

# Differentialgeometrische Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels

Jan Polzer

Forschungsbericht Nr. 6/99

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Nulldynamik ist eine wichtige Systemkenngroße. Beispielsweise ist eine stabile Nulldynamik Voraussetzung für viele, insbesondere nichtlineare Regelungskonzepte. In diesem Bericht findet sich die Berechnung der Nulldynamik des inversen Pendels. Grundlage der Berechnung ist der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995). Das über die Nulldynamik vorhergesagte Systemverhalten wird Messungen an einem Versuchsträger gegenübergestellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Definitionen der Nulldynamik</b>	<b>2</b>
<b>3 Differentialgeometrischer Nulldynamikalgorithmus</b>	<b>4</b>
<b>4 Nulldynamik des inversen Pendels</b>	<b>8</b>
4.1 Modellbeschreibung . . . . .	9
4.2 Differentialgeometrische Berechnung . . . . .	10
4.3 Meßergebnisse . . . . .	13
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>16</b>
<b>6 Literaturverzeichnis</b>	<b>17</b>
 <b>Anhang</b>	 <b>18</b>
<b>A Funktionsklassen</b>	<b>18</b>
<b>B Modellbildung des inversen Pendels</b>	<b>19</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	Analytisches System

## Skalare und vektorwertige Größen

$a$	Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des inversen Pendels
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift eines ALS (Vektorfeld)
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines ALS
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsfunktion eines ALS (Vektorfeld)
$c(\mathbf{x})$	Skalarwertige Ausgangsfunktion
$\mathbf{c}_k(\mathbf{x})$	Für den differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus relevanter Vektorfeld
$\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$	Nulldynamikvektorfeld eines ALS
$f_R$	Koeffizient der Reibkraft
$F_r$	Geschwindigkeitsabhängige Reibkraft
$g$	Erdbeschleunigung
$g_i$	Skalarwertige Hilfsfunktion
$J$	Massenträgheitsmoment bez. des Dreipunktes
$k$	Laufindex
$K_1$	Drehmomentkonstante
$K_2$	EMK-Konstante
$K_R, K_k, K_0, K_e$	Reibkennlinienparameter
$K_v, K_\varphi, K_x$	Verstärkungsfaktoren
$m$	Dimension des Eingangsvektors, Gesamtmasse des inversen Pendels
$m_p$	Masse des Pendels
$m_w$	Masse des Schlittens
$M_R$	Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment
$n$	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$
$n_k$	Dimension des Systemzustandes im $k$ -ten Iterationsschritt des Systemtransformationsalgorithmus
$p$	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_k(\mathbf{x}), \mathbf{R}_k(\mathbf{x})$	Für den Algorithmus von Isidori (1995) relevante Matrixfunktionen
$R_a$	Konstante des Elektromotors
$r_k$	Rang der Matrix $L_B \mathbf{c}_k(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x}$ aus $\mathcal{M}_k^c$
$r_0$	Radius der Seiltrommel des inversen Pendels
$\mathbf{S}_k$	Für den Algorithmus von Isidori (1995) relevante Matrix
$s_k$	Rang der Matrix $\mathbf{S}_k \Phi_{k-1}(\mathbf{x})$ in der Umgebung $U_{k-1}$

$t$	Zeit
$\mathbf{u}(t)$	Stellgrößenvektor
$u(t)$	Stellgröße
$\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$	Ausgangsignalnullende Zustandsrückführung
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor des Systems
$x(t)$	Skalare Zustandsvariable, Schlittenposition
$\mathbf{y}(t)$	Systemausgangsvektor
$y(t)$	Skalarer Systemausgang
$\gamma$	Matrixfunktion
$\Phi_k(\mathbf{x})$	Für den Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) relevantes Vektorfeld
$\varphi(t)$	Pendelwinkel

## Mengen

$\emptyset$	Leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit „0“
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$U_k, \tilde{U}_k$	Umgebung im $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{Z}^*$	Teilmannigfaltigkeit des Zustandsraums, es ist $\mathcal{Z}^* \subset \mathbb{R}^n$ .

## Operatoren

$J(\mathbf{f}, \mathbf{x})$	Jakobimatrix der Funktion $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{x}$
$L_{\mathbf{g}} f(\mathbf{x})$	Lie-Ableitung der Funktion $f$ entlang der Funktion $\mathbf{g}$ durch
	$L_{\mathbf{g}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x})$
$L_{\mathbf{g}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$	Erweiterung der Lie-Ableitung gemäß der Vorschrift:
	$L_{\mathbf{g}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [L_g f_1(\mathbf{x}), L_g f_2(\mathbf{x}), \dots]^T$
$L_B \mathbf{f}(\mathbf{x})$	Erweiterung der Lie-Ableitung gemäß der Vorschrift:
	$L_B \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [L_{b_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}), L_{b_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \dots]$
Rang( $\cdot$ )	Rang von ( $\cdot$ )
$\forall$	Für alle
$\subset$	Teilmenge oder gleich
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\cap$	Schnitt von Mengen
$(\cdot)^{(k)}$	$k$ -te zeitliche Ableitung von ( $\cdot$ )

# 1 Einleitung

Für viele Regelungskonzepte ist die Frage nach dem Stabilitätsverhalten der Nulldynamik entscheidend. Liegt eine instabile Nulldynamik vor, ist z. B. die exakte Ein- / Ausgangslinearisierung, die Modellfolgeregelung und die High-Gain-Regelung nur sehr eingeschränkt oder gar nicht verwendbar. Da eine instabile Nulldynamik nicht durch eine Ausgangsrückführung kompensierbar ist (Kailath 1980, Schwarz 1979), müssen in so einem Falle andere Konzepte, wie sie z. B. bei Schwarz und Senger (1999) und Benvenuti u. a. (1993) angegeben sind, Anwendung finden. Dies begründet die Berechnung und Untersuchung der Nulldynamik eines inversen Pendels in dem vorliegenden Bericht. Im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Gerhard-Mercator-Universität GH Duisburg existiert der in Bild 1.1 abgebildete Versuchsstand *Inverses Pendel*. Im Gegensatz zu diesem Prüfstand bieten viele technische Systeme nicht die Möglichkeit, alle relevanten Systemzustände wie z. B. Position, Druck, Winkel, Geschwindigkeit meßtechnisch zu erfassen. Diese Systemzustände beeinflussen zwar das dynamische Verhalten, stehen aber als Meßgröße nicht direkt zur Verfügung. Daher gibt es bei der Modellbildung meist einen Systemausgang, welcher nur die gemessenen Systemzustände enthält. In diesem Bericht steht am Systemausgang lediglich der Pendelwinkel zur Verfügung. Ähnlich der Aufgabe eines Jongleurs soll hier die Regelung für ein senkrecht bzw. aufrecht stehendes Pendel sorgen, d. h. der Systemausgang soll null sein. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Struktureigenschaft „Nulldynamik“. Die Nulldynamik liefert Einblicke in das dynamische Verhalten der „inneren“, also nicht gemessenen Systemzustände. Konkret heißt das, daß Aussagen über das dynamische Verhalten der nicht gemessenen Zustandsgröße „Schlittenposition“ formulierbar sind. Dies klärt z. B. auch die Frage, ob die Messung der Schlittenposition bezüglich einer Stabilisierung des Systems erforderlich ist oder nicht.

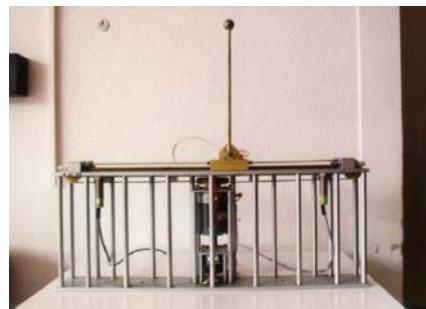


Bild 1.1: Versuchsträger Inverses Pendel

Der Bericht gliedert sich wie folgt: Im Abschnitt 2 ist die verwendete Definition der Nulldynamik wiedergegeben. Grundlage der Bestimmung der Nulldynamik ist der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995), welcher sich im Abschnitt 3 findet. Die konkrete Berechnung ist im Abschnitt 4 angegeben. In diesem Abschnitt findet auch die Gegenüberstellung mit dem gemessenen Verhalten des Prüfstandes statt. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

## 2 Definitionen der Nulldynamik

Der Begriff *Nulldynamik* stammt aus der linearen Systemtheorie, in der ein enger Zusammenhang zu den Nullstellen der Übertragungsfunktion eines linearen Systems besteht. Diese Nullstellen finden sich bei geeigneter Normalform direkt im Zustandsmodell wieder. Daher beeinflussen sie maßgeblich die Dynamik des Systems, und es entstand der Name *Nulldynamik*. Im Gegensatz zu den Polen der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen invariant gegenüber einer Zustandsrückführung (Schwarz 1994:S. 1). Durch die Wahl von speziellen Zustandsrückführungen lässt sich bei vielen Systemen die Beobachtbarkeit des Systems beeinflussen. Dieser Ansatz, die Veränderung der Beobachtbarkeit, führt zu der Definition:

**Definition 2.1:** (Schwarz 1991) Der durch Zustandsrückführung unbeobachtbar zu machende Systemteil heißt **Nulldynamik** des Systems.  $\square$

Zur Analyse der Nulldynamik mit dem hier wiedergegebenen Algorithmus von Isidori (1995) ist es notwendig, daß das mathematische Modell in Form eines Differentialgleichungssystems vorliegt und sich insbesondere durch ein **analytisches System (AS)**

$$\begin{aligned}\Sigma_{AS} : \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) ; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m ; \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit den analytischen Funktionen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$  eine hinreichende Approximationsgüte erzielen lässt.

Im weiteren bilden **analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (ALS)**

$$\begin{aligned}\Sigma_{ALS} : \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) ; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m ; \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{2.2}$$

die zu analysierende Systemklasse. Die Funktionen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{c}$  müssen analytisch in  $\mathbf{x}$  sein. Nach Lévine (1997) lässt sich jedes analytische System der Form (2.1) in ein analytisches System mit linear eingehender Steuerung gemäß (2.2) transformieren. Aus diesem Grund stellt die Betrachtung von Systemen der Form (2.2) keine Einschränkung dar. Die sich anschließende Definition der Nulldynamik von Isidori (1995) beinhaltet die Definition 2.1, wenn auch ein scheinbar anderer Grundgedanke Verwendung findet. Bei dem Ansatz ist es notwendig, diejenigen Anfangswerte aufzufinden, zu denen Stellgrößen existieren, die einen Systemausgang identisch null bewirken. Das System, eingeschränkt auf diese Anfangswerte und diese Stellgrößen, liefert dann die Nulldynamik. Mit differentialgeometrischen Begriffen lässt sich der Sachverhalt durch nachstehende Definition ausdrücken:

**Definition 2.2: Nulldynamik** (Isidori 1995, Byrnes und Isidori 1989:S. 438)

Existiert eine Teilmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  des Zustandsraumes mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* ,$
2. in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$  existiert eine eindeutige Stellgröße  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  derart, daß  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  tangential zu  $\mathcal{Z}^*$  ist,
3.  $\mathcal{Z}^*$  ist maximal bez. der Eigenschaften 1. und 2. .

Ist  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  ferner eine glatte Funktion in  $\mathbf{x}$ , dann wird  $\mathcal{Z}^*$  **Nulldynamikmannigfaltigkeit** genannt. Das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (2.3)$$

wird als **Nulldynamik** des Systems (2.2) bezeichnet. Die Funktion  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$  heißt **Nulldynamikvektorfeld**.  $\square$

### 3 Differentialgeometrischer Nulldynamikalgorithmus

Mit dem differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) sind analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (vgl. (2.2)) analysierbar, wobei jedoch eine wichtige Einschränkung vorhanden ist: Die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  und die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  müssen die gleiche Dimension besitzen, d. h. es muß  $m \stackrel{!}{=} p$  gelten. Folgender Ansatz liegt dem Algorithmus zugrunde: Zunächst gilt es, die Teilmenge  $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$  des Zustandsraumes derart zu bestimmen, daß der Systemausgang für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0$  null ist, d.h.  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0$ . Da die Drift  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  des Systems (2.2) für  $\mathbf{x}$  aus  $\mathcal{M}_0$  meist einen Ausdruck ungleich null darstellt, ergibt  $\dot{\mathbf{x}}$  ohne das Eingreifen einer Steuerung einen von null verschiedenen Ausdruck. Der Systemzustand  $\mathbf{x}$  verändert sich also, wodurch die Forderung nach einem Systemausgang  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  identisch null evtl. nicht mehr gilt. In den folgenden Iterationsschritten des Algorithmus werden daher die Zustände bestimmt, die keine Verletzung des Systemausgangs identisch null verursachen. Für die Zustandsmannigfaltigkeiten gilt:  $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k$ . Der Systemausgang identisch null bleibt erhalten, wenn entweder die Drift  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  des Systems durch eine Stellgröße kompensierbar ist oder die aus  $\dot{\mathbf{x}}$  resultierenden Systemzustände  $\mathbf{x}$  die Bedingung für die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$  nicht verletzen. Ist die Abbruchbedingung des Algorithmus erfüllt, ergibt sich die Nulldynamik des Systems durch das auf die Zustände  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_k$  und die zur Kompensation notwendige Stellgröße eingeschränkte System. Im folgenden sind die einzelnen Schritte des differentialgeometrischen Nulldynamikalgorithmus dargestellt.

#### Iterationsschritt 1:

- 1.1: Die Jakobimatrix  $\mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{x})$  habe in einer Umgebung  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$  um  $\mathbf{x}_0$  den konstanten Rang  $s_0$ .
- 1.2: Wähle eine Matrix  $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{s_0 \times p}$  derart, daß  $\mathbf{c}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_0 \mathbf{c}(\mathbf{x})$  genau  $s_0$  linear unabhängige Zeilen für alle  $\mathbf{x}$  aus  $U_0$  aufweist.
- 1.3: Bestimme  $\mathcal{M}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$   
und setze  $\mathcal{M}_0^c := \mathcal{M}_0 \cap U_0 = \{\mathbf{x} \in U_0 | \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .
- 1.4: Die zeitliche Ableitung des Systemausgangs wird gebildet:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$= \mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + [\mathbf{L}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{L}_{\mathbf{b}_m} \mathbf{c}_0(\mathbf{x})] \mathbf{u} . \quad (3.2)$$

- 1.5: Die nächste Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_1$  ergibt sich durch die Forderung, daß  $\mathcal{M}_1$  alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c$  enthalten soll, für die das Gleichungssystem

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

nach  $\mathbf{u}$  auflösbar ist. Die Berechnung von  $\mathcal{M}_1$  findet, falls der Algorithmus nicht terminiert, im Schritt k.2 statt.

Es habe  $L_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c$  den konstanten Rang  $r_0$ . Falls  $r_0 = m$  erfüllt ist, endet der Algorithmus, und die Nullodynamikmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  ergibt sich dann zu

$$\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_1 . \quad (3.4)$$

Die ausgangssignalnullende Zustandsrückführung  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t)$  erhält man in diesem Fall als Lösung der nach  $\mathbf{u}$  aufgelösten Gleichung

$$\left( L_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) + L_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*} = \mathbf{0} ; \quad (3.5)$$

das Nullodynamikvektorfeld  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$  errechnet sich durch

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* . \quad (3.6)$$

Damit ergibt sich die Nullodynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* . \quad (3.7)$$

Gilt  $r_0 < m$ , fährt der Algorithmus mit dem Teilschritt 1.6 fort.

### 1.6: Der Lösungsraum von

$$\gamma L_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c \quad (3.8)$$

hat die konstante Dimension  $s_0 - r_0$ . Die Matrixfunktion  $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(s_0 - r_0) \times s_0}$  ist derart einzuführen, daß sie in einer Umgebung  $\tilde{U}_0 \subset U_0$  um  $\mathbf{x}_0$  glatt in  $\mathbf{x}$  ist und in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \tilde{U}_0$  den Lösungsraum von (3.8) aufspannt. Insbesondere gilt dann

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) L_B \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c \cap U_0 . \quad (3.9)$$

Damit die Gleichung (3.3) erfüllt sein kann, muß  $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) L_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gelten. Für diesen Ausdruck wird dementsprechend die Abkürzung

$$\Phi_0(\mathbf{x}) := \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) L_a \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

eingeführt, die im nächsten Iterationsschritt Verwendung findet.

**Iterationsschritt  $k$ ,  $k \geq 2$ :**

**k.1:** Die Umgebung  $U_{k-1} \subset \mathbb{R}^n$  um  $\mathbf{x}_0$  ist so zu wählen, daß der Rang der Jakobimatrix  $\mathbf{J} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k-2} \\ \boldsymbol{\Phi}_{k-2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} \right)$  für  $\mathbf{x} \in U_{k-1}$  konstant bleibt. Der Rang nimmt dann den Wert

$$\text{Rang} \left( \mathbf{J} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k-2} \\ \boldsymbol{\Phi}_{k-2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in U_{k-1}} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} s_i \quad (3.11)$$

an und definiert damit  $s_{k-1}$ . Jetzt wird eine Matrix  $\mathbf{S}_{k-1}$  derart gewählt, daß  $\mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k-2}(\mathbf{x})$  genau  $s_{k-1}$  unabhängige Zeilen besitzt und damit

$$\mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k-2} \\ \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k-2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$(s_0 + \dots + s_{k-1})$  unabhängige Zeilen aufweist.

**k.2:** Berechne die Menge

$$\mathcal{M}_{k-1} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} \quad (3.13)$$

und definiere damit

$$\mathcal{M}_{k-1}^c := \mathcal{M}_{k-1} \cap U_{k-1} = \{ \mathbf{x} \in U_{k-1} \mid \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_{k-2}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} . \quad (3.14)$$

**k.3:** Die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})$  ist zu bestimmen und gleich null zu setzen:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} . \quad (3.15)$$

Als (konstanten) Rang der Matrix  $\mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})$  setze

$$r_{k-1} := \text{Rang} (\mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x})), \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c . \quad (3.16)$$

**k.4:** Der Algorithmus terminiert, wenn die Abbruchbedingung

$$r_{k-1} \stackrel{!}{=} m \quad (3.17)$$

erfüllt ist. Die Nullodynamikmannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  ergibt sich dann zu

$$\mathcal{Z}^* := \mathcal{M}_{k-1}^c . \quad (3.18)$$

Die ausgangssignalnullende Zustandsrückführung  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t)$  erhält man in diesem Fall als diejenige Stellgröße  $\mathbf{u}$ , welche eine Lösung der Gleichung

$$\left( \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

darstellt; das Nulldynamikvektorfeld errechnet sich durch

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*. \quad (3.20)$$

Daraus resultiert die Nulldynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*. \quad (3.21)$$

Gilt  $r_{k-1} < m$ , so wird der Algorithmus mit *k.5* fortgesetzt.

**k.5:** Der Lösungsraum aller  $\gamma$  der Gleichungen

$$\gamma \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c \quad (3.22)$$

hat die konstante Dimension  $s_0 + \dots + s_{k-1} - r_{k-1}$ . Die Matrixfunktion  $\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(s_0 + \dots + s_{k-1} - r_{k-1}) \times (s_0 + \dots + s_{k-1})}$  ist so einzuführen, daß sie in einer Umgebung  $\tilde{U}_{k-1} \subset U_{k-1}$  um  $\mathbf{x}_0$  glatt in  $\mathbf{x}$  ist und in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \tilde{U}_{k-1}$  den Lösungsraum von (3.22) aufspannt. Insbesondere gilt dann

$$\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_B \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}^c \cap \tilde{U}_{k-1}. \quad (3.23)$$

Damit die Gleichung (3.15) erfüllt sein kann, muß  $\mathbf{R}_{k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gelten.

Die Matrix  $\mathbf{R}_{k-1}$  lässt sich dabei mit folgender Struktur wählen:

$$\mathbf{R}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{k-2} & \mathbf{Q}_{k-2} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Mit dieser Wahl von  $\mathbf{R}_{k-1}$  ist die neue Funktion  $\Phi_{k-1}$  als

$$\Phi_{k-1} := \mathbf{P}_{k-2} \mathbf{L}_a \mathbf{c}_{k-2}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{k-2} \mathbf{L}_a \mathbf{S}_{k-1} \Phi_{k-2}(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

definierbar.

Fahre mit dem Schritt *k.1* fort. □

## 4 Nulldynamik des inversen Pendels

Im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg existiert der Versuchsstand *Inverses Pendel* (vgl. Bild 4.1). Das invertierte Pendel ist ein instabiles System, d. h. ohne eine Regelung der Schlittenposition kippt die Pendelstange nach unten. Um das Pendel aufrecht zu halten, kann der Schlitten, an dem der Pendelfußpunkt angebracht ist, in einer Dimension (d. h. nach links und rechts) verfahren werden. Kippt das Pendel nach links, muß sich auch der Schlitten nach links wieder unter das Pendel bewegen, um ein Herunterkippen der Pendelstange zu verhindern. Um eine zu große Belastung der Anlage zu vermeiden, stellt eine Notabschaltung den Elektromotor ab, sobald der Schlitten zu nah an die Anschläge kommt.

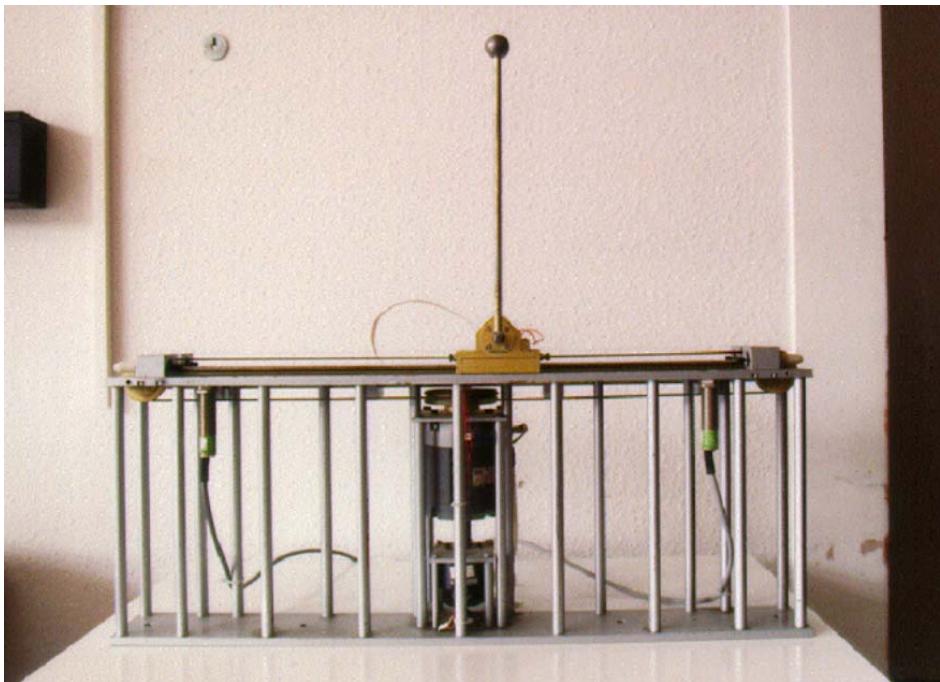


Bild 4.1: Versuchsstand *Inverses Pendel*

Die Ansteuerung des Elektromotors zur Positionierung des Schlittens erfolgt über einen PC. Aus diesem Grund ist es möglich, die unterschiedlichsten Regelungskonzepte mit relativ geringem Aufwand umzusetzen. Der Winkel und die Schlittenposition lassen sich direkt messen und weiterverarbeiten. Ob und inwiefern die Meßwerte in die Regelung einfließen, bleibt dem Anwender überlassen. Die Analyse der Nulldynamik soll sich auf ein System beziehen, bei dem lediglich der Pendelwinkel die zu regelnde Größe darstellt. Deshalb findet zwar die Messung und Speicherung der Schlittenposition statt, diese Zustandsgröße hat aber keine Auswirkungen auf die Regelung.

## 4.1 Modellbeschreibung

In dem schematischen Versuchsaufbau (Bild 4.2) sind die auftretenden physikalischen Kräfte eingetragen.

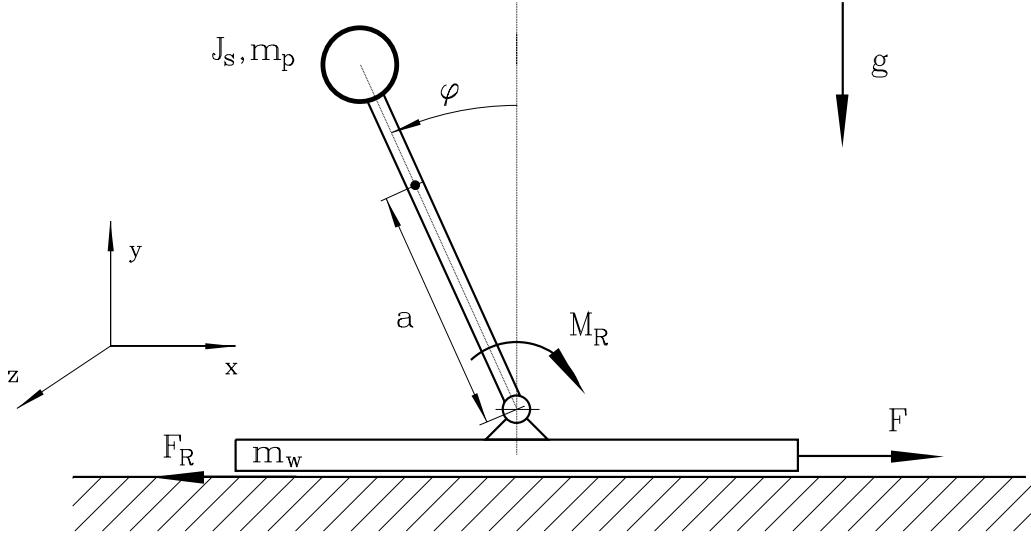


Bild 4.2: Skizze des Versuchsaufbaus

Mit den Zustandsgrößen

- $x_1(t) = x(t)$  Schlittenposition,
- $x_2(t) = \dot{x}(t)$  Schlittengeschwindigkeit,
- $x_3(t) = \varphi(t)$  Pendelwinkel und
- $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$  Winkelgeschwindigkeit

lässt sich das inverse Pendel, wie im Anhang B hergeleitet, durch ein Zustandsmodell der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t) \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R} \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)) \quad y(t) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.1)$$

beschreiben. Darin sind

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}):= \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ \\ \frac{-\frac{J K_1 K_2 x_2}{Ra r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_r(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \\ \\ x_4 \\ \\ \frac{-\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{Ra r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{Ra r_0 m_P a \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.2)$$

$c(\mathbf{x}(t)) := x_3(t) .$

Im ersten Unterabschnitt findet jetzt der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) Anwendung. Der zweite Unterabschnitt gibt die Meßplots der realen Anlage wieder und vergleicht das Ergebnis des Nulldynamikalgorithmus mit dem gemessenen Verhalten des inversen Pendels.

## 4.2 Differentialgeometrische Berechnung

Der im Abschnitt 3 beschriebene Algorithmus von Isidori (1995) beginnt mit:

- 1.1:** Bestimme eine Umgebung  $U_0$  um  $\mathbf{x}_0$  so, daß die Jakobimatrix  $\mathbf{J}(c, \mathbf{x})$  den konstanten Rang  $s_0$  für alle  $\mathbf{x} \in U_0$  hat:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\mathbf{J}(c, \mathbf{x})) &= \text{Rang}([0 \ 0 \ 1 \ 0]) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \\ \Rightarrow U_0 &:= \mathbb{R}^4 \quad \wedge \quad s_0 = 1 . \end{aligned} \quad (4.3)$$

- 1.2:** Für alle  $\mathbf{x} \in U_0$  soll  $c_0(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_0 c(\mathbf{x})$  mit einer Matrix  $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{s_0 \times p}$  genau  $s_0$  linear unabhängige Zeilen aufweisen. Da  $s_0 = 1$  ist, stellt  $\mathbf{S}_0 := \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  eine zulässige Wahl dar.

$$\Rightarrow c_0(\mathbf{x}) := \mathbf{1} \cdot c(\mathbf{x}) = x_3 . \quad (4.4)$$

- 1.3:** Berechne  $\mathcal{M}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid c(\mathbf{x}) = 0\}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0\} \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_0^c := \mathcal{M}_0 \cap U_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0\} . \quad (4.6)$$

- 1.4:** Ableitung des Systemausgangs

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathbf{L}_{\mathbf{a}} c_0(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} c_0(\mathbf{x}) \cdot u \\ \Rightarrow \dot{y} &= x_4 + 0 \cdot u . \end{aligned} \quad (4.7)$$

**1.5:** Es ist  $r_0 := \text{Rang}(\mathbf{L}_B c_0(\mathbf{x})) = \text{Rang}(0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ .

Die Abbruchbedingung ist somit noch nicht erfüllt, da  $r_0 = 0 < 1 = m$  ist.

**1.6:** Der Lösungsraum der Gleichung

$$\gamma \mathbf{L}_B c_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0^c \quad (4.8)$$

hat die konstante Dimension  $s_0 - r_0 = 1$ .

Wähle als Matrixfunktion  $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(s_0 - r_0) \times s_0} = \mathbb{R}^{1 \times 1}$

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{1}, \quad (4.9)$$

damit definiert man

$$\Phi_0(\mathbf{x}) := \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \mathbf{L}_a c_0(\mathbf{x}) = x_4. \quad (4.10)$$

Aufgrund der noch nicht erfüllten Abbruchbedingung muß der Algorithmus fortgesetzt werden.

**2.1:** Die Umgebung  $U_1 \subset \mathbb{R}^n$  um  $\mathbf{x}_0$  muß für alle  $\mathbf{x} \in U_1$  einen konstanten Rang der Jakobimatrix  $\mathbf{J} \left( \begin{bmatrix} c_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \right)$  liefern.

$$\text{Rang} \left( \mathbf{J} \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in U_1} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 =: 1 + s_1 \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow U_1 = \mathbb{R}^4 \quad \wedge \quad s_1 = 1.$$

Die Matrix  $\mathbf{S}_1$  ist so zu wählen, daß  $\mathbf{S}_1 \Phi_0(\mathbf{x})$  genau  $s_1$  unabhängige Zeilen aufweist. Da  $s_1 = 1$  ist, stellt  $\mathbf{S}_1 := \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  eine zulässige Wahl dar.

$$\Rightarrow \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} c_0 \\ \mathbf{S}_1 \Phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

**2.2:** Die Berechnung der Menge

$$\mathcal{M}_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid c_0(\mathbf{x}) = 0, \Phi_0(\mathbf{x}) = 0\} \quad (4.13)$$

liefert

$$\mathcal{M}_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\} \quad (4.14)$$

und damit

$$\mathcal{M}_1^c := \mathcal{M}_1 \cap U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}. \quad (4.15)$$

**2.3:** Die Funktion  $\mathbf{c}_1(\mathbf{x}(t))$  nach der Zeit ableiten und gleich null setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) u \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow 0 &= \left[ \begin{array}{c} x_4 \\ -\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{R_a r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \end{array} \right] \\ &\quad + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3) m_P a}{R_a r_0 (\cos(x_3)^2 m_p^2 a^2 - J)} \end{array} \right] u . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Bezeichne den Rang der Matrix  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1^c$ ) mit  $r_1$ .

$$\Rightarrow r_1 := \text{Rang} \left( \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3) m_P a}{R_a r_0 (\cos(x_3)^2 m_p^2 a^2 - J)} \end{array} \right] \right) = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{M}_1^c . \quad (4.17)$$

**2.4:** Die Abbruchbedingung  $r_1 \stackrel{!}{=} 1 = m$  ist erfüllt, und als Nulldynamikzustandsmanigfaltigkeit  $\mathcal{Z}^*$  ergibt sich

$$\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_1^c = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0 \} . \quad (4.18)$$

Die ausgangssignalnullende Zustandsrückführung  $u^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t)$  ergibt sich in diesem Fall als Lösung von

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{L}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) u \right) \Big|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*} = 0 . \\ \Rightarrow &\left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{K_1 K_2 x_2}{R_a r_0^2 m_P a} - \frac{F_r(x_2)}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{K_1 m_P a}{R_a r_0 (m_p^2 a^2 - J)} \end{array} \right] u = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow u^*(\mathbf{x}) = \frac{K_1 K_2 x_2 + F_r(x_2) R_a r_0^2}{K_1 r_0} .$$

Durch das Einsetzen der soeben bestimmten Größen in

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) := \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (4.20)$$

resultiert die Nulldynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}. \quad (4.21)$$

□

Es stellt sich die Frage, welche Schlüsse sich aus der Nulldynamik (4.21) für die reale Anlage ziehen lassen: Das System (4.21) repräsentiert das dynamische Verhalten des inversen Pendels, wenn die Regelung nur dafür sorgt, daß der Pendelwinkel  $x_3$  immer null ist. Konkret heißt das, daß die Schlittenposition  $x_1$  linear über alle Grenzen wächst, sobald das System eine Schlittengeschwindigkeit  $x_2 \neq 0$  aufweist. Die Nulldynamik ist also instabil. Dieses Verhalten ist auch an der realen Anlage, wie im zweiten Unterabschnitt beschrieben, verifizierbar.

Die Situation  $x_2 \neq 0$  tritt an der Anlage in kürzester Zeit ein, da für das reale invertierte Pendel  $x_3(t=0) \neq 0$  gilt. Das Pendel beginnt demzufolge zu kippen, womit sich direkt eine Regelung des Winkels ergibt, d.h. der Schlitten verfährt und somit ist  $x_2 \neq 0$ . Wie bereits erwähnt, fährt der Schlitten dann mit konstanter Geschwindigkeit davon.

### 4.3 Meßergebnisse

Zur Messung der „real existierenden Nulldynamik“ des inversen Pendels wird, wie in Bild 4.3 dargestellt, lediglich der Pendelwinkel mit einem  $PID_{T_1}$  Regler geregelt.

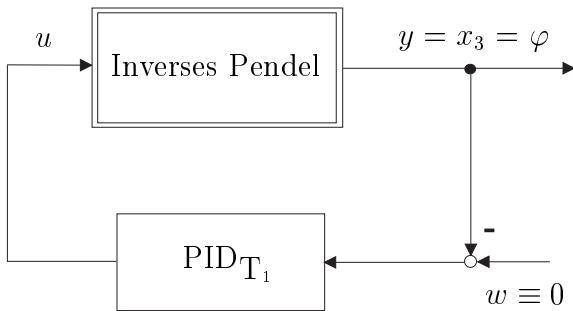
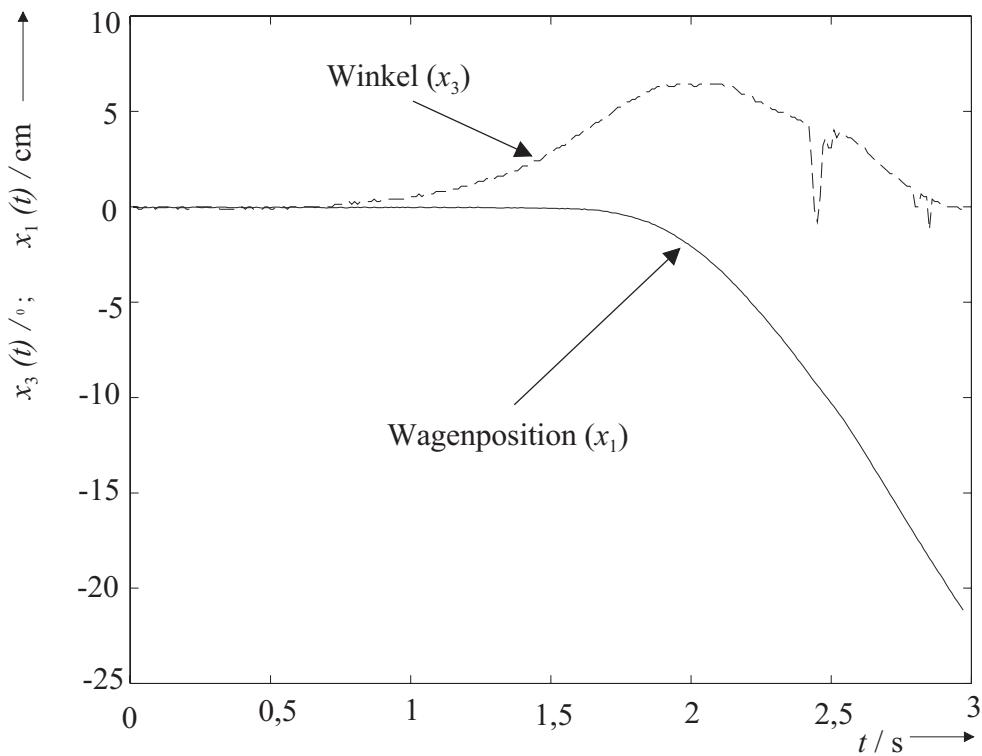


Bild 4.3: Reglerstruktur bei der Messung

Entsprechend dem Zustandsmodell (4.1) findet die Schlittenposition im Regelungskonzept keine Berücksichtigung. Ausgehend von der oberen instabilen Ruhelage (Pendelwinkel =  $0^\circ$  und Schlittenposition = 0 cm) stellt sich das über die Nulldynamik vorhergesagte Verhalten, nämlich eine instabile Schlittenposition, die linear über alle Grenzen wächst, in kürzester Zeit ein (vgl. Bild 4.4).



**Bild 4.4:** Messung am inversen Pendel; Start in der instabilen Ruhelange

Die kurze Zeitspanne der Messung liegt in dem begrenzten Verfahrweg, der für den Pendelschlitten zur Verfügung steht, begründet (vgl. Bild 4.1).

Mit einer Anfangsauslenkung des Pendels stellt sich das instabile Verhalten der Wagenposition sofort ein (vgl. Bild 4.5). Denn die Regelung greift unmittelbar ein, um den Pendelwinkel auszuregeln. Dazu muß der Schlitten bewegt werden, womit die Schlittengeschwindigkeit  $x_2 \neq 0$  ist. Die Nulldynamikanalyse hat gerade für diesen Fall ( $x_2 \neq 0$ ) eine linear anwachsende Schlittenposition vorhergesagt, was in dem Bild 4.5 sehr gut zu erkennen ist. Das dynamische Verhalten der realen Anlage stimmt also mit dem über die Nulldynamik vorhergesagten Verhalten überein.

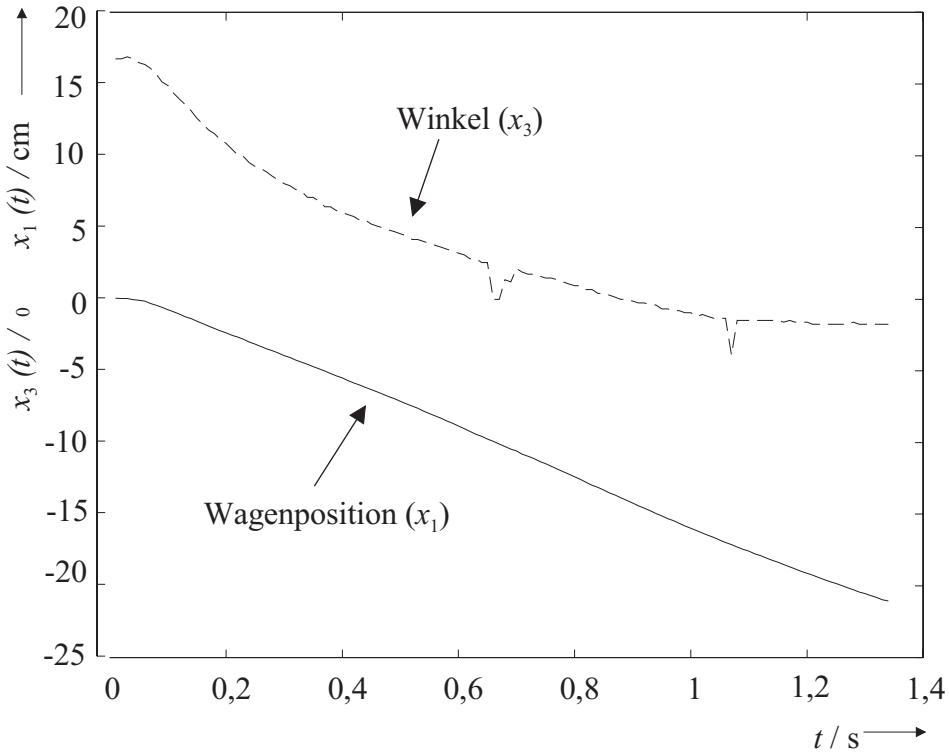


Bild 4.5: Messung am inversen Pendel; Start mit  $\varphi = 17^\circ$  Anfangsauslenkung.

Aufgrund dieser Instabilität ist es notwendig den Systemzustand "Schlittenposition" ebenfalls zu messen.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Nulldynamik eines inversen Pendels bildet in diesem Bericht den Gegenstand der Untersuchung. Die Berechnung der Nulldynamik erfolgt mit dem Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995). Aus diesem Ansatz ergibt sich die Einschränkung, daß genauso viele Systemeingänge wie Systemausgänge vorhanden sein müssen. Das inverse Pendel besitzt als Eingang nur die Steuerspannung des Elektromotors, der den Pendelschlitten bewegt. Daher muß der Systemausgang auch eindimensional sein. Die Schlittenposition als einzige zu regelnde Größe am Systemausgang zu wählen, ist nicht sinnvoll. Deshalb besteht hier der Systemausgang aus dem Pendelwinkel. Aufgabe der Regelung ist es, den Systemausgang bei null zu halten. Bezuglich einer Stabilisierung des gesamten Systems stellt sich die Frage nach dem dynamischen Verhalten der Zustandsgröße „Schlittenposition“. Die berechnete Nulldynamik sagt für die Schlittenposition ein lineares Wachstum über alle Grenzen voraus, sobald die Schlittengeschwindigkeit ungleich null ist. Aufgrund der Instabilität der oberen Ruhelage (Pendelwinkel gleich null und Schlittenposition gleich null) tritt der Fall einer von Null verschiedenen Schlittengeschwindigkeit in kürzester Zeit ein, da eine Ausregelung des Pendelwinkels nur über das Verfahren des Schlittens möglich ist. Das über die Nulldynamik vorhergesagte instabile Verhalten der Anlage ist am Prüfstand gut zu sehen. Läßt man das inverse Pendel in der oberen Ruhelage los, fährt der Schlitten nach kurzer Zeit (1-2s) mit senkrecht stehendem Pendel bis zur Notabschaltung davon. Um die Schlittenposition über eine Kaskadenreglung ebenfalls zu regeln, muß sie im Systemausgang vorhanden sein. Eine Messung der Schlittenposition macht die Berücksichtigung der Schlittenposition im Systemausgang möglich, was eine Erweiterung des Systemmodells darstellt. Dieses Zustandsmodell besitzt dann einen Eingang und zwei Ausgänge. Die Berechnung der Nulldynamik von einem so erweiterten System kann nicht mit dem hier verwendeten Nulldynamikalgorithmus erfolgen, da dieser die gleiche Dimension bezüglich des Systemeingangs und -ausgangs fordert. Hier bieten differentialalgebraische Methoden eine Alternative.

In einem weiteren Bericht soll die Berechnung der Nulldynamik des inversen Pendels mit dem differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus von Polzer (1999) erfolgen. Dieser Algorithmus ermöglicht es, Systeme zu betrachten, die eine unterschiedliche Anzahl an Systemeingängen und Systemausgängen aufweisen. Somit ist es möglich, die Nulldynamik von Systemen zu bestimmen, deren Systemausgang erweitert wurde.

## 6 Literaturverzeichnis

- Benvenuti, L., D. Di Benedetto und J. W. Grizzle.** 1993. Trajectory control of an aircraft using approximate output tracking. *Proc. Second European Control Conference*. Groningen/Niederlande. 1638–1643.
- Byrnes, C. I. und A. Isidori.** 1989. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters* 12. 437–442.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Kailath, T.** 1980. *Linear Systems*. Englewood Cliffs/USA: Prentice-Hall.
- Lemmen, M.** 1997. *Ausgangs-Regel-Relative und Nulldynamik*. Forschungsbericht 05/97. MSRT. Universität Duisburg.
- Lemmen, M. und M. Jelali.** 1996. *Differentialgeometrische Steuer- und Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 8/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Lévine, J.** 1997. A Graph-Theoretic Approach to Input-Output Decoupling and Linearization. *Nonlinear Systems*, hg. von A. J. Fossard und D. Normand-Cyrot. 296–310. London/Großbritannien: Chapman & Hall.
- Polzer, J.** 1999. *Differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus für Systeme mit rationalen Funktionen*. Forschungsbericht 02/99. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1979. *Zeitdiskrete Regelungssysteme*. Braunschweig: Vieweg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1994. *Die Nulldynamik der BLS und QLS in Regelungsnormalform*. Forschungsbericht 12/94. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1998. *Festlegung der lokalen Nulldynamik zustandsgeregelter ALS*. Forschungsbericht 04/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H. und M. Senger.** 1999. On the assignment of zero dynamics for input-affine nonlinear systems. *Proc. 1999 European Control Conference, ECC*. Karlsruhe/Germany.
- Sossna, P.** 1990. *Entwurf und Erprobung einer digitalen Zustandsregelung für ein inverses Pendel*. Studienarbeit. MSRT. Universität Duisburg.
- Stöcker, H.** 1993. *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

## A Funktionsklassen

Dieser Bericht verwendet die Begriffe glatte, analytische und rationale Funktion:

**Definition A.1: *Glatt* Funktionen** Isidori (1995:S. 471)

- (i) Es sei  $A$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  wird **glatt** genannt, wenn alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und stetig sind.
- (ii) Es sei  $A$  wieder eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^T$ . Die Funktion  $\mathbf{g}$  wird **glatt** genannt, wenn alle Funktionen  $g_i, (i = 1, \dots, m)$  glatt sind. Die Menge aller glatten Funktionen wird mit  $C^\infty$  bezeichnet.  $\square$

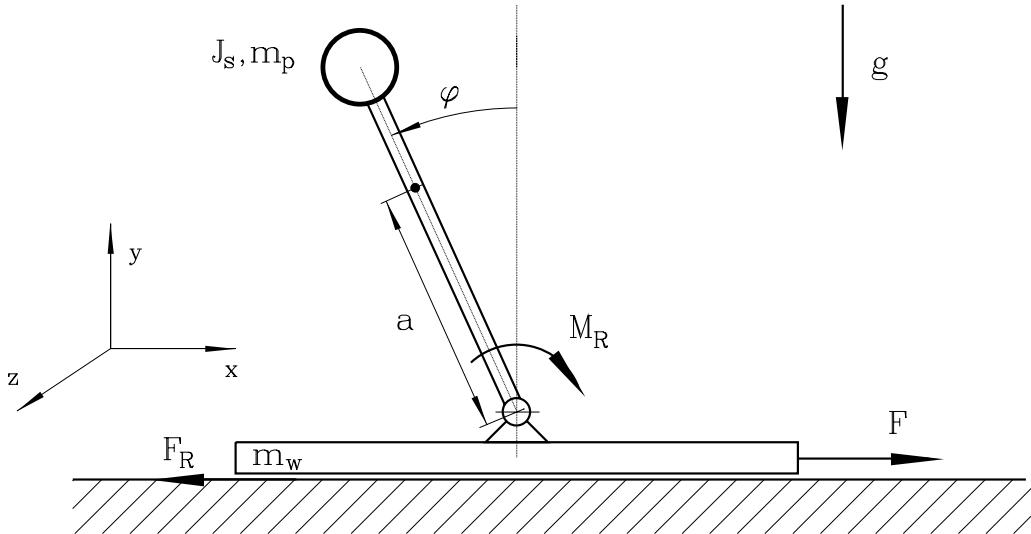
**Definition A.2: *Analytische* Funktionen** Isidori (1995:S. 471)

- (i) Die Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  sei offen und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  wird **analytisch** genannt, wenn  $f$  eine glatte Funktion ist und es für jeden Punkt  $\mathbf{x}_0 \in A$  eine Umgebung  $U$  derart gibt, daß die Taylorreihe von  $f$  für alle  $\mathbf{x} \in U$  gegen  $f$  konvergiert.
- (ii) Es sei  $A$  wieder eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^T$ . Die Funktion  $\mathbf{g}$  wird **analytisch** genannt, wenn alle Funktionen  $g_i, (i = 1, \dots, m)$  analytisch sind.  $\square$

**Definition A.3: *Rationale* Funktionen** Stöcker (1993:S. 106)

Funktionen, die sich durch endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen in den unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$  beschreiben lassen, werden **rationale Funktionen** genannt.  $\square$

## B Modellbildung des inversen Pendels



**Bild B.1:** Schematischer Versuchsaufbau des invertierten Pendels

Die Bewegungsgleichungen des Wagens mit dem Pendel können über die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (B.1) hergeleitet werden. Eine ausführliche Beschreibung dieser Vorgehensweise findet sich u. a. in Sossna (1990).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n , \quad (\text{B.1})$$

mit

- $n$  : Anzahl der Freiheitsgrade,
- $T$  : kinetische Energie des mechanischen Systemanteils,
- $q_j$  : verallgemeinerte Koordinate und
- $Q_j$  : verallgemeinerte Kraft bezüglich dieser Koordinate,  
für die gilt:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist  $N$  die Anzahl der am System angreifenden äußeren Kräfte.

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m_P a \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (\text{B.3})$$

mit

$$\begin{aligned} m &= m_w + m_p , \\ J &= m_P a^2 + J_s . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Insgesamt folgen aus den Lagrangeschen Gleichungen (B.1) die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) - m_p a (\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t)) &= F(t) - F_R(\dot{x}(t)) , \\ J\ddot{\varphi}(t) - m_p a (\ddot{x}(t) \cos \varphi(t) + g \sin \varphi(t)) &= -M_R(\dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

mit den Konstanten

- $m = m_w + m_P$  : gesamte bewegte Masse,
- $m_P$  : Masse des Pendels,
- $a$  : Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des Pendels,
- $J$  : Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes sowie
- $g$  : Erdbeschleunigung

und den geschwindigkeitsabhängigen Größen Reibkraft  $F_R(\dot{x}(t))$  und Reibmoment  $M_R(\dot{\varphi}(t))$ . Die eingehende Kraft  $F(t)$  des Seilzuges lässt sich über die Differentialgleichung des Elektromotors

$$F(t) = \frac{K_1}{R_a r_0} u_a(t) - \frac{K_1 K_2}{R_a r_0^2} \dot{x}(t) \quad (\text{B.6})$$

berechnen.

Das Differentialgleichungssystem (B.1) ist mit den Zuständen

- $x_1(t) = x(t)$  Schlittenposition,
- $x_2(t) = \dot{x}(t)$  Schlittengeschwindigkeit,
- $x_3(t) = \varphi(t)$  Pendelwinkel und
- $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$  Winkelgeschwindigkeit

in das äquivalente System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

transformierbar. Die Funktionen  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$  und  $c(\mathbf{x}(t))$  in B.7 lauten:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}):= \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ \hline -\frac{J K_1 K_2 x_2}{R_a r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_r(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a} \\ \hline \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \\ \hline x_4 \\ \hline -\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{R_a r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a} \\ \hline \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{Ra r_0 m_P a \left( \frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \tag{B.8} \\
 c(\mathbf{x}(t)) &:= x_3(t) .
 \end{aligned}$$