Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 28. November 2018 um 16:00 Uhr abgegeben werden. Bitte werfen Sie Ihre Abgabe in den mit *Logik* beschrifteten Briefkasten neben Raum LF259, *oder* geben Sie sie online ab über die MOODLE-Plattform. Wenn Sie online abgeben, laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, die Gruppenummer und die Vorlesung ("Logik").

Aufgabe 14 Ein bisschen Syntax und Semantik (8 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenfolgen syntaktisch korrekte Formeln sind und falls ja, ob es sich um Aussagen handelt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihr Urteil. Antworten ohne Begründung erhalten *keine* Punkte!

1) $P(x, f(y, z)) \to \forall x \forall z P(x, z)$
2) $\forall x \exists y(x, y) \wedge \forall x P(x, y, z)$
3) $\forall x \forall y \exists z \big(P() \to Q(x, y, z)\big)$
4) $Q(x, y) \to (f(x, y) \to R(x, y))$
5) $\forall x Q(f(P(g(x))))$
6) $\exists f(x) Q(f(x))$
7) $\forall y \forall x \forall y Q(f(g(y, x, u)))$
8) $\exists x \forall z \big(P(x, z) \to P(x, g(x, z))\big)$

(4 p)

(b) Markieren Sie in folgenden Formeln, welche Variablen frei und welche gebunden sind. Zeichnen Sie Pfeile von gebundenen Vorkommen von Variablen zu deren "Bindungsstelle".

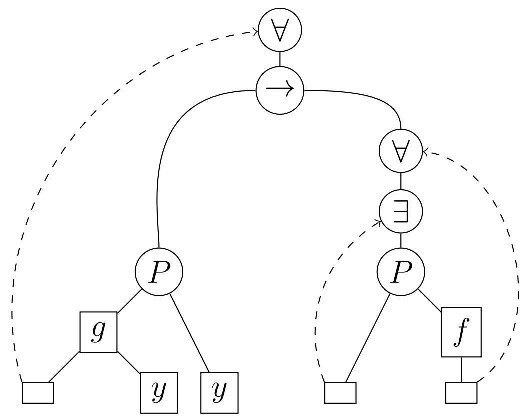
1) $\forall x P(x) \wedge \forall y R(x, y) \wedge Q(y)$
2) $\exists y P(x) \to (\forall y P(y) \wedge Q(x, y))$
3) $\forall x \forall y Q(x, y, z) \to \exists u \exists y R(x, y, z, u)$
4) $\forall y \,\big(Q(g(x, y)) \leftrightarrow \forall x \,\exists y P(x, f(y))\big)$ (4 p)

Aufgabe 15 *Syntaxbäume der Prädikatenlogik* (6 Punkte)

Wir wollen uns in dieser Aufgabe mit der Syntax der Prädikatenlogik bzw. der Darstellung prädikatenlogischer Formeln befassen. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die „logische Struktur" einer Formel besser zu repräsentieren. Zum Beispiel lässt sich die Formel

$$\forall x \left(P(g(x,y),y) \to \forall y \exists x\, P(x, f(y))\right),$$

ohne gebundene Variablen, vom rechts angegebenen *Syntaxbaum* darstellen. Hierbei sind Funktionssymbole sowie Variablen als eckige Knoten und Operatoren, Quantoren sowie Prädikatsymbole als runde Knoten dargestellt. Die Hauptidee ist jedoch, gebundene Variablen – genauer gesagt *Vorkommen von gebundenen Variablen* – durch Rückverweise auf den Quantor darzustellen, da dies in der Tat eine bessere Darstellung der logischen Struktur der Formel ist. (Die lineare Notation von Formeln ist allerdings viel kompakter und einfacher zu setzen.)



Eine andere Alternative zu den platzraubenden Syntaxgraphen sind die sogenannten *De Bruijn-Indizes*[1]: Man ersetzt die gebundenen Variablen in einer Formel durch Zahlen, indem man einfach zählt, zum wievielten Quantor auf dem Weg zur Wurzel der entsprechende Rückverweis zeigt. Für das obige Beispiel ergibt sich dann folgende Ersetzung.

$$\forall x \left(P(g(x,y),y) \to \forall y\, \exists x P(x, f(y))\right) \quad \rightsquigarrow \quad \forall\left(P(g(1,y),y) \to \forall\exists P(1, f(2))\right)$$

Geben Sie jeweils die zwei alternativen Darstellungen für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an, also für jede Formel einen Syntaxgraphen und eine Formel mit Zahlen (wie oben beschrieben).

(a) $\forall x P(f(x,y)) \lor \exists y Q(g(f(x,y)))$ (3 p)

(b) $\exists x\, \exists y\left(\neg P(x,y) \land \neg Q(x,y)\right) \land \forall x\, \forall y\left(P(x,y) \to Q(y,x)\right)$ (3 p)

[1]Diese gehen zurück auf den niederländischen Mathematiker Nicolaas Govert de Bruijn

Aufgabe 16 *Terme auswerten* (6 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Terme einer prädikatenlogischen Formel unter zwei verschiedenen Strukturen ausgewertet werden. Sei $\mathbf{c}$ eine Konstante, f eine einstellige Funktion und g eine zweistellige Funktion. Gegeben seien die folgenden drei Terme:

$$t_1 = f(g(f(y), \mathbf{c})), \quad t_2 = f(g(f(x), g(x, f(y)))), \quad \text{und} \quad t_3 = g(f(f(\mathbf{c})), g(f(y), x))$$

Werten Sie die drei Terme t_1, t_2 und t_3 unter den folgenden Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus. Geben Sie dabei ausreichend Zwischenschritte an. Antworten *ohne* Zwischenschritte erhalten *keine* Punkte.

(a) Die Struktur $\mathcal{A} = (U_1, I_1)$ besteht aus dem Universum $U_1 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}_0$ und der Interpretation I_1 die folgendermaßen definiert ist:

- Die Interpretation I_1 weist der Konstanten $\mathbf{c}$ die Zahl 0 zu.
- Die Interpretation I_1 weist der einstelligen Funktion f die Nachfolgerfunktion zu, also $I_1(f) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist definiert als $I_1(f)(n) = n + 1$, für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$.
- Die Interpretation I_1 weist der zweistelligen Funktion g die Additionsfunktion zu, also $I_1(g) : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist definiert als $I_1(g)(n, n') = n + n'$, für alle natürlichen Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}_0$.
- Die Interpretation I_1 weist den Variablen x, y die natürlichen Zahlen $2, 3$ zu, also $I_1(x) = 2$ und $I_1(y) = 3$.

Werten Sie $I_1(t_1), I_1(t_2)$ und $I_1(t_3)$ aus. (3 p)

(b) Die Struktur $\mathcal{B} = (U_2, I_2)$ besteht aus dem booleschen Universum $U_2 = \{0, 1\} = \mathbb{B}$ und der Interpretation I_2 die folgendermaßen interpretiert wird:

- Die Interpretation I_2 weist der Konstanten $\mathbf{c}$ den Wahrheitswert 0 zu.
- Die Interpretation I_2 weist der einstelligen Funktion f die Negation zu, also $I_2(f) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ ist definiert als $I_2(f)(b) = \neg b$, für $b \in \{0, 1\}$.
- Die Interpretation I_2 weist der zweistelligen Funktion g die logische disjunktion zu, also $I_2(g) : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ ist definiert als $I_2(g)(b, b') = b \vee b'$, für alle $b, b' \in \mathbb{B}$.
- Die Interpretation I_2 weist beiden Variablen x, y den Wahrheitswert 0 zu. also $I_2(x) = I_2(y) = 0$.

Werten Sie $I_2(t_1), I_2(t_2)$ und $I_2(t_3)$ aus. (3 p)

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)