

# Reglersynthese zur Störgrößenreduktion einer aktiven hydropneumatischen Radeinheit

Markus Bröcker

Forschungsbericht Nr. 3/2001

Mess-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Dieser Bericht befasst sich mit der Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit und der nichtlinearen Reglersynthese für eine aktive hydropneumatische Fahrzeugfederung. Ein analytisches Systemmodell für die Vertikalbewegung einer Radeinheit bildet die Grundlage zur Berechnung zweier Regler. Ein Regler dient zur Störgrößenentkopplung und der andere zur Störgrößenreduktion. Eine Simulationsstudie erprobt den Einsatz verschiedener Referenztrajektorien und Störsignale sowie die Wirkung eines praxisnahen Störtauschesignals auf die Regelung des Anwendungsbeispiels aktive hydropneumatische Fahrzeugfederung.

Gerhard-Mercator-Universität Duisburg  
Mess-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Nomenklatur</b>                                        | <b>II</b> |
| <b>1 Einleitung</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2 Modellbildung der Radeinheit</b>                     | <b>3</b>  |
| <b>3 Reglersynthese für die aktive Radeinheit</b>         | <b>7</b>  |
| 3.1 Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit . . . . . | 7         |
| 3.2 Störgrößenentkopplung . . . . .                       | 8         |
| 3.3 Störgrößenreduktion . . . . .                         | 10        |
| <b>4 Simulationsergebnisse</b>                            | <b>13</b> |
| 4.1 Störgrößenentkopplung . . . . .                       | 13        |
| 4.2 Störgrößenreduktion . . . . .                         | 16        |
| 4.2.1 Deterministische Störsignale . . . . .              | 16        |
| 4.2.2 Störtauschsignal . . . . .                          | 20        |
| <b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>                     | <b>22</b> |
| <b>6 Literatur</b>                                        | <b>23</b> |
| <b>Anhang</b>                                             | <b>25</b> |
| <b>A Definition der Lie-Ableitung</b>                     | <b>25</b> |
| <b>B Technische Daten der aktiven Radeinheit</b>          | <b>26</b> |

# Nomenklatur

## Abkürzungen

|          |                                                      |
|----------|------------------------------------------------------|
| ALS      | Analytisches System mit linear eingehender Steuerung |
| CAS      | Computer Algebra System                              |
| M        | Motor                                                |
| NSAS     | Nonlinear Systems Analysis and Synthesis             |
| SISO     | Single Input – Single Output                         |
| $\Sigma$ | System                                               |

## Logische Verknüpfungen

|           |             |
|-----------|-------------|
| $\forall$ | Allquantor  |
| $\in$     | Element von |

## Matrizen, Vektoren

|                            |                                                   |
|----------------------------|---------------------------------------------------|
| $\mathbf{f}(\mathbf{x})$   | Driftterm eines ALS                               |
| $\mathbf{g}(\mathbf{x})$   | Eingangsvektor eines SISO-ALS                     |
| $\mathbf{p}(\mathbf{x})$   | Eingangsvektor der Störgröße eines ALS            |
| $\mathbf{q}$               | Verallgemeinerter Koordinatenvektor               |
| $\mathbf{u}_{\text{hyd}}$  | Eingangsvektor des hydropneumatischen Teilsystems |
| $\mathbf{u}_{\text{mech}}$ | Eingangsvektor des mechanischen Teilsystems       |
| $\mathbf{x}$               | Zustandsvektor                                    |
| $\mathbf{x}_0$             | Vektor der Anfangsbedingungen                     |
| $\mathbf{x}_{\text{hyd}}$  | Zustandsvektor des hydropneumatischen Teilsystems |
| $\mathbf{x}_{\text{mech}}$ | Zustandsvektor des mechanischen Teilsystems       |

## Mengen

|              |                              |
|--------------|------------------------------|
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen     |

## Operatoren und Funktionen

|                                                   |                                                                                                      |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\exp(\cdot)$                                     | Exponentialfunktion                                                                                  |
| $L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$               | Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}$                                                  |
| $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ | Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}$ und danach entlang des Vektorfeldes $\mathbf{g}$ |
| $L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x})$             | $k$ -fache Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}$                                       |
| $ \cdot $                                         | Betrag                                                                                               |

## Skalare Größen

|                  |                            |                                                                    |
|------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $A_C$            | [ m <sup>2</sup> ]         | Kolbenfläche des Zylinders                                         |
| $c_i$            |                            | Reglerparameter zur Störgrößenreduktion                            |
| $c_W$            | [ N/m ]                    | Radfedersteifigkeit                                                |
| $d_A$            | [ Ns/m ]                   | Dämpfungskonstante des Zylinders                                   |
| $E_{FI}$         | [ Pa ]                     | Elastizitätsmodul des Fluids                                       |
| $e$              | [ – ]                      | Regelabweichung (allgemein)                                        |
| $F_C$            | [ N ]                      | Zylinderkraft                                                      |
| $F_D$            | [ N ]                      | Dämpfungskraft des Zylinders                                       |
| $g$              | [ ms <sup>-2</sup> ]       | Erdbeschleunigung                                                  |
| $h(\mathbf{x})$  |                            | Ausgangsfunktion eines SISO-ALS                                    |
| $K_{L,P}$        | [ m <sup>3</sup> /(s Pa) ] | Leckagekoeffizient der Pumpe                                       |
| $K_T$            | [ m <sup>3</sup> /(s Pa) ] | Drosselbeiwert                                                     |
| $m_A$            | [ kg ]                     | Radmasse                                                           |
| $m_C$            | [ kg ]                     | Aufbaumasse                                                        |
| $n_P$            | [ s <sup>-1</sup> ]        | Drehzahl der Welle der Motor-Pumpe-Einheit                         |
| $P_i$            | [ s <sup>-1</sup> ]        | Pollage                                                            |
| $p_0$            | [ Pa ]                     | Umgebungsdruck                                                     |
| $p_1, p_2$       | [ Pa ]                     | Höchster Betriebsdruck des Hydrospeichers 1 bzw. 2                 |
| $p_{A1}, p_{A2}$ | [ Pa ]                     | Druck im Hydrospeicher 1 bzw. 2                                    |
| $p_C$            | [ Pa ]                     | Zylinderdruck                                                      |
| $r$              |                            | Relativer Grad eines SISO-ALS                                      |
| $r_S$            |                            | Relativer Grad der Störgröße                                       |
| $s$              | [ – ]                      | Störgröße (allgemein)                                              |
| $t$              | [ s ]                      | Zeit                                                               |
| $u$              | [ – ]                      | Stellgröße (allgemein)                                             |
| $V_0$            | [ m <sup>3</sup> ]         | mittleres Ölvolumen                                                |
| $V_1, V_2$       | [ m <sup>3</sup> ]         | Luftvolumen bei höchstem Betriebsdruck des Hydrospeichers 1 bzw. 2 |
| $V_P$            | [ m <sup>3</sup> ]         | Schluckvolumen der Pumpe                                           |
| $v$              | [ – ]                      | Neue Eingangsgröße (allgemein)                                     |
| $x_i$            | [ – ]                      | Zustandsvariable                                                   |
| $y$              | [ – ]                      | Regelgröße (allgemein)                                             |
| $z_C$            | [ m ]                      | Aufbauposition                                                     |
| $\dot{z}_C$      | [ ms <sup>-1</sup> ]       | Aufbaugeschwindigkeit                                              |
| $\ddot{z}_C$     | [ ms <sup>-2</sup> ]       | Aufbaubeschleunigung                                               |
| $z_E$            | [ m ]                      | Fahrbahnposition                                                   |
| $z_{Rt}$         | [ m ]                      | Referenztrajektorie der Aufbauposition                             |
| $\dot{z}_{Rt}$   | [ ms <sup>-1</sup> ]       | Referenztrajektorie der Aufbaugeschwindigkeit                      |
| $\ddot{z}_{Rt}$  | [ ms <sup>-2</sup> ]       | Referenztrajektorie der Aufbaubeschleunigung                       |

---

|                       |                      |                                                                  |
|-----------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------|
| $z_{\text{Rt}}^{(3)}$ | [ ms <sup>-3</sup> ] | Referenztrajektorie der dritten zeitlichen Ableitung des Aufbaus |
| $z_{\text{W}}$        | [ m ]                | Radposition                                                      |
| $\alpha_i$            |                      | Reglerparameter zur Störgrößenentkopplung                        |
| $\Delta z$            | [ m ]                | Relativposition zwischen Aufbau und Rad                          |
| $\Delta \dot{z}$      | [ m ]                | Relativgeschwindigkeit zwischen Aufbau und Rad                   |
| $\kappa$              | [ – ]                | Isentropenexponent                                               |
| $\omega_{\text{P}}$   | [ rad/s ]            | Winkelgeschwindigkeit der Welle der Motor-Pumpe-Einheit          |

# 1 Einleitung

Bei dynamischen Systemen treten häufig Störgrößen auf. In der Regelungstechnik existieren daher verschiedene Ansätze zur Lösung der Problematik einer Störgrößenentkopplung bzw. einer Störgrößenreduktion. Für eine mathematische Formulierung haben sich u. a. sowohl der differentialgeometrische (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Isidori 1995, Schwarz 1999, Tsirikos und Arvanitis 2000, Bröcker 2000a) als auch der differentialalgebraische Ansatz (Ritt 1950, Kolchin 1973, Fliess 1987, Fliess und Glad 1993, Delaleau und Fliess 1994, Bröcker u. a. 2000) zur Störgrößenentkopplung bzw. Störgrößenreduktion bewährt. Dabei ist das primäre Ziel einer Reglersynthese ein störgrößenentkoppelndes Regelgesetz für ein nichtlineares System zu ermitteln. Scheitert die Suche auf Grund von charakteristischen Systemeigenschaften, so verbleibt die Suche nach einem störgrößenreduzierenden Regelgesetz, welches den Einfluss der Störgröße nicht kompensiert, aber hinreichend vermindert. In Bröcker (2000b) findet eine neuartige störgrößenreduzierende Reglersynthese an einem hydrostatischen Antrieb eines elastischen Roboters Anwendung. Die theoretischen und praktischen Ergebnisse darin bilden die Grundlage für diesen Forschungsbericht.

Ein immer größer werdendes Interesse von aktiven Fahrsicherheitssystemen in der Kraftfahrzeugtechnik verursachte in der Vergangenheit eine Reihe von innovativen Regeleinrichtungen wie z. B. das Antiblockiersystem (ABS), die Antriebsschlupfregelung (ASR) oder die Fahrdynamikregelung (FDR, ESP). Um die wachsenden technischen Anforderungen bezüglich des Fahrkomforts und der Fahrsicherheit zu erfüllen, erfolgte in den vergangenen Jahren auch eine Weiterentwicklung von diversen Federungssystemen als eine Komponente des Fahrwerks. Ziel eines Federungssystems ist dabei die vertikalen Fahrzeugschwingungen, die die Fahrbahnunebenheiten erzeugen, durch geeignete Federung und Dämpfung zu reduzieren. Neben den klassischen Schwingungsdämpfern werden gegenwärtig immer mehr geregelte Federungssysteme im Fahrzeugbau eingesetzt. Dabei kommen bislang überwiegend lineare Regelungsstrategien für die geregelten Federungssysteme zum Einsatz. Vor allem für die semi-aktive und vollaktive Federung finden sich zahlreiche Ansätze und Validierungen (z. B. Küpper 1995, Rodić und Vukobratović 1999, Nakai u. a. 2000, Kitching u. a. 2000, Sammier u. a. 2000). Bei der semi-aktiven Federung wird nur Steuerenergie in das System eingeführt, um die Dämpfungsfederhärte zu verstellen. Hingegen lassen sich bei der vollaktiven Federung mit Stellenergie in Form von hydraulischer, elektrischer oder elektromagnetischer Energie sowohl die Aufbau- als auch die Radschwingungen stellen und dämpfen (Frühauf 2000).

Im PKW ist nach heutigem Stand der Technik zumeist das (langsam) aktive Federungssystem ABC (Active Body Control) durch eine Reihenschaltung von Aufbaufeder und Aktuator verwirklicht. Bei größeren Fahrzeugen wie z. B. Bussen oder Nutzkraftwagen lässt sich diese Reihenschaltung nicht mehr wegen der hohen Lasten und Beladungsunterschiede aus Platzgründen realisieren (Frühauf 2000). In Frühauf und Rutz (1998)

wird erstmalig ein aktives hydropneumatisches Konzept für einen Reisebus zur Fahrzeugfederung mit Servoventilen zur Ansteuerung der Hydraulikzylinder vorgestellt. Lückel u. a. (2000) stellt ebenfalls ein aktives hydropneumatisches Konzept für einen Service-Zubringer vor. Unter einem Service-Zubringer ist ein an dem Mechatronik Laboratorium Paderborn der Universität Paderborn als virtueller Prototyp entwickeltes Fahrzeug zu verstehen, das sich für den Transport und die Verteilung von standardisierten (Container-) Lastbehältern eignet. Der Service-Zubringer ist auf die besonderen Bedürfnisse des Innenstadtverkehrs zugeschnitten und soll somit diesen entlasten. Das Konzept der aktiven hydropneumatischen Federung ist für den Service-Zubringer sinnvoll, da dieser für den Transport von schweren Gütern bei hoher Wendigkeit bzw. Manövrierbarkeit ausgelegt ist. Bei dem hydropneumatischen Konzept nach Lückel u. a. (2000) ist zwischen Achse und Aufbau ein Hydraulikzylinder integriert, der auf der Kolbenflächenseite an einen hydraulischen Kreis angeschlossen ist. Im Unterschied zu Frühauf und Rutz (1998) ist das Stellglied im hydraulischen Kreis eine Motor-Pumpe-Einheit. Dieses System prägt der Radeinheit ein passives Feder-/Dämpferverhalten auf, so dass bereits ohne Regelung die Radschwingungen kontrollierbar sind. Die geregelte Radeinheit verbessert schließlich die Dämpfungseigenschaft des Systems. Die Vorteile einer hydropneumatischen Fahrzeugfederung sind somit insbesondere der kleine Bauraumbedarf durch das hohe Druckniveau, eine schnelle Regelung durch das quasi inkompressible Medium und die integrierte hydraulische Dämpfung (Backé und Helling 1990). Für die aktive hydropneumatische Federung nach Lückel u. a. (2000) ist ein nichtlineares analytisches Systemmodell vorhanden. Das in Bröcker (2000b) vorgestellte und erfolgreich erprobte Konzept zur nichtlinearen Störgrößenreduktion wird in diesem Beitrag auf dieses Modell für die aktive Radeinheit übertragen.

Der Bericht gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 ist das mechanische und hydropneumatische Teilsystem der aktiven Radeinheit modelliert und simuliert, um das dynamische Verhalten des unregulierten Systems zu verdeutlichen. Abschnitt 3 geht auf die Reglersynthese zur nichtlinearen Störgrößenentkopplung bzw. Störgrößenreduktion ein. Als Ansätze finden die differentialgeometrische Methodik für die Störgrößenentkopplung und das in Bröcker (2000b) vorgestellte Konzept zur Störgrößenreduktion Anwendung. Abschnitt 4 beinhaltet die Simulationsergebnisse der nichtlinearen Störgrößenentkopplung und Störgrößenreduktion für verschiedene Referenz- und Störsignale. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick bilden in Abschnitt 5 den Abschluss dieses Forschungsberichtes.



reduzieren soll (s. Bild 2.1).

Mit Hilfe des verallgemeinerten Koordinatenvektors  $\mathbf{q}^T = [z_C \ \Delta z]$  und den Systemdrücken  $p_C, p_{A1}, p_{A2}$  lässt sich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem für die aktive Fahrzeugfederung angeben (Lückel u. a. 2000). Das mechanische Teilsystem ist durch die Vektordifferentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{\text{mech},0} + \mathbf{S}\mathbf{u}_{\text{mech}} \quad , \quad (2.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_C & 0 \\ -m_A & m_A \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & d_A \\ 0 & d_A \end{bmatrix} \quad , \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c_W & c_W \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_W & 1 \end{bmatrix} \quad , \\ \mathbf{f}_{\text{mech},0} &= \begin{bmatrix} -m_C g \\ -F_0 + m_A g \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}_{\text{mech}}^T = [z_E \ F_C] \end{aligned} \quad (2.2)$$

beschreibbar. Für die Zylinderkraft gilt approximativ die Beziehung  $F_C = A_C(p_C - p_0)$ . Ausgehend von einer idealen Motor-Pumpe-Einheit, d. h. ein schnelles und genaues Erreichen einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ist gewährleistet, lassen sich die folgenden Differentialgleichungen zur Beschreibung der Systemdrücke angeben:

$$\dot{p}_{A1} = \kappa \left( \frac{p_{A1}^{\kappa+1}}{p_1 V_1^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left( K_{L,P}(p_C - p_{A1}) - \frac{V_P}{2\pi} \omega_P \right) \quad (2.3)$$

$$\dot{p}_{A2} = \kappa \left( \frac{p_{A2}^{\kappa+1}}{p_2 V_2^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} K_T(p_C - p_{A2}) \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_C = \frac{E_{Fl}}{V_0} \left( \frac{V_P}{2\pi} \omega_P - K_{L,P}(p_C - p_{A1}) - K_T(p_C - p_{A2}) - A_C \Delta \dot{z} \right) \quad . \quad (2.5)$$

Durch Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{\text{mech}}^T \ \mathbf{x}_{\text{hyd}}^T]$ , der die physikalischen Größen

|                        |                                                                      |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $x_1 = z_C$            | Aufbauposition [m],                                                  |
| $x_2 = \Delta z$       | Relativposition zwischen Aufbau und Rad [m],                         |
| $x_3 = \dot{z}_C$      | Aufbaugeschwindigkeit [ $\text{ms}^{-1}$ ],                          |
| $x_4 = \Delta \dot{z}$ | Relativgeschwindigkeit zwischen Aufbau und Rad [ $\text{ms}^{-1}$ ], |
| $x_5 = p_{A1}$         | Druck im Hydrospeicher 1 [Pa],                                       |
| $x_6 = p_{A2}$         | Druck im Hydrospeicher 2 [Pa],                                       |
| $x_7 = p_C$            | Zylinderdruck [Pa]                                                   |

beinhaltet, resultiert ein nichtlineares Gesamtzustandsmodell 7. Ordnung in ALS-Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u + \mathbf{p}(\mathbf{x})s \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$ , Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}$ , Ausgangsgröße  $y \in \mathbb{R}$ , Störgröße  $s \in \mathbb{R}$ ). Dieses Gesamtmodell setzt sich aus dem mechanischen Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{mech}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{u}_{\text{mech}} + \mathbf{f}_{\text{mech},0} - \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \text{ mit } \mathbf{x}_{\text{mech}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

und dem hydropneumatischen Zustandsmodell

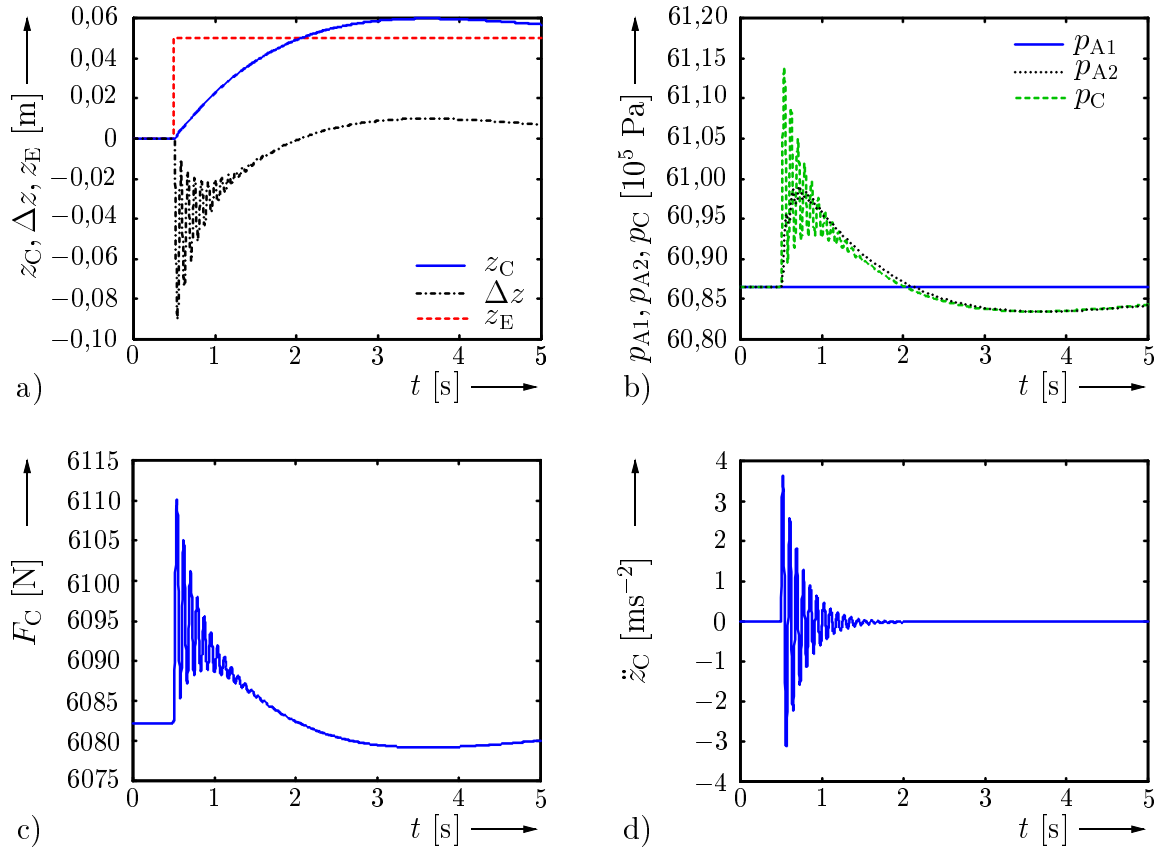
$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{hyd}} = \mathbf{f}_{\text{hyd}}(\mathbf{x}_{\text{hyd}}) + \mathbf{g}_{\text{hyd}}(\mathbf{x}_{\text{hyd}})\mathbf{u}_{\text{hyd}} \quad , \text{ mit } \mathbf{u}_{\text{hyd}}^T = [\omega_P \ \Delta\dot{z}] \quad (2.8)$$

zusammen. Mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_P = 2\pi n_P$  als Systemeingang  $u$ , der Aufbauposition  $z_C$  als Systemausgang  $y = h(\mathbf{x}) = x_1$  und der Fahrbahnposition  $z_E$  als die Störgröße  $s$  ergibt sich mit Gl. (2.1) und Gl. (2.3) bis Gl. (2.5) das nichtlineare Eingrößensystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \\ \dot{x}_4 &= \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \\ &\quad + \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4 + c_W x_1 - c_W x_2}{m_A} - \frac{c_W}{m_A} z_E \\ \dot{x}_5 &= \kappa \left( \frac{x_5^{(\kappa+1)}}{p_1 V_1^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left( K_{L,P}(x_7 - x_5) - \frac{V_P}{2\pi} \omega_P \right) \\ \dot{x}_6 &= \kappa \left( \frac{x_6^{(\kappa+1)}}{p_2 V_2^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} K_T(x_7 - x_6) \\ \dot{x}_7 &= \frac{E_{Fl}}{V_0} \left( \frac{V_P}{2\pi} \omega_P - K_{L,P}(x_7 - x_5) - K_T(x_7 - x_6) - A_C x_4 \right) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Realisierung des Modells der Radeinheit erfolgt in MATLAB<sup>®</sup>/SIMULINK<sup>®</sup> (Math Works Inc. 1992). Bei dem unregulierten System mit Sprunganregung für die Fahrbahnposition  $z_E$  zeigen die Simulationsergebnisse für die Aufbauposition in Bild 2.2(a) deutlich die schlechte Dämpfung des Systems. Allerdings verhält sich das System durch die Hintereinanderschaltung von Hydraulikdrossel und hydropneumatischem Federspeicher wie ein passives Feder-/Dämpferelement (Frühauf 2000), welches schon ohne Regelung die Rad-schwingungen bzw. die Relativposition  $\Delta z$  in Bild 2.2(a) kontrolliert. Durch den Druck  $p_{A2}$  des zweiten Hydrospeichers in Bild 2.2(b) wird der Zylinderdruck  $p_C$  erzeugt, der den Verlauf der Zylinderkraft  $F_C$  (vgl. Bild 2.2(c)) bestimmt. Die Aufbaubeschleunigung  $\ddot{z}_C$  in Bild 2.2(d) verdeutlicht, dass diese ohne Regelung noch sehr groß ist. Daher ist das Ziel einer Regelung die Dämpfungseigenschaft des Systems bei vorgegebener Niveauregulierung zu verbessern, um so den Fahrkomfort zu steigern. Unter einer Niveauregulierung

ist die Trajektorienregelung der Aufbauposition auf einen bestimmten Endwert zu verstehen. Es wird also beim Einschalten der Regelung das Fahrzeug durch die Zylinderkraft angehoben. Beim Ausschalten des Motors stellt sich automatisch die Gleichgewichtslage der Hydrospeicherdrücke und des Zylinderkammerdrucks ein, so dass das Fahrzeug wieder auf seine ursprüngliche Höhe absinkt.



**Bild 2.2:** Simulation des ungeregelten Systems ( $\omega_P = 0$  rad/s):

- (a) Aufbau-, Relativ- und Fahrbahnposition (b) Systemdrücke  
(c) Zylinderkraft (d) Aufbaubeschleunigung

### 3 Reglersynthese für die aktive Radeinheit

Das Zustandsmodell für die aktive hydropneumatische Radeinheit in Abschnitt 2 ist in ALS-Form umschreibbar. Daher lässt sich die differentialgeometrische Methodik zur Überprüfung auf Störgrößenentkoppelbarkeit und zur Herleitung eines Regelgesetzes zur Störgrößenentkopplung oder zur Störgrößenreduktion anwenden. Eine detaillierte Einführung in die Thematik der nichtlinearen differentialgeometrischen Störgrößenentkopplung ist in Nijmeijer und van der Schaft (1990), Isidori (1995), Schwarz (1999), Tsirikos und Arvanitis (2000), Bröcker (2000) geschehen und soll daher diesem Forschungsbericht als Grundlage dienen. Ein neuartiges störgrößenreduzierendes Regelungskonzept, das auf linearen Fehlerdynamikgleichungen mit den Ordnungen des relativen (Vektor-) Grades basiert, ist Gegenstand in Bröcker (2000b) gewesen und bildet ebenso wie die Störgrößenentkopplung eine weitere mathematische Grundlage für die Reglersynthese der Radeinheit. In Abschnitt 3.1 erfolgt die Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit. Gegenstand von Abschnitt 3.2 ist die Berechnung des störgrößenentkoppelnden Regelgesetzes. Auf Grund der Ergebnisse für die Störgrößenentkopplung bei der Simulationsstudie in Abschnitt 4 wird zusätzlich ein störgrößenreduzierendes Regelgesetz in Abschnitt 3.3 ermittelt.

#### 3.1 Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit

Für die differentialgeometrische Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit eines nichtlinearen Eingrößensystems sind die beiden Größen relativer Grad  $r$  und relativer Grad der Störgröße  $r_s$  (Isidori 1995, Schwarz 1999) von Bedeutung. Zum Ermitteln dieser Kenngrößen werden die Lie-Ableitungen nach Anhang A mit Hilfe des zum Teil auf dem Computer Algebra System MAPLE<sup>®</sup> (Waterloo Maple Inc. 1997) aufbauenden Softwarepaketes NSAS (Lemmen u. a. 1995) berechnet.

Ausgehend von dem Zustandsmodell nach Gl. (2.9) lässt sich dieses in ALS-Form nach Gl. (2.6) mit dem Driftterm

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} + \frac{m_C}{m_A} \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4 + c_W x_1 - c_W x_2}{m_A} \\ \kappa \left( \frac{x_5^{(\kappa+1)}}{p_1 V_1^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} K_{L,P}(x_7 - x_5) \\ \kappa \left( \frac{x_6^{(\kappa+1)}}{p_2 V_2^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} K_T(x_7 - x_6) \\ -\frac{E_{F1}}{V_0} (K_{L,P}(x_7 - x_5) + K_T(x_7 - x_6) + A_C x_4) \end{bmatrix}$$

sowie mit dem Systemeingangsvektor  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , dem Eingangsvektor der Störgröße  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  und der Ausgangsfunktion  $h(\mathbf{x})$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\kappa V_P}{2\pi} \left( \frac{x_5^{(\kappa+1)}}{p_1 V_1^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \\ 0 \\ \frac{E_{FI} V_P}{2\pi V_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{c_W}{m_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h(\mathbf{x}) := x_1$$

umformen. Der relative Grad  $r$  dieses Systems ergibt sich mit den Lie-Ableitungen

$$L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) = L_g h(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.1)$$

$$L_g L_f^1 h(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.2)$$

$$L_g L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{A_C E_{FI} V_P}{2\pi m_C V_0} \neq 0 \quad (3.3)$$

zu  $r = 3$ . Des Weiteren gilt für den relativen Grad der Störgröße  $r_s = 3$ , da

$$L_p L_f^0 h(\mathbf{x}) = L_p h(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.4)$$

$$L_p L_f^1 h(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.5)$$

$$L_p L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{d_A c_W}{m_C m_A} \neq 0. \quad (3.6)$$

Folglich gilt  $r = r_s = 3$  und nach der differentialgeometrischen Bedingung zur Störgrößen-entkoppelbarkeit  $r_s \geq r$  (Isidori 1995) für ein ALS lässt sich mit Messung der Störgröße ein störgrößenentkoppelndes Regelgesetz berechnen.

## 3.2 Störgrößenentkopplung

Mit dem störgrößenentkoppelnden Regelgesetz (Isidori 1995, Schwarz 1999)

$$u(\mathbf{x}, s, v) = \frac{v - L_f^r h(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^r \alpha_{k-1} L_f^{k-1} h(\mathbf{x}) - L_p L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) s}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \quad (3.7)$$

ergibt sich für die aktive hydropneumatische Radeinheit der störgrößenentkoppelnde Regler, der ihr das Verhalten eines PT<sub>3</sub>-Ersatzsystems aufprägt:

$$u = \frac{u_Z}{u_N}, \quad \text{mit} \quad (3.8)$$

$$u_Z = v + (d_A V_0 m_A A_C x_7 - d_A V_0 m_A A_C p_0 - d_A V_0 m_A m_C g$$

$$\begin{aligned}
& -d_A^2 V_0 m_A x_4 + d_A V_0 m_C A_C x_7 - d_A V_0 m_C A_C p_0 - d_A V_0 m_C^2 g \\
& -d_A^2 V_0 m_C x_4 + d_A V_0 m_C c_W x_1 - d_A V_0 m_C c_W x_2 \\
& + A_C E_{F1} m_C m_A K_{L,P} x_7 - A_C E_{F1} m_C m_A K_{L,P} x_5 \\
& + A_C E_{F1} m_C m_A K_T x_7 - A_C E_{F1} m_C m_A K_T x_6 + A_C^2 E_{F1} m_C m_A x_4) / (m_C^2 m_A V_0) \\
& - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_3 + \alpha_2 \frac{-A_C x_7 + A_C p_0 + m_C g + d_A x_4}{m_C} - \frac{d_A c_W}{m_C m_A} z_E \\
u_N &= \frac{A_C E_{F1} V_P}{2\pi m_C V_0} \quad .
\end{aligned}$$

Wenn für die Reglerparameter  $\alpha_0 = 0 \text{ s}^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 0 \text{ s}^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 0 \text{ s}^{-1}$  gilt, verhält sich das Ersatzsystem wie eine Integratorkette 3. Ordnung. Der Systemausgang der geregelten Radeinheit ist mit Hilfe des Regelgesetzes nach Gl. (3.8) von der Störgröße  $z_E$  entkoppelt. Der Beweis wird durch Einsetzen der Gl. (3.8), mit  $\alpha_0 = 0 \text{ s}^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 0 \text{ s}^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 0 \text{ s}^{-1}$ , in das System nach Gl. (2.6) erbracht. Das geregelte System weist die Struktur

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_4 \\
\dot{x}_3 &= \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \\
\dot{x}_4 &= \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \\
&+ \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4 + c_W x_1 - c_W x_2}{m_A} - \frac{c_W}{m_A} z_E \\
\dot{x}_5 &= f(v, x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, z_E) \\
\dot{x}_6 &= \kappa \left( \frac{x_6^{(\kappa+1)}}{p_2 V_2^\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot K_T(x_7 - x_6) \\
\dot{x}_7 &= (v m_C^2 m_A - d_A c_W m_C z_E - d_A^2 m_A x_4 - d_A m_C^2 g - d_A^2 m_C x_4 \\
&+ d_A m_C A_C x_7 - d_A m_C A_C p_0 + d_A m_C c_W x_1 - d_A m_C c_W x_2 + d_A m_A A_C x_7 \\
&- d_A m_A A_C p_0 - d_A m_A m_C g) / (m_C m_A A_C)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

auf. Die zeitlichen Ableitungen des Systemausgangs  $y = z_C = x_1$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= x_3 \\
\ddot{y} &= \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \\
y^{(3)} &= v \\
y^{(4)} &= \dot{v} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

sind folglich unabhängig von der Störgröße  $z_E$ , so dass das System störgrößenentkoppelt ist. Das Regelungskonzept mit zusätzlichem linearen Regelkreis (z. B. P-Regler) ist in Bild 3.1 für eine Niveauregulierung dargestellt.

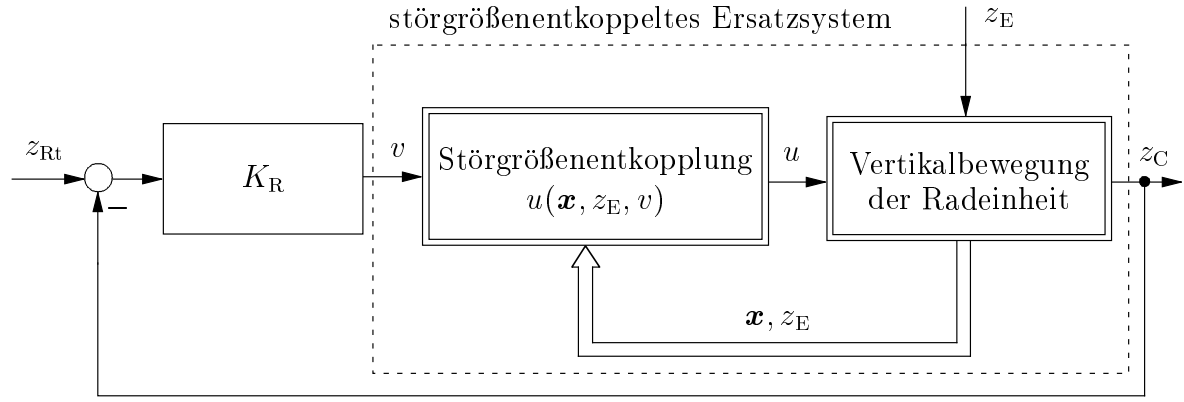


Bild 3.1: Störgrößenentkopplung der aktiven hydropneumatischen Radeinheit

### 3.3 Störgrößenreduktion

Auf Grund der Simulationsergebnisse in Abschnitt 4.1 ist es sinnvoll neben dem störgrößenentkoppelnden Regelgesetz auch ein störgrößenreduzierendes Regelgesetz für die aktive Radeinheit herzuleiten. Denn der Systemausgang  $y = z_C = x_1$  ist zwar mit dem Regelgesetz nach Gl. (3.8) von der Störgröße  $z_E$  entkoppelt, allerdings gilt auch die Forderung, dass die Stellgröße keiner Beschränkung unterliegen darf, um ausreichend den Einfluss der Störgröße zu kompensieren. Dieses Anliegen ist in der Praxis aber nicht realisierbar. Daher erfolgt in diesem Abschnitt die Herleitung eines störgrößenreduzierenden Regelgesetzes für die aktive Radeinheit.

Da sich der relative Grad für die aktive hydropneumatische Radeinheit aus Abschnitt 3.1 zu  $r = 3$  ergibt, müssen die ersten drei zeitlichen Ableitungen des Systemausgangs  $y = z_C = x_1$  berechnet werden:

$$\dot{z}_C = x_3 \quad (3.11)$$

$$\ddot{z}_C = \frac{A_C(x_7 - p_0) - m_C g - d_A x_4}{m_C} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} z_C^{(3)} = & \left( A_C E_{F1} m_C m_A \frac{V_P}{2\pi} \omega_P - A_C E_{F1} m_C m_A K_{L,P} x_7 + A_C E_{F1} m_C m_A K_{L,P} x_5 \right. \\ & - A_C E_{F1} m_C m_A K_T x_7 + A_C E_{F1} m_C m_A K_T x_6 - A_C^2 E_{F1} m_C m_A x_4 \\ & - d_A V_0 m_A A_C x_7 + d_A V_0 m_A A_C p_0 + d_A^2 V_0 m_A x_4 + d_A V_0 m_C c_W z_E \\ & - d_A V_0 m_C A_C x_7 + d_A V_0 m_C A_C p_0 + d_A V_0 m_C (m_C + m_A) g \\ & \left. + d_A^2 V_0 m_C x_4 - d_A V_0 m_C c_W x_1 + d_A V_0 m_C c_W x_2 \right) / V_0 m_C^2 m_A \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Für die Regelabweichung sowie deren zeitliche Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} e &= z_{Rt} - z_C \\ \dot{e} &= \dot{z}_{Rt} - \dot{z}_C \\ \ddot{e} &= \ddot{z}_{Rt} - \ddot{z}_C \\ e^{(3)} &= z_{Rt}^{(3)} - z_C^{(3)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

und somit die Fehlerdynamikgleichung

$$e^{(3)} + c_2 \ddot{e} + c_1 \dot{e} + c_0 e = 0 \quad . \quad (3.15)$$

Durch Einsetzen der Gl. (3.11)–(3.13) in Gl. (3.14) lassen sich diese zu

$$e = z_{\text{Rt}} - x_1 \quad (3.16)$$

$$\dot{e} = \dot{z}_{\text{Rt}} - x_3 \quad (3.17)$$

$$\ddot{e} = \ddot{z}_{\text{Rt}} - \frac{A_{\text{C}}(x_7 - p_0) - m_{\text{C}}g - d_{\text{A}}x_4}{m_{\text{C}}} \quad (3.18)$$

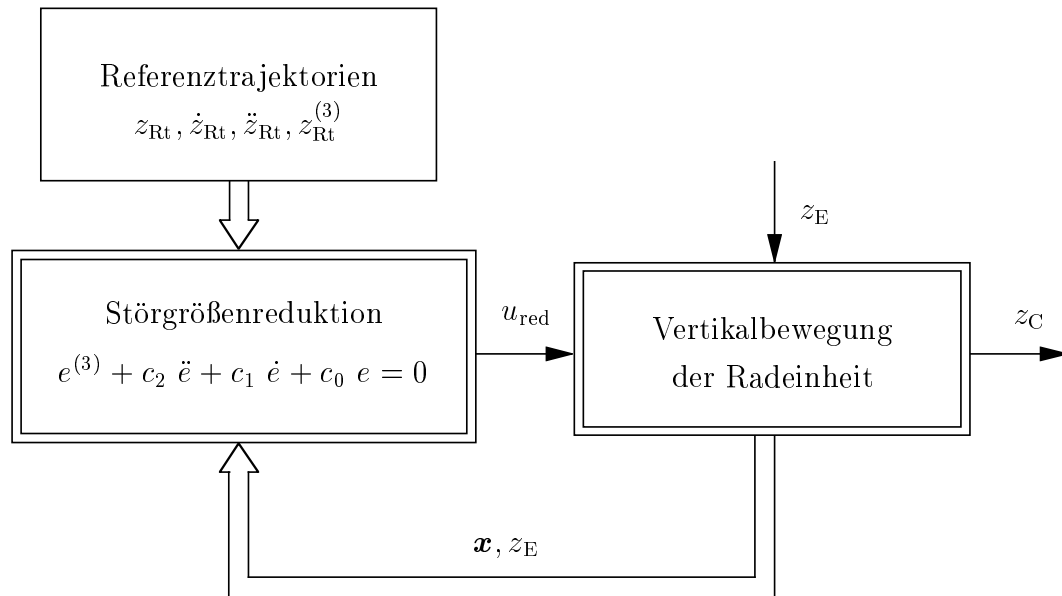
$$\begin{aligned} e^{(3)} = & z_{\text{Rt}}^{(3)} - (A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}\frac{V_{\text{P}}}{2\pi}\omega_{\text{P}} - A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{L,P}}x_7 + A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{L,P}}x_5 \\ & - A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{T}}x_7 + A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{T}}x_6 - A_{\text{C}}^2E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}x_4 \\ & - d_{\text{A}}V_0m_{\text{A}}A_{\text{C}}x_7 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{A}}A_{\text{C}}p_0 + d_{\text{A}}^2V_0m_{\text{A}}x_4 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}z_{\text{E}} \\ & - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}A_{\text{C}}x_7 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}A_{\text{C}}p_0 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}(m_{\text{C}} + m_{\text{A}})g \\ & + d_{\text{A}}^2V_0m_{\text{C}}x_4 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}x_1 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}x_2)/V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

bestimmen. Durch erneutes Einsetzen der Gl. (3.16)–(3.19) in Gl. (3.15) und anschließendes Auflösen der Gleichung nach der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\text{P}}$ , ergibt sich das störgrößenreduzierende Regelgesetz:

$$u_{\text{red}} = \frac{u_{\text{Z}}}{u_{\text{N}}} \quad , \text{ mit} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} u_{\text{Z}} = & 2\pi(-d_{\text{A}}^2V_0m_{\text{A}}x_4 - d_{\text{A}}^2V_0m_{\text{C}}x_4 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}^2g + z_{\text{Rt}}^{(3)}V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}} \\ & + A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{L,P}}x_7 - A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{L,P}}x_5 + A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{T}}x_7 \\ & - A_{\text{C}}E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}K_{\text{T}}x_6 + A_{\text{C}}^2E_{\text{FI}}m_{\text{C}}m_{\text{A}}x_4 + d_{\text{A}}V_0m_{\text{A}}A_{\text{C}}x_7 \\ & - d_{\text{A}}V_0m_{\text{A}}A_{\text{C}}p_0 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}z_{\text{E}} + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}A_{\text{C}}x_7 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}A_{\text{C}}p_0 \\ & + d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}x_1 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}c_{\text{W}}x_2 - d_{\text{A}}V_0m_{\text{C}}gm_{\text{A}} + c_2V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}\ddot{z}_{\text{Rt}} \\ & - c_2V_0m_{\text{C}}m_{\text{A}}A_{\text{C}}x_7 + c_2V_0m_{\text{C}}m_{\text{A}}A_{\text{C}}p_0 + c_2V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}g + c_2V_0m_{\text{C}}m_{\text{A}}d_{\text{A}}x_4 \\ & + c_1V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}\dot{z}_{\text{Rt}} - c_1V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}x_3 + c_0V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}z_{\text{Rt}} - c_0V_0m_{\text{C}}^2m_{\text{A}}x_1) \\ u_{\text{N}} = & m_{\text{C}}m_{\text{A}}A_{\text{C}}E_{\text{FI}}V_{\text{P}} \quad . \end{aligned}$$

Das Regelgesetz nach Gl. (3.20) benötigt als Systemeingänge die Referenztrajektorie  $z_{\text{Rt}}$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{z}_{\text{Rt}}, \ddot{z}_{\text{Rt}}, z_{\text{Rt}}^{(3)}$ , die allerdings offline berechnet werden können. Als gemessene Größen müssen dem störgrößenreduzierenden Regelgesetz die Zustände  $x_1$  bis  $x_7$  und die Fahrbahnposition  $z_{\text{E}}$  zurückgeführt werden (s. Bild 3.2). Die Reglerparameter  $c_0, c_1, c_2$  sind dem Übertragungsverhalten eines PT<sub>3</sub>-Systems entsprechend zu optimieren.



**Bild 3.2:** Störgrößenreduktion der aktiven hydropneumatischen Radeinheit

## 4 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt sind die Simulationsergebnisse für die Störgrößenentkopplung und Störgrößenreduktion der aktiven Radeinheit aufgeführt. Sowohl die Regelstrecke aus Abschnitt 2 als auch die entsprechenden Regler aus Abschnitt 3 sind in der Simulationsumgebung MATLAB<sup>®</sup>/SIMULINK<sup>®</sup> implementiert. Dabei bilden verschiedene Testsignale als Referenztrajektorie die Grundlage der Simulationsstudie. Für die Fahrbahnposition als Störgröße findet zusätzlich zu deterministischen Testsignalen auch ein Störtauschsignal Verwendung, welches in besonderem Maße ein „gemessenes“ Signal der Fahrbahnunebenheiten in der Praxis repräsentiert. Die Systemparameter für das Modell der aktiven Radeinheit in der Simulation gelten nach Anhang B.

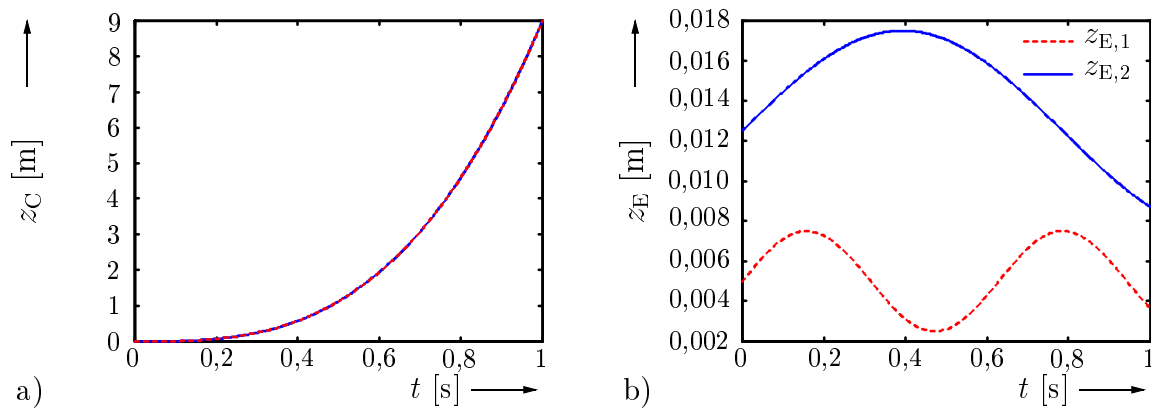
### 4.1 Störgrößenentkopplung

Das Regelgesetz nach Gl. (3.8) entkoppelt den Systemausgang  $y = z_C = x_1$  von der Störgröße  $z_E$ . Bild 4.1 gibt diesen Sachverhalt wieder. Bei der Simulation ist der Verlauf der Aufbauposition  $z_C$  in Bild 4.1(a) unabhängig von den in Bild 4.1(b) dargestellten Fahrbahnpositionen

$$z_{E,1} = z_{a,1} \sin(\omega_{E,1}t) + z_{0,1} \quad , \quad (4.1)$$

$$z_{E,2} = z_{a,2} \sin(\omega_{E,2}t) + z_{0,2} \quad , \quad (4.2)$$

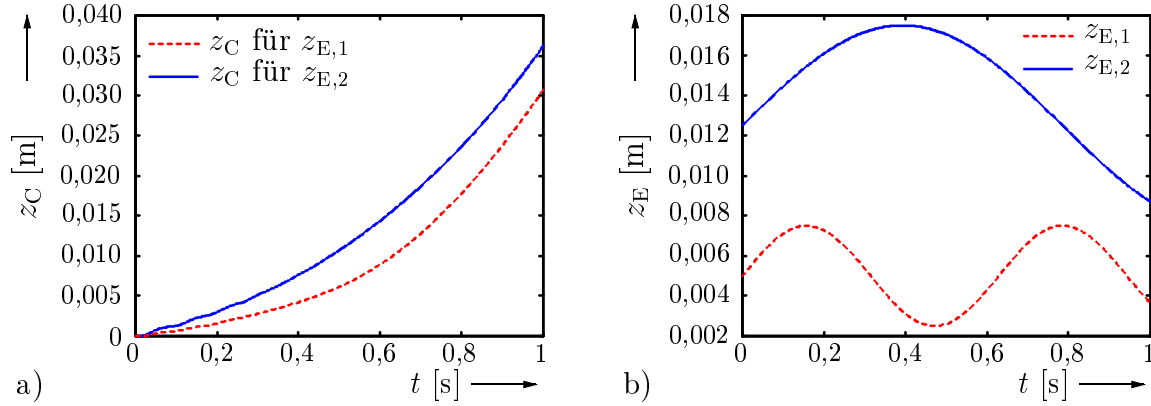
mit  $z_{a,1} = 0,0025 \text{ m}$ ,  $\omega_{E,1} = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $z_{0,1} = 0,005 \text{ m}$  und  $z_{a,2} = 0,005 \text{ m}$ ,  $\omega_{E,2} = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $z_{0,2} = 0,0125 \text{ m}$ . Dabei unterliegt das Regelgesetz keiner Stellgrößenbegrenzung. Des Weiteren prägt der Regler der aktiven Radeinheit eine Integratorkette 3. Ordnung auf (Reglerparameter  $\alpha_0 = 0 \text{ s}^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 0 \text{ s}^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 0 \text{ s}^{-1}$ ). Der neue Eingang ist zu  $v = 54 \text{ ms}^{-3}$  gewählt. In der Praxis können allerdings nicht beliebig hohe Stellgrößen generiert werden. Für eine ideale Motor-Pumpe-Einheit ist die Drehzahl  $n_P$  (und somit auch die



**Bild 4.1:** Simulation der Störgrößenentkopplung der Radeinheit als  $I_3$ -Ersatzsystem ohne Stellgrößenbegrenzung:

(a) Aufbauposition (b) Fahrbahnpositionen  $z_{E,1}$  und  $z_{E,2}$

Winkelgeschwindigkeit  $\omega_P$ ) der Welle begrenzt. Eine Stellgrößenbegrenzung ist folglich unerlässlich. Da – wie in Abschnitt 3.1 gezeigt – die beiden relativen Grade  $r = r_S = 3$  sind, ist es nur möglich den Einfluss der Störgröße  $z_E$  auf den Ausgang  $z_C$  zu kompensieren, wenn gerade keine Stellgrößenbegrenzung vorliegt. Demnach ist die aktive Radeinheit nicht mehr mit der im Folgenden gewählten Stellgrößenbegrenzung  $-83,33 \text{ s}^{-1} \leq n_P \leq 83,33 \text{ s}^{-1}$  störgrößenentkoppelt. In Bild 4.2(a) sind die unterschiedlichen Verläufe der Aufbauposition für die Fahrbahnpositionen  $z_{E,1}$  und  $z_{E,2}$  (vgl. Bild 4.2(b)) dargestellt, die diese Tatsache darlegen.

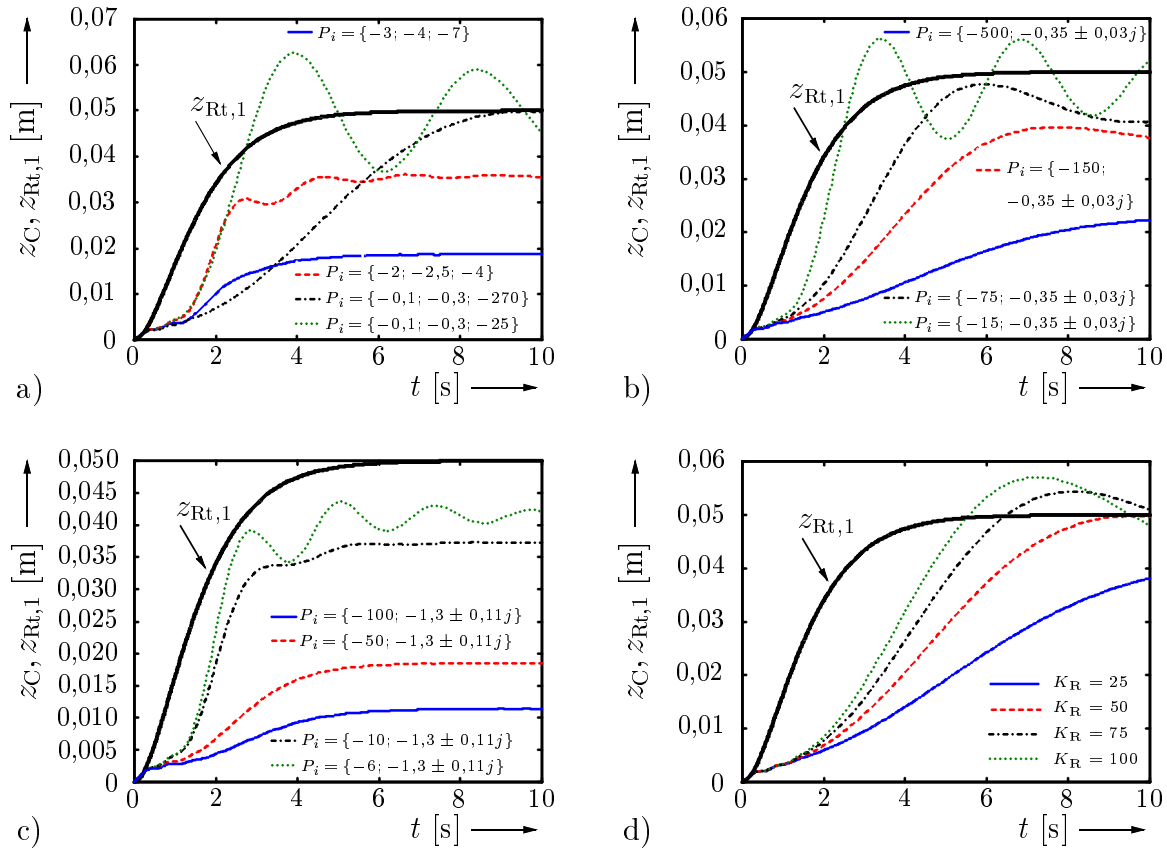


**Bild 4.2:** Simulation der Störgrößenentkopplung der Radeinheit als  $I_3$ -Ersatzsystem mit Stellgrößenbegrenzung  $-83,33 \text{ s}^{-1} \leq n_P \leq 83,33 \text{ s}^{-1}$ :  
(a) Aufbauposition (b) Fahrbahnpositionen  $z_{E,1}$  und  $z_{E,2}$

Die Einstellung der Pollagen für die Reglerparameter  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  gestaltet sich ebenfalls als nicht ideal. Bei Verwendung der Referenztrajektorie für die Aufbauposition zur Niveau-regulierung

$$z_{Rt,1} = z_{Rt,1,0} \left( 1 - \frac{T_{Rt,1} \exp(-\frac{t}{T_{Rt,1}})}{T_{Rt,1} - T_{Rt,2}} + \frac{T_{Rt,2} \exp(-\frac{t}{T_{Rt,2}})}{T_{Rt,1} - T_{Rt,2}} \right), \quad (4.3)$$

mit  $z_{Rt,1,0} = 0,05 \text{ m}$ ,  $T_{Rt,1} = 0,9 \text{ s}$ ,  $T_{Rt,2} = 0,8 \text{ s}$  als eine analytische Funktion, die die Sprungantwort eines reell-poligen  $PT_2$ -Systems beschreibt, sind in Bild 4.3 verschiedene Pollagen exemplarisch für  $z_{E,1}$  veranschaulicht. Für die Wahl von drei reellen Polen und einer Reglerverstärkung  $K_R = 50 \text{ s}^{-3}$  in Bild 4.3(a) ergibt sich, dass für die heuristisch eingestellten Pole  $P_1 = -0,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_2 = -0,3 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_3 = -270 \text{ s}^{-1}$  der vorgegebene Endwert  $z_{Rt,1,0}$  ohne Überschwingen erreicht wird. Durch Verkleinern des dritten reellen Pols nimmt die Regelabweichung zwar ab, allerdings wird das System immer schwingungsfähiger. Die Wahl zweier konjugiert komplexer Pole und einem reellen Pol führt zu keiner Verbesserung. Bild 4.3(b) verdeutlicht die Variation des reellen Pols in Abhängigkeit von zwei kleinen konjugiert komplexen Polen. Durch Verringerung des reellen Pols nähert sich die Aufbauposition der Referenztrajektorie zwar schneller, jedoch ist dies mit erhöhten Schwingungen verbunden. Durch Vergrößern der konjugiert komplexen Pole in Bild 4.3(c) lässt sich diese Grenze zur Schwingungsneigung verschieben, allerdings auch nicht für beliebig hohe



**Bild 4.3:** Simulation der Störgrößenentkopplung der Radeinheit als  $PT_3$ -Ersatzsystem:  
 (a) Variation reeller Pollagen (b) Variation eines reellen Pols mit zwei kleinen konjugiert komplexen Polen (c) Variation eines reellen Pols mit zwei größeren konjugiert komplexen Polen (d) Variation der Verstärkung  $K_R$  bei heuristisch eingestellten Pollagen

konjugiert komplexe Pole. Auch das Erhöhen der Verstärkung  $K_R$  in Bild 4.3(d) für die heuristisch eingestellten Pole  $P_1 = -0,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_2 = -0,3 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_3 = -270 \text{ s}^{-1}$  ergibt ein Überspringen. Weitere Pollagen führen zu keinem besseren Ergebnis. Mit Hilfe des P-Reglers lässt sich daher die Referenztrajektorie  $z_{Rt,1}$  nicht besonders gut nachfahren. Für das  $PT_3$ -Ersatzsystem besteht schließlich die Möglichkeit des Einsatzes eines PI-Reglers, der das System schneller der Referenztrajektorie folgen lassen kann. Hierfür gilt es dann fünf Reglerparameter heuristisch einzustellen, was einer mit großem Aufwand verbundenen Aufgabe entspricht. Außerdem ist die aktive Radeinheit dadurch weiterhin nicht störgrößenentkoppelt. Im Hinblick auf den Einsatz des störgrößenentkoppelnden Reglers in der Praxis ist eine weitere Schwierigkeit zu erwähnen. Die Störgrößenentkopplung funktioniert nur dann, wenn die Fahrbahnposition  $z_E$  durch geeignete Sensorik messbar ist. In der Praxis ist das Anbringen eines Sensors aber äußerst problematisch, so dass zur Schätzung der Fahrbahnunebenheiten ein Störgrößenbeobachter zum Einsatz kommt (Lückel u. a. 2000). Da dieser immer fehlerbehaftet ist, kann die reale Störgröße nicht dem Regelgesetz als Grundlage dienen (was nach der differentialgeometrischen Bedingung zur

Störgrößenentkoppelbarkeit als Voraussetzung gilt). Auf Grund der vorher genannten Argumentation ist Gegenstand des Abschnitts 4.2 die Synthese des störgrößenreduzierenden Regelgesetzes.

## 4.2 Störgrößenreduktion

Im Folgenden ist die Reglersynthese zur Störgrößenreduktion mit dem Regelgesetz nach Gl. (3.20) Gegenstand der Untersuchung. Neben deterministischen Störsignalen in Abschnitt 4.2.1 findet auch ein Störrauschsignal in Abschnitt 4.2.2 Anwendung. Ein Vergleich mit dem störgrößenentkoppelnden Regler aus Abschnitt 4.1 zeigt die Leistungsfähigkeit des neuartigen störgrößenreduzierenden Regelgesetzes für die aktive Radeinheit.

### 4.2.1 Deterministische Störsignale

Die störgrößenreduzierende Regelung ist durch die in Abschnitt 4.1 eingeführte Stellgrößenbegrenzung auf den Drehzahlbereich von  $-83,33 \text{ s}^{-1} \leq n_P \leq 83,33 \text{ s}^{-1}$  beschränkt. Als erstes Testsignal wird sowohl für die Referenztrajektorie zur Niveauregulierung als auch für das Störsignal eine Sprungfunktion  $z_{\text{Rt},2} = z_{\text{E},3} := 0,05 \text{ m} \cdot 1(t)$  gewählt. Dieses Testsignal ist in der linearen Regelungstheorie weit verbreitet (Schwarz 1971, Kailath 1980, Merz und Jaschek 1993), so dass eine erste Aussage über die Qualität der Regelung möglich ist. Liegt die heuristisch eingestellte Polkonfiguration

$$P_1 = -2 \text{ s}^{-1}, \quad P_2 = -10 \text{ s}^{-1}, \quad P_3 = -50 \text{ s}^{-1} \quad (4.4)$$

zu Grunde, so lassen sich die Reglerparameter für die lineare Fehlerdynamikgleichung nach Gl. (3.15) berechnen:

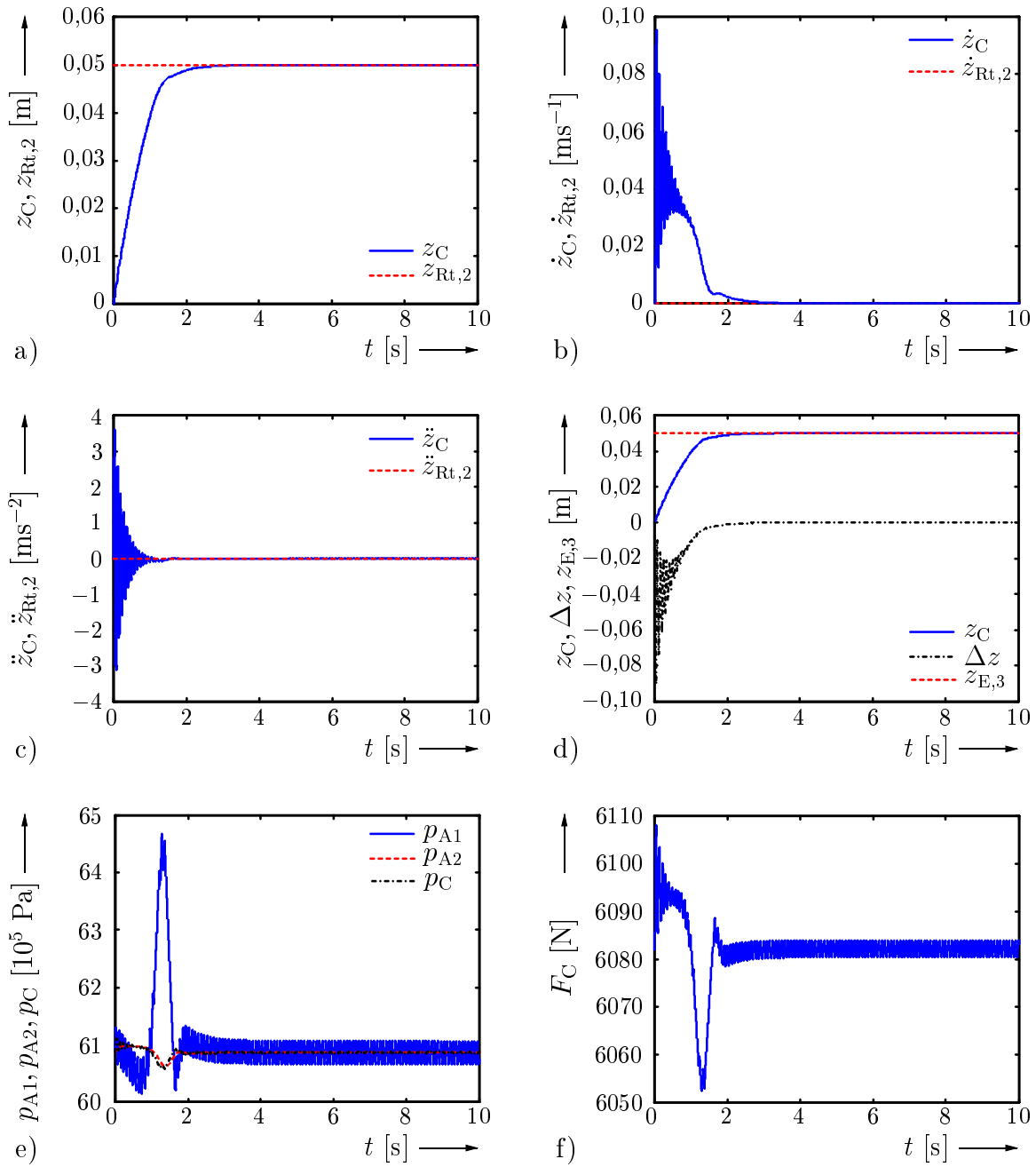
$$c_0 = 1000 \text{ s}^{-3}, \quad (4.5)$$

$$c_1 = 620 \text{ s}^{-2}, \quad (4.6)$$

$$c_2 = 62 \text{ s}^{-1}. \quad (4.7)$$

Mit störgrößenreduzierender Regelung erreicht die Aufbauposition  $z_C$  innerhalb von drei Sekunden die Referenztrajektorie  $z_{\text{Rt},2}$  ohne Überspringen (vgl. Bild 4.4(a)). Die bleibende Regelabweichung ist gering. Die erhöhte Geschwindigkeit  $\dot{z}_C$  sowie Beschleunigung  $\ddot{z}_C$  des Aufbaus im Anfangsbereich in Bild 4.4(b)/(c) gewährleisten das schnelle Erreichen der Referenztrajektorie und nähern sich für alle weiteren Zeiten dem Sollwert Null an. Bild 4.4(d) spiegelt das Verhalten der aktiven Radeinheit mit Regelung für die Größen Aufbau-, Relativ- und Fahrbahnposition wider. Bild 4.4(e) verdeutlicht die Arbeitsweise der beiden Hydrospeicher während der Regelung, woraus sich der für die Zylinderkraft  $F_C$  (vgl. Bild 4.4(f)) resultierende Zylinderdruck  $p_C$  ergibt.

Als zweites Testsignal findet für die Referenztrajektorie die in Abschnitt 4.1 mit Gl. (4.3) vorgestellte Funktion  $z_{\text{Rt},3} = z_{\text{Rt},1}$  Anwendung, die die Sprungantwort eines reell-poligen



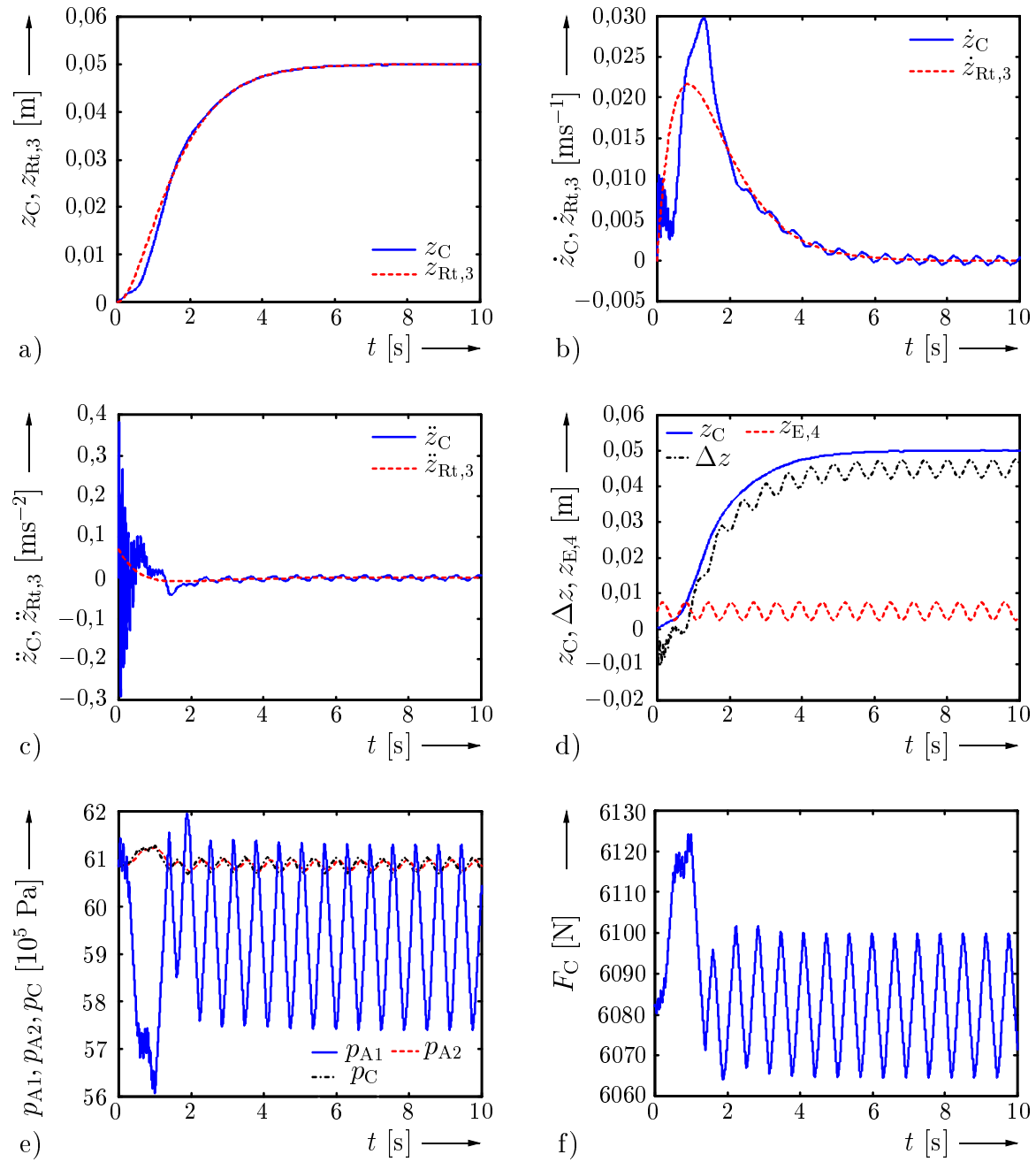
**Bild 4.4:** Simulation der Störgrößenreduktion der Radeinheit mit  $z_{Rt,2}$ :

- (a) Aufbauposition (b) Aufbaugeschwindigkeit (c) Aufbaubeschleunigung  
 (d) Aufbau-, Relativ- und Fahrbahnposition (e) Systemdrücke (f) Zylinderkraft

PT<sub>2</sub>-Systems beschreibt. Das Störsignal ist wiederum die Sinusfunktion  $z_{E,4} = z_{E,1}$  nach Gl. (4.1). Wählt man für die Referenztrajektorie  $z_{Rt,3}$  die Pole

$$P_1 = -2500 \text{ s}^{-1}, \quad (4.8)$$

$$P_{2,3} = -2 \pm 2j \text{ [s}^{-1}] \quad (4.9)$$



**Bild 4.5:** Simulation der Störgrößenreduktion der Radeinheit mit  $z_{Rt,3}$ :

(a) Aufbauposition (b) Aufbaugeschwindigkeit (c) Aufbaubeschleunigung

(d) Aufbau-, Relativ- und Fahrbahnposition (e) Systemdrücke (f) Zylinderkraft

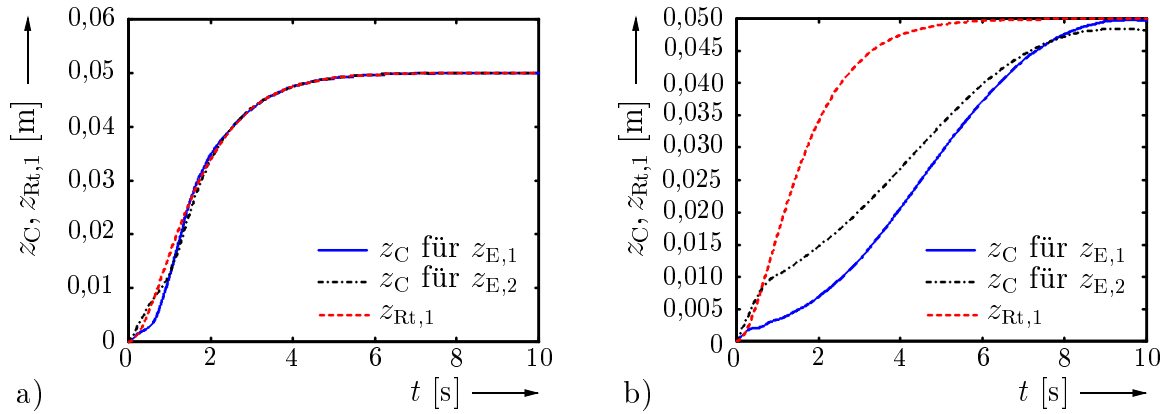
und somit die Reglerparameter

$$c_0 = 20000 \text{ s}^{-3} \quad , \quad (4.10)$$

$$c_1 = 10008 \text{ s}^{-2} \quad , \quad (4.11)$$

$$c_2 = 2504 \text{ s}^{-1} \quad , \quad (4.12)$$

so folgt die Aufbauposition  $z_C$  der Referenztrajektorie sehr gut (vgl. Bild 4.5(a)). Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte  $\dot{z}_C$ ,  $\ddot{z}_C$  in Bild 4.5(b)/(c) sind hinreichend klein im Anfangsbereich ( $t < 2$  s). Für alle weiteren Zeiten nähern sich  $\dot{z}_C$  und  $\ddot{z}_C$  wieder dem Sollwert Null an. In Bild 4.5(d) zeigt sich, dass mit Regelung der aktiven Radeinheit die Fahrbahnschwingungen  $z_{E,4}$  genügend gedämpft und gleichzeitig das Folgen der Referenztrajektorie gewährleistet ist. Das Erreichen des Endwertes von  $z_{Rt,3,0} = 0,05$  m gelingt für die Aufbauposition in Bild 4.5(a) ebenso gut wie die Aufbauposition für die Referenztrajektorie  $z_{Rt,2}$  (vgl. Bild 4.4(a)) – jedoch wesentlich glatter. Die Systemdrücke in Bild 4.5(e) und die Zylinderkraft  $F_C$  in Bild 4.5(f) verlaufen ebenfalls glatt. Somit eignet sich für den störgrößenreduzierenden Regler die Referenztrajektorie, welche die Sprungantwort eines reell-poligen PT<sub>2</sub>-Systems beschreibt, besonders gut. In Bild 4.6 ist



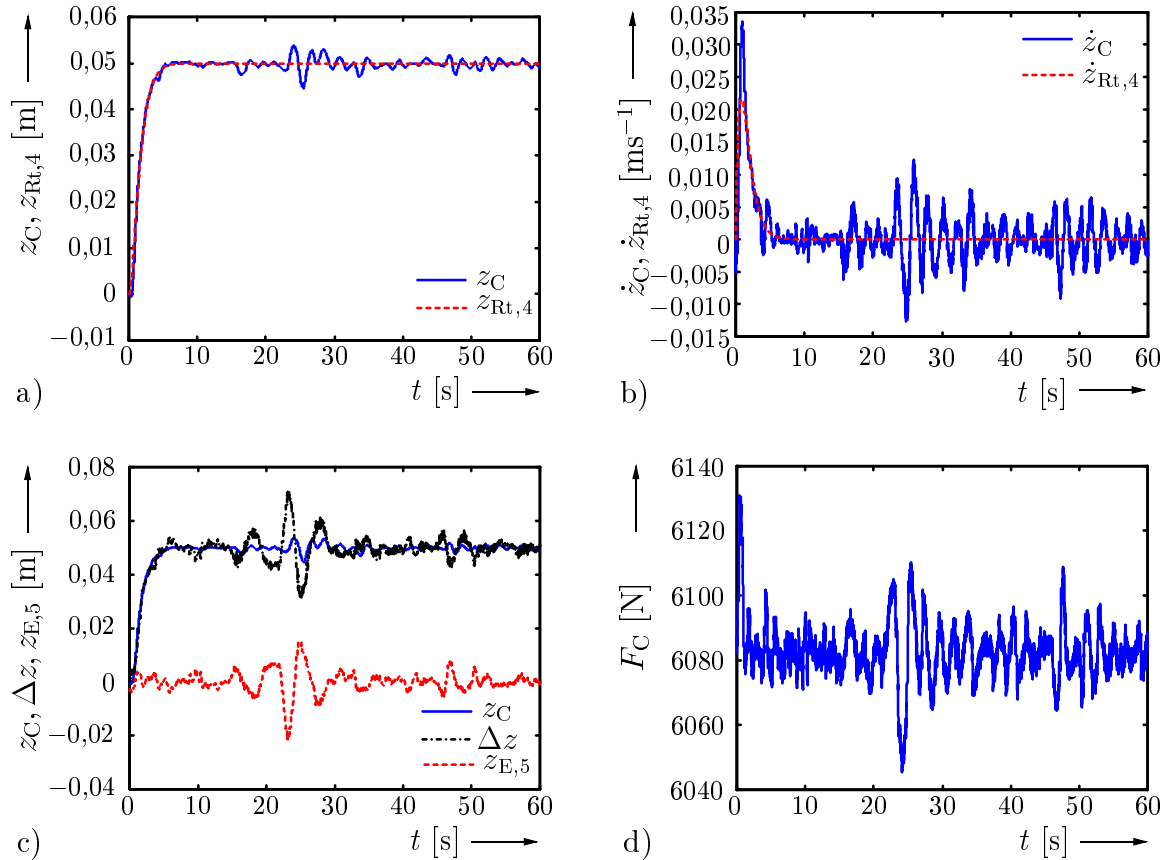
**Bild 4.6:** Vergleich der Störgrößenreduktion mit der Störgrößenentkopplung der Radeinheit bei unterschiedlichen Fahrbahnpositionen  $z_{E,1}$  und  $z_{E,2}$ :

- (a) *Störgrößenreduktion*: Referenz- und Aufbaupositionen
- (b) *Störgrößenentkopplung*: Referenz- und Aufbaupositionen

der Vergleich der Störgrößenreduktion mit dem störgrößenentkoppelnden Regelgesetz dargestellt. Für die Regelungskonzepte kommen jeweils die gleiche Referenztrajektorie  $z_{Rt,1}$  und die Fahrbahnpositionen  $z_{E,1}$  sowie  $z_{E,2}$  zum Einsatz. Es zeigt sich, dass bei der Störgrößenreduktion in Bild 4.6(a) die Regelung wesentlich robuster gegenüber der Variation verschiedener Fahrbahnprofile ist. Im Anfangsbereich sind lediglich kleine Abweichungen für die Aufbauposition bei unterschiedlicher Fahrbahnposition  $z_{E,1}$ ,  $z_{E,2}$  zu verzeichnen. Die Aufbauposition folgt der Referenztrajektorie  $z_{Rt,1}$  für alle weiteren Zeiten sehr gut. Die Radeinheit ist in Bild 4.6(b) mit dem störgrößenentkoppelnden Regelgesetz und den in Abschnitt 4.1 heuristisch eingestellten Polen  $P_1 = -0,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_2 = -0,3 \text{ s}^{-1}$ ,  $P_3 = -270 \text{ s}^{-1}$  sowie der Reglerverstärkung  $K_R = 50 \text{ s}^{-3}$  wesentlich anfälliger für unterschiedliche Fahrbahnpositionen als die Störgrößenreduktion. Die beiden Verläufe für die Aufbauposition  $z_C$  weichen bei unterschiedlicher Störung sehr stark voneinander ab. Folglich eignet sich das störgrößenreduzierende Regelgesetz zur Verminderung des Einflusses der Fahrbahnposition als Störgröße auf den Systemausgang – die Aufbauposition  $z_C$  – bei gleichzeitiger Niveauregulierung für die aktive Radeinheit.

### 4.2.2 Stör rauschsignal

In Abschnitt 4.2.1 erfolgt die störgrößenreduzierende Regelung der aktiven Radeinheit mit Hilfe von deterministischen Testsignalen. Für die Referenztrajektorie ist dies erwünscht, da der störgrößenreduzierende Regler nach Gl. (3.20) eine Trajektorienregelung für die Aufbau position erzielt und damit auch zeitliche Ableitungen der Referenztrajektorie als Systemeingänge berechenbar sein müssen. Für die Fahrbahn position als Störgröße tritt in der Praxis allerdings kein deterministisches Signal auf. Daher findet in der Simulation die Verwendung eines Stör rauschsignals  $z_{E,5}$  statt. Als Referenztrajektorie wird erneut die in Abschnitt 4.2.1 der Sprungantwort eines reell-poligen  $PT_2$ -Systems nachgebildeten Trajektorie  $z_{Rt,4} = z_{Rt,1}$  gewählt. Die Polkonfiguration lässt sich ebenfalls nach Gl. (4.8)–(4.9) übernehmen. Liegt die Stellgrößenbegrenzung für die Drehzahl der Motor-Pumpe-Einheit  $-83,33 \text{ s}^{-1} \leq n_P \leq 83,33 \text{ s}^{-1}$  vor, so zeigt Bild 4.7(a), dass die Aufbau position  $z_C$  der Referenztrajektorie im Beschleunigungsbereich sehr gut folgt. Wenn die Geschwindigkeit  $\dot{z}_C$  (bzw. die Beschleunigung  $\ddot{z}_C$ ) in Bild 4.7(b) gegen den Grenzwert Null streben soll, reicht die vorhandene Stellenergie jedoch nicht mehr zur Korrektur größerer Fahr-



**Bild 4.7:** Simulation der Störgrößenreduktion der Radeinheit mit Stör rauschsignal und Stellgrößenbegrenzung  $-83,33 \text{ s}^{-1} \leq n_P \leq 83,33 \text{ s}^{-1}$ :

(a) Aufbau position (b) Aufbaugeschwindigkeit (c) Aufbau-, Relativ- und Fahrbahn position (d) Zylinderkraft

bahnschwingungen aus. Ursache hierfür ist, dass die Fahrbahnposition  $z_{E,5}$  in Bild 4.7(c) größere Amplituden in verschiedenen Zeitintervallen als die analytischen Störsignale in Abschnitt 4.2.1 aufweist. Dennoch folgt die Aufbauposition  $z_C$  der Referenztrajektorie über den gesamten Zeitbereich und der Einfluss der Fahrbahnschwingungen auf die Aufbauposition ist stark vermindert. Lediglich die Zylinderkraft in Bild 4.7(d) fluktuiert etwas stärker als bei den deterministischen Störsignalen. Somit ist gezeigt, dass der nichtlineare störgrößenreduzierende Regler sich auch für den Einsatz in der Praxis eignen sollte.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Forschungsbericht befasst sich mit der Untersuchung der Störgrößenentkoppelbarkeit und der nichtlinearen Reglersynthese zur Störgrößenentkopplung sowie zur Störgrößenreduktion einer aktiven hydropneumatischen Fahrzeugfederung für die Vertikalbewegung einer Radeinheit. Das analytische nichtlineare Systemmodell 7. Ordnung nach Lückel u. a. (2000) bildet die Grundlage zur differentialgeometrischen Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit und der Reglersynthese. Sowohl der theoretische Ansatz der nichtlinearen Störgrößenreduktion als auch die Anwendung auf die Radeinheit sind neuartig.

Die differentialgeometrische Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit liefert das Ergebnis, dass die aktive Radeinheit mit einem nichtlinearen Regelgesetz (Isidori 1995, Schwarz 1999) vom Einfluss der Fahrbahnposition als Störgröße entkoppelbar ist. Voraussetzung hierfür ist, dass die Fahrbahnposition als Messgröße vorliegt. Die Simulationsstudie in Abschnitt 4 zeigt, dass nur dann eine Störgrößenentkopplung uneingeschränkt praktikabel ist, wenn die Regelung durch keine Stellgrößenbegrenzung beschränkt ist. Für eine Motor-Pumpe-Einheit als Stellglied ist die Drehzahl der Welle jedoch begrenzt. Eine Stellgrößenbegrenzung ist folglich unerlässlich. Demnach ist die aktive Radeinheit nicht mehr mit einer Stellgrößenbegrenzung störgrößenentkoppelt. Zur Niveauregulierung wird eine Referenztrajektorie als analytische Funktion, die die Sprungantwort eines reell-poligen  $PT_2$ -Systems beschreibt, gewählt. Die Simulationsstudie ergibt für die Störgrößenentkopplung nur befriedigende Ergebnisse. Daher erfolgt die Deduktion eines störgrößenreduzierenden Reglers, der den Einfluss der Fahrbahnposition auf den Systemausgang – die Aufbauposition – zumindest vermindert. Der störgrößenreduzierende Regler benötigt als Systemeingänge die Referenztrajektorie sowie deren zeitliche Ableitungen. Ebenso erfordert die Regelung die Kenntnis der Zustandsgrößen der aktiven Radeinheit und der Fahrbahnposition. Beim Einsatz des störgrößenreduzierenden Reglers folgt die Aufbauposition für deterministische Störsignale der Referenztrajektorie gut. Da in der Praxis aber für die Fahrbahnposition kein deterministisches Signal auftritt, wird auch die Wirkung eines Störtauschesignals auf die Regelung erfolgreich erprobt. Die Störgrößenreduktion vermindert wesentlich den Einfluss der Fahrbahnunebenheiten auf die Aufbauposition bei gleichzeitig erwünschter Niveauregulierung. Die Ergebnisse zeigen, dass sich der störgrößenreduzierende Regler für dieses Anwendungsbeispiel und folglich auch in der Praxis gut einsetzen lässt.

Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte die Erprobung eines nichtlinearen störgrößenreduzierenden Regelgesetzes mit Modellierung nach dem „Skyhook“-Prinzip sein, welches die virtuelle Kopplung des Aufbaus über einen Dämpfer mit dem raumfesten Koordinatensystem ermöglicht. Dadurch kann der Aufbau schwingungstechnisch von der Fahrbahnanregung entkoppelt und somit die Aufbaubeschleunigungen reduziert werden (Frühauf und Rutz 1998). Des Weiteren besteht die Möglichkeit für die aktive Radeinheit einen nichtlinearen Beobachter auszulegen, um den Sensoreinsatz am Fahrzeug zu reduzieren.

## 6 Literatur

- Backé, W.** und **J. Helling.** 1990. *Fluidtechnik für mobile Anwendungen*. Vorlesungsumdruck 1. Auflage. RWTH Aachen.
- Bröcker, M.** 2000. *Zur differentialgeometrischen Störgrößenentkopplung nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 03/00. MSRT. Universität Duisburg.
- Bröcker, M.** 2000a. An analysis of differential geometric and differential algebraic method for disturbance decoupling of nonlinear systems. *Proc. 8th IFAC Symposium on Computer Aided Control Systems Design (CACSD 2000)*. Salford/Großbritannien. Session M3B.
- Bröcker, M.** 2000b. *Störgrößenreduktion am Beispiel eines hydrostatischen Antriebs eines elastischen Roboters*. Forschungsbericht 04/00. MSRT. Universität Duisburg.
- Bröcker, M., J. Polzer** und **M. Lemmen.** 2000. An advanced algorithm based on differential algebra for disturbance decoupling of nonlinear systems. *Proc. 39th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2000)*. Sydney/Australien. 4367–4372.
- Delaleau, E.** und **M. Fliess.** 1994. Nonlinear disturbance rejection by quasi-static state feedback. *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications (Proc. MTNS'93)*, hg. von U. Helmke, R. Mennicken und J. Saurer. *Mathematical Research*. 79. 109–112. Berlin: Akademie.
- Fliess, M.** 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München. 114–118.
- Fliess, M.** und **S. T. Glad.** 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.
- Frühauf, F.** 2000. *Aktive Fahrzeugfederung*. VDI-Bericht. 1533. VDI. Düsseldorf. 27–37.
- Frühauf, F.** und **R. Rutz.** 1998. Innovia – eine Aktive Federung für den Reisebus. *Automatisierungstechnik - at 3/98*. 120–127.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Kailath, T.** 1980. *Linear Systems*. Englewood Cliffs/USA: Prentice-Hall.
- Kitching, K. J., D. J. Cole** und **D. Cebon.** 2000. Performance of a Semi-Active Damper for Heavy Vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (Transactions of ASME)*. 122. 498–506.

- Kolchin, E. R.** 1973. *Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure And Applied Mathematics*. 54. New York/USA: Academic Press.
- Küpper, K.** 1995. *Zur Modellierung technischer Systeme mittels Fuzzy-Logik. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8*. 507. Düsseldorf: VDI.
- Lemmen, M., T. Wey und M. Jelali.** 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 20/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Lückel, J., T. Koch und J. Schmitz.** 2000. *Mechatronik als integrative Basis für innovative Produkte. VDI-Bericht*. 1533. VDI. Düsseldorf. 1–26.
- Math Works Inc.** 1992. *Matlab User's Guide*. Natick/USA.
- Merz, L. und H. Jaschek.** 1993. *Grundkurs der Regelungstechnik – Einführung in die praktischen und theoretischen Methoden*. München: Oldenbourg. 12. Auflage.
- Nakai, H., S. Oosaku und Y. Motozono.** 2000. Application of Practical Observer to Semi-Active Suspensions. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (Transactions of ASME)*. 122. 284–289.
- Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.
- Ritt, J. F.** 1950. *Differential Algebra*. New York/USA: Amer. Math. Soc.
- Rodić, A. D. und M. K. Vukobratović.** 1999. Contribution to the Integrated Control Synthesis of Road Vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 7(1). 64–77.
- Sammier, D., O. Senname und L. Dugard.** 2000. Simultaneous decoupling and disturbance rejection on an active full-car suspensions model. *1st IFAC-Conference on MECHATRONIC SYSTEMS (Mechatronics 2000)*. Darmstadt.
- Schwarz, H.** 1971. *Mehrfachregelungen I*. Berlin: Springer.
- Schwarz, H.** 1999. *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*. Aachen: Shaker.
- Tsirikos, A. S. und K. G. Arvanitis.** 2000. Disturbance Rejection with Simultaneous Input-Output Linearization and Decoupling via Restricted State Feedback. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (Transactions of ASME)*. 122. 49–62.
- Waterloo Maple Inc.** 1997. *Maple V, Release 5 - Notes*. Waterloo.

## A Definition der Lie-Ableitung

Die Lie-Ableitung ist eine im Rahmen der Differentialgeometrie häufig benutzte Operation, um die Empfindlichkeit einer Funktion  $\lambda$  von den Koordinaten  $\mathbf{x}$  in Richtung eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  darzustellen. Sie stellt somit die Ableitung einer skalaren Funktion entlang eines Vektorfeldes dar und verwendet als Argumente eine reellwertige Funktion  $\lambda$  und ein Vektorfeld  $\mathbf{f}$ .

Es sei  $\lambda$  eine skalare Funktion und  $\mathbf{f}$  ein Vektorfeld der Dimension  $n$ , dann ist die Lie-Ableitung von  $\lambda$  entlang  $\mathbf{f}$  definiert zu:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.1})$$

Die Ableitung als Ergebnis ist wiederum eine skalare Funktion. Die wiederholte Lie-Ableitung ist auch möglich. Bei einer Lie-Ableitung von  $\lambda$  entlang  $\mathbf{f}$  und danach entlang  $\mathbf{g}$  ergibt sich:

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.2})$$

Für die  $k$ -fache Ableitung von  $\lambda$  entlang eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  ergibt sich eine rekursive Darstellung:

$$L_{\mathbf{f}}^k \lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

## B Technische Daten der aktiven Radeinheit

Die technischen Daten der aktiven Radeinheit sind im Folgenden aufgeführt und der Arbeit von Lückel u. a. (2000) entnommen.

- Mechanisches Teilsystem

|       |                                           |                                  |
|-------|-------------------------------------------|----------------------------------|
| $A_C$ | $= 1016,003864 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ | Kolbenfläche des Zylinders       |
| $c_W$ | $= 455000 \text{ N/m}$                    | Radfedersteifigkeit              |
| $d_A$ | $= 650 \text{ Ns/m}$                      | Dämpfungskonstante des Zylinders |
| $m_A$ | $= 80 \text{ kg}$                         | Radmasse                         |
| $m_C$ | $= 620 \text{ kg}$                        | Aufbaumasse                      |
| $p_0$ | $= 0,1 \text{ MPa}$                       | Umgebungsdruck                   |

- Hydropneumatisches Teilsystem

|           |                                                       |                                                             |
|-----------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $E_{F1}$  | $= 1500 \text{ MPa}$                                  | Elastizitätsmodul des Öls                                   |
| $K_{L,P}$ | $= 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/(\text{s Pa})$        | Leckagekoeffizient der Pumpe                                |
| $K_T$     | $= 1,583963 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/(\text{s Pa})$ | Drosselbeiwert                                              |
| $p_1$     | $= 8,8 \text{ MPa}$                                   | höchster Betriebsdruck des Hydrospeichers 1                 |
| $p_2$     | $= 8,8 \text{ MPa}$                                   | höchster Betriebsdruck des Hydrospeichers 2                 |
| $V_0$     | $= 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$                       | mittleres Ölvolumen                                         |
| $V_1$     | $= 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$                     | Luftvolumen bei höchstem Betriebsdruck des Hydrospeichers 1 |
| $V_2$     | $= 8,738206 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$                | Luftvolumen bei höchstem Betriebsdruck des Hydrospeichers 2 |
| $V_P$     | $= 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$                     | Schluckvolumen der Pumpe                                    |
| $\kappa$  | $= 1,3$                                               | Isentropenexponent                                          |