Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Informatik und Angewandte Kognitionswissenschaften
Fachbereich Theoretische Informatik
Prof. Dr. Barbara König

Übungsblatt 7

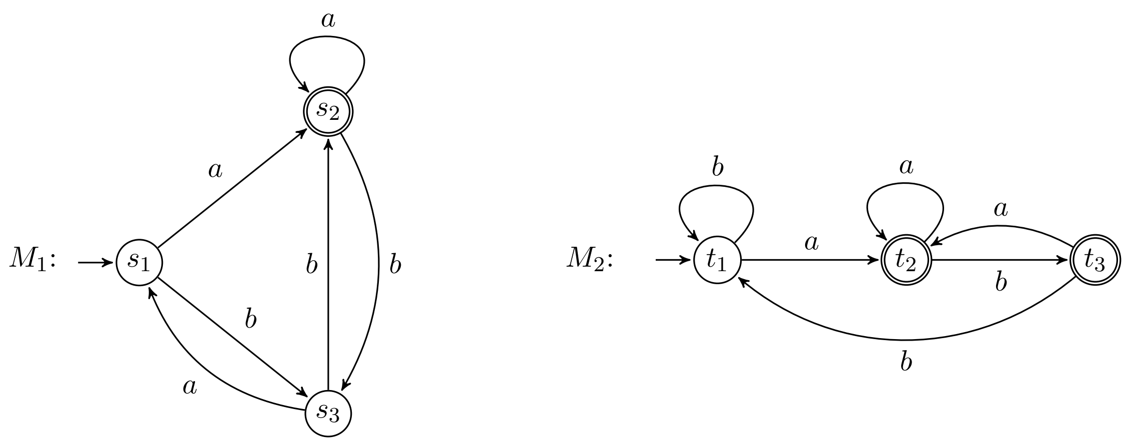
Automaten und Formale Sprachen

Sommersemester 2019, Übungsleitung: Dennis Nolte, Lara Stoltenow

Abgabe[1]: Montag, 3. Juni 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 21 *Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen* (7 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und seien die folgenden beiden deterministischen endlichen Automaten $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, s_1, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, t_1, E_2)$ gegeben:



(a) (i) Konstruieren Sie mit Hilfe der Kreuzproduktkonstruktion aus der Vorlesung einen deterministischen endlichen Automaten M_S, der die Sprache

$$T(M_S) = T(M_1) \cap T(M_2)$$

akzeptiert. (3 P)

Hinweis: Sie müssen nur die erreichbaren Zustände angeben.

(ii) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten M_V an, der die Sprache

$$T(M_V) = T(M_1) \cup T(M_2)$$

akzeptiert. (2 P)

Hinweis: Hierzu kann eine angepasste Version der Kreuzproduktkonstruktion verwendet werden.

(b) Beschreiben Sie wie man im Allgemeinen für zwei beliebige deterministische endliche Automaten $M' = (Z', \Sigma, \delta', s', E')$ und $M'' = (Z'', \Sigma, \delta'', s'', E'')$ einen deterministischen endlichen Automaten M konstruiert, der die Sprache

$$T(M) = T(M') \cup T(M'')$$

akzeptiert. Begründen Sie außerdem die Korrektheit Ihres Verfahrens! (2 P)

[1] *Abgabemöglichkeiten für Ihre Lösungen:* Briefkasten neben LF 259 (Campus Duisburg) oder per Moodle `https://moodle.uni-due.de/course/view.php?id=15777`

Aufgabe 22 *Pumping-Lemma für Anfänger* (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $L_1 = \{ab^k c^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k > m\}$ (3 P)

(b) $L_2 = \{a^k b^{(k^2)} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ (3 P)

Ihr Beweis sollte dabei wie folgt aussehen:
Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir wählen das Wort $x = \boxed{}$. Dann ist $x \in L$ und $|x| \geq n$. Wir können x folgendermaßen in uvw zerlegen, so dass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$:

1) $u = \boxed{}$, $v = \boxed{}$, $w = \boxed{}$, wobei $\boxed{}$

2) $u = \boxed{}$, $v = \boxed{}$, $w = \boxed{}$, wobei $\boxed{}$

3) $u = \boxed{}$, $v = \boxed{}$, $w = \boxed{}$, wobei $\boxed{}$

Für jede Zerlegung gibt es einen Index i, so dass $uv^i w \notin L$. Für die oben aufgeführten Zerlegungen wählen wir folgende Indizes:

1) $i = \boxed{}$, so dass $uv^i w = \boxed{} \notin L$, da $\boxed{}$

2) $i = \boxed{}$, so dass $uv^i w = \boxed{} \notin L$, da $\boxed{}$

3) $i = \boxed{}$, so dass $uv^i w = \boxed{} \notin L$, da $\boxed{}$

Nach dem Pumping-Lemma ist L daher nicht regulär.

Hinweis: Die Anzahl der benötigten Fälle hängt von dem gewählten Wort ab und davon wie man es aufschreibt.

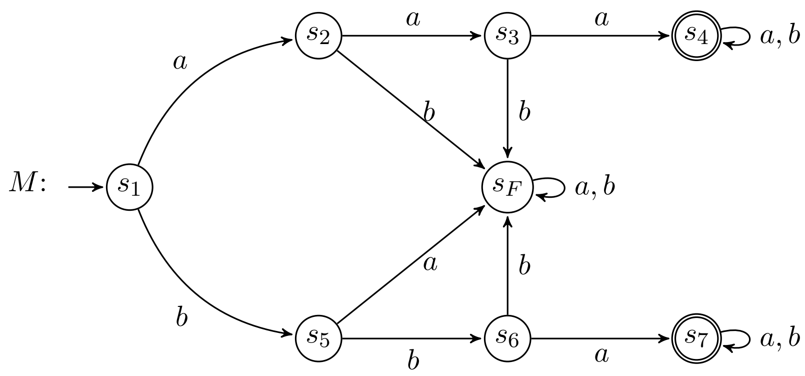
Aufgabe 23 *Sprache eines Zustands* (7 Punkte)

Sie wissen bereits, dass die Sprache eines deterministischen endlichen Automaten (DFA) die Menge aller Wörter ist, die zu einem Endzustand führen, wenn man sie vom Startzustand aus einliest.

Wir definieren nun die *Sprache eines Zustandes* $Z(s_i)$ als die Menge derjenigen Wörter, die beginnend von einem gegebenen Zustand s_i aus zu einem Endzustand führen. Formal:[2]

$$Z(s_i) = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, \hat{\delta}(s_i, w) \in E \right\}$$

Sei nun der folgende deterministische Automat M gegeben:



Beispielsweise gelangt man von s_2 aus mit aa zu einem Endzustand, es gilt also $aa \in Z(s_2)$. Hingegen gilt etwa $b \notin Z(s_2)$, $ab \notin Z(s_2)$, $a \notin Z(s_2)$, da mit diesen Wörtern jeweils Zustände erreicht werden, die keine Endzustände sind.

(a) Geben Sie für jeden Zustand von M die Sprache dieses Zustands an. Verwenden Sie dazu wahlweise Mengennotation ($Z(s_i) = \{\dots\}$) oder reguläre Ausdrücke ($Z(s_i) = L(\dots)$). (4 P)

(b) Erinnern Sie sich an die Definition der Myhill-Nerode-Äquivalenz:

$$x \equiv_L y \iff \text{für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt } (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Es gilt $\hat{\delta}(s_1, aa) = s_3$ und $\hat{\delta}(s_1, bb) = s_6$. Außerdem ist leicht zu sehen, dass $Z(s_3) = Z(s_6)$ (falls Sie Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben, dürfen Sie davon ausgehen, dass dies der Fall ist). Was kann man hieraus über das Verhältnis der Wörter aa und bb schließen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (2 P)

(c) Geben Sie die Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse des Wortes aa vollständig an ($[aa]_{\equiv_{T(M)}} = \{\dots\}$). (1 P)

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)

[2] $\hat{\delta}(s_i, w) = s_k$ bedeutet, dass ein DFA, der sich in Zustand s_i befindet und die Zeichenfolge w einliest, sich danach in s_k befindet, vgl. auch Folie 90.