form

$$\begin{aligned} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} &= r_i({}^{k-1}\mathbf{x}) = \sqrt{g_i({}^{k-1}\mathbf{x})} , \\ g_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

besitzen die zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = \frac{1}{2g_i({}^{k-1}\mathbf{x})} \dot{g}_i({}^{k-1}\mathbf{x}) . \quad (3.35)$$

Bis auf die an dieser Stelle noch ungeklärten Frage, ob  $g_i(\mathbf{x})$  bzw.  $\dot{g}_i(\mathbf{x})$  rational sind, ergibt  $\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i}$  einen rationalen Ausdruck und bedarf daher keiner weiteren Transformation.  $g_i(\mathbf{x})$  und  $\dot{g}_i(\mathbf{x})$  werden im nächsten Iterationsschritt untersucht.

### 3.3 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Dieser Unterabschnitt ist als Teil des Ersatzsystemalgorithmus zu sehen, nicht als autonome Konstruktionsanleitung, er bezieht sich auf den Teilschritt  $k.2$ .

Die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion bereiten keine Schwierigkeiten, denn die neuen Systemzustände in (3.4), welche durch

$${}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = r_i({}^{k-1}\boldsymbol{x}) = e^{g_i({}^{k-1}\boldsymbol{x})}, \quad g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \quad (3.36)$$

gegeben sind, besitzen die zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} \dot{g}_i({}^{k-1}\boldsymbol{x}). \quad (3.37)$$

Die neuen Zustandsvariablen in (3.4) mit

$${}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = r_i({}^{k-1}\boldsymbol{x}) = \ln(g_i({}^{k-1}\boldsymbol{x})), \quad g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_{k-1}}, \mathbb{R}), \quad i \in \{1, \dots, \sigma_k\} \quad (3.38)$$

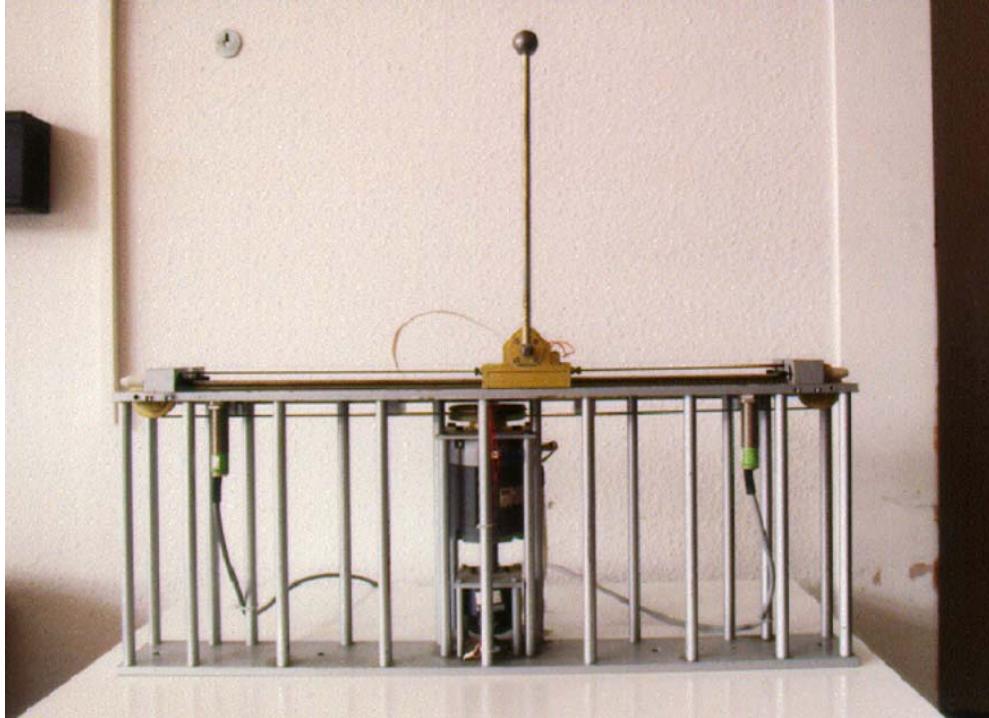
weisen die Ableitung

$$\frac{d}{dt} {}^{k-1}x_{n_{k-1}+i} = \frac{1}{g_i({}^{k-1}\boldsymbol{x})} \dot{g}_i({}^{k-1}\boldsymbol{x}) \quad (3.39)$$

auf. In beiden Fällen ist in diesem Iterationsschritt keine Transformation notwendig. Der nächste Durchgang zeigt, ob  $g_i(\boldsymbol{x})$  und  $\dot{g}_i(\boldsymbol{x})$  weiter zu bearbeiten sind.

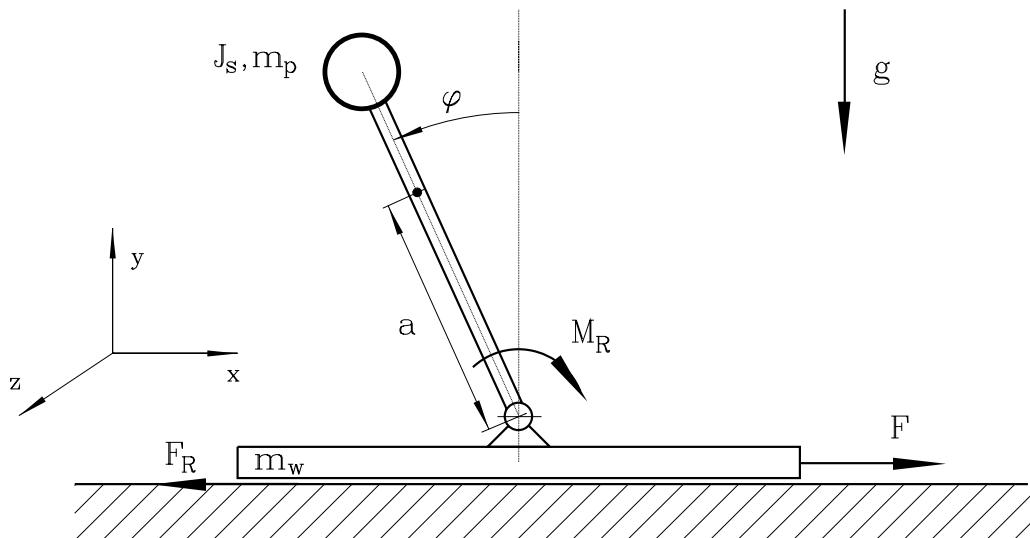
## 4 Anwendungsbeispiel: Inverses Pendel

Im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg ist der Versuchsstand *inverses Pendel* vorhanden (vgl. Bild 4.1).



**Bild 4.1:** Versuchsstand *inverses Pendel*

In dem schematischen Versuchsaufbau (Bild 4.2) sind die auftretenden physikalischen Kräfte eingetragen. Die Modellbildung wurde aber in den Anhang ausgelagert.



**Bild 4.2:** Skizze des Versuchsaufbaus

Das inverse Pendel lässt sich, wie im Anhang A beschrieben, durch ein Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{4.1}$$

beschreiben. Darin sind

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{J K_1 K_2 x_2}{Ra r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_r(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \\ x_4 \\ -\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{Ra r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{Ra r_0 m_P a \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ c(\mathbf{x}(t)) &:= x_3(t).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dieses Modell ist aufgrund der nichtrationalen Funktionen nicht direkt mit differentialalgebraischen Methoden analysierbar. Aus diesem Grund wird auf das Zustandsmodell der Ersatzsystemalgorithmus angewendet.

Zur Initialisierung setze mit den Bezeichnungen aus (4.1):

$$\left. \begin{array}{lcl} {}^0\mathbf{x} & := & \mathbf{x} \\ {}^0\mathbf{a}(\mathbf{x}) & := & \mathbf{a}(\mathbf{x}) \\ {}^0\mathbf{B}(\mathbf{x}) & := & \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ {}^0c(\mathbf{x}) & := & c(\mathbf{x}) \\ {}^0u & := & u \end{array} \right\} =: {}^0\sum \quad \text{und} \quad \delta_0 := 0 \quad .\tag{4.3}$$

### Iterationsschritt 1

1.1 : Es ist  $n_0 = n = 4$  und  $m = 1$ . Das Ausgangssystem  ${}^0\Sigma$  enthält als nichtrationale Terme nur die trigonometrischen Funktionen  $\sin({}^0x_3)$  und  $\cos({}^0x_3)$  in den Funktionen  ${}^0\mathbf{a}({}^0\mathbf{x}_0)$  und  ${}^0\mathbf{B}({}^0\mathbf{x})$ . Die Funktion  $F_R(x_2)$  kann zwar nichtrational sein, wird aber zunächst formal als nicht näher spezifizierte Funktion  $F_R(x_2)$  mitgeführt. Aus diesem Sachverhalt ergeben sich die beiden Hilfsfunktionen

$$r_1({}^0\mathbf{x}) := \sin({}^0x_3) \quad \text{und} \quad (4.4)$$

$$r_2({}^0\mathbf{x}) := \cos({}^0x_3), \quad (4.5)$$

d.h.  $\sigma_1$  nimmt den Wert  $\sigma_1 = 2$  an.

1.2 Erweitere das Zustandsmodell  ${}^0\Sigma$  anhand der Hilfsfunktionen  $r_1({}^0\mathbf{x})$  und  $r_2({}^0\mathbf{x})$  um  $\sigma_1 = 2$  Zustände mittels

$${}^0x_{n+j}(t) := r_j({}^0\mathbf{x}(t)), \quad j = 1, 2. \quad (4.6)$$

Die zeitlichen Ableitungen der neu eingeführten Systemzustände definieren die Funktionen  $q_i$  und  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} {}^0\dot{x}_{n+1} &= \frac{d}{dt}r_1({}^0x_3) = \cos({}^0x_3){}^0\dot{x}_3 \\ &= \cos({}^0x_3){}^0x_4 + \cos({}^0x_3) \cdot 0 \cdot u \\ &= {}^0x_{n+2}{}^0x_4 + 0 \cdot u \\ &=: q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) + Q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) u \quad \text{und} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{x}_{n+2} &= \frac{d}{dt}r_2({}^0x_3) = -\sin({}^0x_3){}^0\dot{x}_3 \\ &= -\sin({}^0x_3){}^0x_4 - \sin({}^0x_3) \cdot 0 \cdot u \\ &= -{}^0x_{n+2}{}^0x_4 + 0 \cdot u \\ &=: q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) + Q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) u. \end{aligned}$$

Die Transformation des Systems  ${}^0\Sigma$  hat gemäß Gleichung (3.6) allgemein die Gestalt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^{k-1}\dot{\mathbf{x}} \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ {}^{k-1}\dot{x}_{n_{k-1}+\sigma_k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{a}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ \vdots \\ q_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} {}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ Q_1({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \\ \vdots \\ Q_{\sigma_k}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y} = {}^{k-1}\tilde{\mathbf{c}}({}^{k-1}\mathbf{x}, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+1}, \dots, {}^{k-1}x_{n_{k-1}+\sigma_k}) .$$

In diesem Fall erhält man

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{x}} \\ {}^0\dot{x}_{4+1} \\ {}^0\dot{x}_{4+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\tilde{\mathbf{a}}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{4+1}, {}^0x_{4+2}) \\ q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) \\ q_2({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0\tilde{\mathbf{B}}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{4+1}, {}^0x_{4+2}) \\ Q_1({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) \\ Q_2({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{n+1}, {}^0x_{n+2}) \end{bmatrix} u , \quad (4.9)$$

$$y = {}^0\tilde{c}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_{4+1}, {}^0x_{4+2}) .$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{x}} \\ {}^0\dot{x}_5 \\ {}^0\dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\tilde{\mathbf{a}}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_5, {}^0x_6) \\ {}^0x_6 {}^0x_4 \\ -{}^0x_5 {}^0x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0\tilde{\mathbf{B}}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_5, {}^0x_6) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u , \quad (4.10)$$

$$y = {}^0\tilde{c}({}^0\mathbf{x}, {}^0x_5, {}^0x_6).$$

Dadurch, daß der Sinus und der Kosinus gleichzeitig im ursprünglichen System enthalten sind, entfällt eine weitere Transformation dieser trigonometrischen Funktionen (die notwendigen Hilfsfunktionen für das Ersetzen in den zeitlichen Ableitungen der neuen Systemzustände sind bereits im ersten Schritt eingeführt worden).

Das System (4.10) besitzt wieder die Form eines ALS und definiert das Zustandsmodell

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1\dot{\mathbf{x}} = {}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + {}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x})u , \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4+2}, u \in \mathbb{R} \\ y = {}^1\mathbf{c}({}^1\mathbf{x}) , \quad y \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} =: \sum_1 \quad (4.11)$$

mit

$${}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}):= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{J K_1 K_2 {}^1x_2}{Ra r_\theta^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_R({}^1x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R {}^1x_4 {}^1x_6}{m_P a} + g {}^1x_6 {}^1x_5 - \frac{J {}^1x_4^2 {}^1x_5}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \\ x_4 \\ -\frac{f_R {}^1x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6}{Ra r_\theta^2 m_P a} - \frac{{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{m_P a} - {}^1x_4^2 {}^1x_6 {}^1x_5 + \frac{g {}^1x_5}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \\ {}^1x_6 {}^1x_4 \\ - {}^1x_5 {}^1x_4 \end{bmatrix} ,$$

$${}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 {}^1x_6}{Ra r_0 m_P a \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$${}^1c({}^1\mathbf{x}) := {}^1x_3 .$$

1.3 : Die Abbruchbedingung

$$\hat{q}_i({}^1\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \wedge \quad \hat{Q}_i({}^1\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[{}^1\mathbf{x}], \quad \forall i \in \{1, \dots, \delta_1\} \quad (4.12)$$

ist erfüllt, da

$$\begin{aligned} q_1({}^1\mathbf{x}) &= {}^1x_6 {}^1x_4 , & Q_1({}^1\mathbf{x}) &= 0 , \\ q_2({}^1\mathbf{x}) &= -{}^1x_5 {}^1x_4 \quad \text{und} \quad Q_2({}^1\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

rationale Funktionen darstellen.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Um differentialalgebraische Methoden zur Systemanalyse heranziehen zu können, müssen die zugrundeliegenden Zustandsmodelle bestimmten Voraussetzungen genügen. So dürfen bei der Systembeschreibung nur rationale Funktionen Verwendung finden. Bei der physikalischen Modellbildung werden meist aber auch nichtrationale Funktionen, wie etwa trigonometrische Funktionen, benötigt. Daher ist es nicht möglich, auf diese Modelle direkt differentialalgebraische Methoden anzuwenden. In diesen Fällen ergibt sich die Notwendigkeit, ein Ersatzsystem zu konstruieren, welches statt dessen analysiert wird.

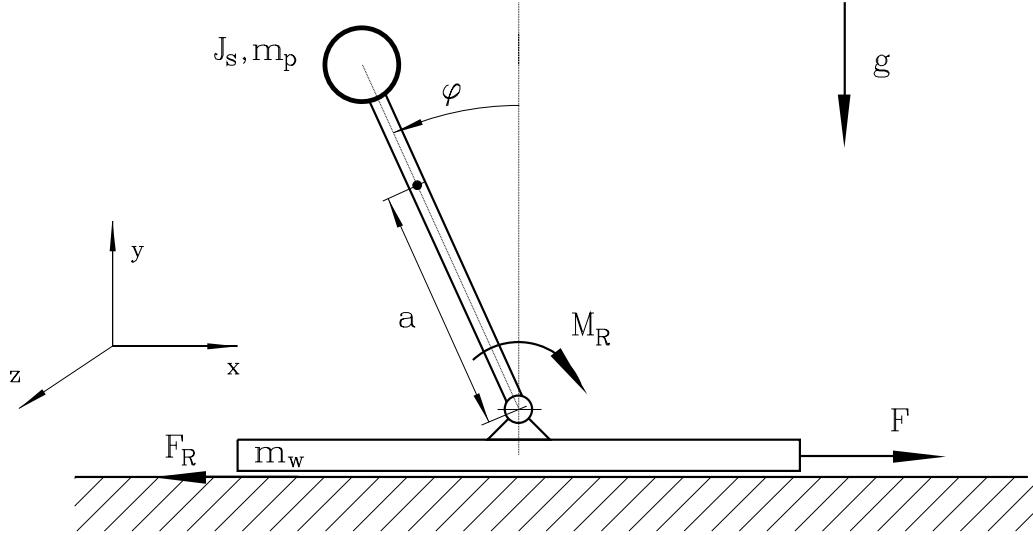
Ersatzsysteme müssen zwei Eigenschaften besitzen: Zum einen muß sich bei einer physikalischen Interpretation der Dynamik das gleiche Verhalten wie bei dem „Originalsystem“ ergeben, zum anderen müssen die Voraussetzungen der Differentialalgebra erfüllt sein. Diese Anforderungen erfüllen alle Ersatzsysteme, die mit dem hier vorgestellten Ersatzsystemalgorithmus bestimmt werden. Es ist jetzt also möglich, systematisch, und ohne „herumzuprobieren“, für die überwiegende Mehrzahl der praxisrelevanten Modelle ein Ersatzsystem zu bestimmen.

Der Ersatzsystemalgorithmus ist so formuliert, daß er mit einem Computer-Algebra-System, wie z. B. MAPLE<sup>©</sup>, programmiert werden kann. Diese programmtechnische Umsetzung soll Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

## 6 Literaturverzeichnis

- Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew.** 1987. *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner.
- Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle und C. H. Moog.** 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control* 27(3). 658–672.
- Fliess, M.** 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München. 114–118.
- Fliess, M.** 1988. Nonlinear Control Theory and Differential Algebra. *Modeling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1989. Automatique et corps différentiels. *Forum Mathematik* 1. 227–238.
- Fliess, M. und S. T. Glad.** 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.
- Fortell, H.** 1995. *Algebraic Approaches to Normal Forms and Zero Dynamics*. Dissertation. Linköping-Universität, Schweden.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Johnson, J.** 1969. Kähler differentials and differential algebra. *Ann. of Math* 89. 92–98.
- Meyberg, K.** 1976. *Algebra Teil 1*. München: Carl Hanser.
- Meyberg, K.** 1980. *Algebra Teil 2*. 2. Auflage. München: Carl Hanser.
- Ritt, J. F.** 1950. *Differential Algebra*. New York/USA: Amer. Math. Soc.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Sossna, P.** 1990. *Entwurf und Erprobung einer digitalen Zustandsregelung für ein inverses Pendel*. Studienarbeit. MSRT. Universität Duisburg.
- Stöcker, H.** 1993. *Taschenbuch mathematische Formeln und moderner Verfahren*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht 10/92. MSRT. Universität Duisburg.

## A Modellbildung des inversen Pendels



Die Bewegungsgleichungen des Wagens mit dem Pendel können über die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (A.1) hergeleitet werden. Eine ausführliche Beschreibung dieser Vorgehensweise findet sich in diversen Studien- und Diplomarbeiten, u. a. in Sossna (1990).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n , \quad (\text{A.1})$$

mit

- $n$  : Anzahl der Freiheitsgrade,
  - $T$  : kinetische Energie des mechanischen Systemanteils,
  - $q_j$  : verallgemeinerte Koordinate und
  - $Q_j$  : verallgemeinerte Kraft bezüglich dieser Koordinate,
- für die gilt:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (\text{A.2})$$

Dabei ist  $N$  die Anzahl der am System angreifenden äußeren Kräfte.

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m_P a \dot{x} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\begin{aligned} m &= m_w + m_p , \\ J &= m_P a^2 + J_s . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Insgesamt folgen aus den Lagrange Gleichungen (A.1) die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) - m_p a (\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t)) &= F(t) - F_R(\dot{x}(t)) , \\ J \ddot{\varphi}(t) - m_p a (\dot{x}(t) \cos \varphi(t) + g \sin \varphi(t)) &= -M_R(\dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mit den Konstanten

- $m = m_w + m_P$  : gesamte bewegte Masse,
- $m_P$  : Masse des Pendels,
- $a$  : Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des Pendels,
- $J$  : Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes sowie
- $g$  : Schwerkraft

und den geschwindigkeitsabhängigen Größen Reibkraft  $F_R(\dot{x}(t))$  und Reibmoment  $M_R(\dot{\varphi}(t))$ . Die eingehende Kraft  $F(t)$  des Seilzuges lässt sich über die Differentialgleichung des Elektromotors

$$F(t) = \frac{K_1}{R_a r_0} u_a(t) - \frac{K_1 K_2}{R_a r_0^2} \dot{x}(t) \quad (\text{A.6})$$

berechnen.

Das Differentialgleichungssystem (A.1) ist mit den Zuständen

- $x_1(t) = x(t)$  Schlittenposition,
- $x_2(t) = \dot{x}(t)$  Schlittengeschwindigkeit,
- $x_3(t) = \varphi(t)$  Pendelwinkel und
- $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$  Winkelgeschwindigkeit

in das äquivalente System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

transformierbar.

Hier:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\frac{J K_1 K_2 x_2}{R_a r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_r(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{-\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{R_a r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{Ra r_0 m_P a \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \tag{A.8} \\
 c(\mathbf{x}(t)) &:= x_3(t) .
 \end{aligned}$$