

Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 12. Dezember 2018 um 16:00 Uhr abgegeben werden. Bitte werfen Sie Ihre Abgabe in den mit *Logik* beschrifteten Briefkasten neben Raum LF259, *oder* geben Sie sie online ab über die MOODLE-Plattform. Wenn Sie online abgeben, laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, die Gruppennummer und die Vorlesung ("Logik").

Aufgabe 20 *Super Tarski World*

(6 Punkte)

Eine *Tarski's World* ist ein 8×8 -Schachbrett, auf dem Tetraeder, Würfel (Cubes) und Dodekaeder, in den Größen klein (*small*), mittel (*medium*) und groß (*large*) plaziert werden dürfen. Gegeben sind außerdem die folgenden Prädikate und ihre Bedeutungen:

- Ein Objekt a befindet sich *links* (*rechts*) von einem Objekt b , wenn sich seine Spalte links (rechts) von der Spalte von b befindet. Das dazugehörige Prädikat lautet dann $LeftOf(a, b)$ ($RightOf(a, b)$).
- Ein Objekt a befindet sich *vor* (*hinter*) einem Objekt b , wenn sich seine Zeile vor (hinter) der Zeile von b befindet. Das dazugehörige Prädikat lautet dann $FrontOf(a, b)$ ($BackOf(a, b)$). Kein Objekt befindet sich links von (rechts von, vor, hinter) sich selbst.
- $Between(a, b, c)$ bedeutet, dass sich a zwischen b und c befindet, wobei sich die Objekte a, b, c in derselben Zeile, Spalte oder Diagonale befinden müssen.
- Befinden sich zwei Objekte a, b in derselben Zeile (Spalte) so ist das Prädikat $SameRow(a, b)$ ($SameCol(a, b)$) wahr.
- Das Prädikat $Larger(a, b)$ bedeutet, dass das Objekt a größer ist als das Objekt b .

Geben Sie eine möglichst kleine *Tarski's World* an, die ein Modell für alle folgenden prädikatenlogischen Aussagen ist:

$$\forall x (Tet(x) \rightarrow \exists y (Dodec(y) \wedge Larger(y, x))) \quad (1)$$

$$\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge \neg Tet(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z (Tet(z) \wedge Between(z, x, y))) \quad (2)$$

$$\neg \exists x (Tet(x) \wedge Small(x)) \wedge \exists x (Small(x) \wedge Cube(x)) \quad (3)$$

$$\forall x (Small(x) \rightarrow (\exists y (Cube(y) \wedge LeftOf(y, x)) \wedge \neg \exists z (Dodec(z) \wedge SameRow(x, z)))) \quad (4)$$

$$\forall x (Dodec(x) \rightarrow (\exists y (Cube(y) \wedge \neg Larger(y, x)) \wedge \exists z (Tet(z) \wedge SameCol(z, x)))) \quad (5)$$

$$\forall x (\neg \exists y LeftOf(y, x) \rightarrow (Medium(x) \wedge \neg Dodec(x))) \quad (6)$$

Hinweis: Die kleinste Lösung besitzt 6 Objekte.

(6p)

Aufgabe 21 *Folgerungen*

(6 Punkte)

Geben Sie eine Folge F_1, \dots, F_5 der folgenden Formeln an, so dass für alle $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ mit $i \leq j$ gilt, dass $F_i \models F_j$. Das heißt, jede Formel (bis auf die Erste) sollte aus ihrem Vorgänger gefolgert werden können. Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$
- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
- $\exists x P(x) \wedge \forall x \neg P(x)$

Aufgabe 22 *(Nicht-)Äquivalenz von Formeln*

(8 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten. Falls die Formeln äquivalent sind, geben Sie eine Kette von Äquivalenzumformungen (inklusive der benutzten Gesetze) an. Falls die Formeln nicht äquivalent sind, konstruieren Sie eine Struktur, die nur Modell für die eine Formel, aber nicht für die andere ist. Lösungen ohne eine Angabe der angewandten Gesetze erhalten Punktabzug.

(a) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ (2p)

(b) $\neg \forall x \forall y (\neg P(x, y) \wedge Q(x, y)) \equiv \exists x (\exists y P(x, y) \vee \neg \forall z Q(x, z))$ (3p)

(c) $\exists x \exists y (P(x, y) \vee Q(y, x)) \equiv \exists x \exists y P(y, x) \vee \exists x \exists y Q(x, y)$ (3p)

Hinweis: Nutzen Sie die gebundene Umbenennung um Variablen in Prädikaten zu vertauschen.

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)