

Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 19. Dezember 2018 um 16:00 Uhr abgegeben werden. Bitte werfen Sie Ihre Abgabe in den mit *Logik* beschrifteten Briefkasten neben Raum LF259, *oder* geben Sie sie online ab über die MOODLE-Plattform. Wenn Sie online abgeben, laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, die Gruppennummer und die Vorlesung (“Logik”).

Aufgabe 23 *Normalformen* (9 Punkte)

Bringen Sie folgende prädikatenlogische Formeln in Klauselform und geben Sie dabei alle Zwischenschritte (bereinigte Form, Pränexform und Skolemform) an:

(a) $\forall x(Q(a) \vee Q(x) \vee \exists x Q(x))$ (3 p)

(b) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(y) \rightarrow \forall x(\forall x Q(x) \rightarrow S(x))))$ (3 p)

(c) $\forall x(\exists y(P(y) \wedge \forall z(R(x, y, z) \wedge Q(x, z))) \rightarrow \forall y(Q(x, y) \rightarrow \exists x Q(y, x)))$ (3 p)

Aufgabe 24 *Modelle der Skolemform* (5 Punkte)

Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x, y))).$$

(a) Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte (bereinigte Form, Pränexform) an. (2 p)

(b) Die in Aufgabe (a) entstandene Formel in Skolemform bezeichnen wir im folgenden mit F' . Die folgende Struktur \mathcal{A} ist ein Modell von F .

Die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ ist wie folgt definiert:

- Universum $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}_0$
- $P^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist gerade}\} \subseteq U_{\mathcal{A}}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist ungerade}\} \subseteq U_{\mathcal{A}}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n + n' \text{ ist ungerade}\} \subseteq U_{\mathcal{A}} \times U_{\mathcal{A}}$

Erweitern Sie die Struktur so, dass sie auch ein Modell für F' ist. Bestimmen Sie dabei insbesondere eine Interpretation für das bei der Umwandlung in Skolemform neu hinzugekommene Funktionssymbol. Begründen Sie ihre Antwort. Antworten *ohne* Begründung erhalten Punkteabzug. (3 p)

Aufgabe 25 Herbrand-Universen

(6 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Formeln F_i mit $1 \leq i \leq 3$ jeweils das Herbrand-Universum $D(F_i)$ an:

$$(a) F_1 = \forall x \forall y \left((P(x, y) \wedge Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y) \right) \quad (2 \text{ p})$$

$$(b) F_2 = \forall x \left(P(a, f(f(x))) \vee R(f(x), f(b)) \right) \quad (2 \text{ p})$$

$$(c) F_3 = \forall x \forall y \left(P(g(x, y), g(f(f(y)), b)) \leftrightarrow (Q(y) \wedge R(f(x), g(b, b))) \right) \quad (2 \text{ p})$$

Dabei sind P, R zwei zweistellige und Q ein einstelliges Prädikatensymbol, f ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol sowie a, b Konstantensymbole.

Hinweis Um unendliche Mengen aufzuschreiben, reicht es einige, wenige Elemente der Menge anzugeben, so dass das „Konstruktionsschema“ für die Elemente klar wird, z.B. bezeichnet die Menge $M = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$ die Menge aller Vielfachen von 4.