

## Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 09. Januar 2019 um 16:00 Uhr abgegeben werden. Bitte werfen Sie Ihre Abgabe in den mit *Logik* beschrifteten Briefkasten neben Raum LF259, *oder* geben Sie sie online ab über die MOODLE-Plattform. Wenn Sie online abgeben, laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, die Gruppennummer und die Vorlesung ("Logik").

**Aufgabe 26** (*Nicht-Äquivalenz* (Alte Klausuraufgabe)) (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln  $F_1, F_2$  und  $G_1, G_2$ . Überprüfen Sie, ob die Formeln  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $G_1$  und  $G_2$  äquivalent sind, das heißt, ob  $F_1 \equiv F_2$  und  $G_1 \equiv G_2$  gilt.

(a)  $F_1 = (\neg A \wedge (B \rightarrow C)) \vee \neg C, \quad F_2 = C \rightarrow \neg A$  (3p)

(b)  $G_1 = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge (B \vee C)), \quad G_2 = A \rightarrow \neg(B \vee C)$  (3p)

Falls Sie der Meinung sind, dass die jeweilige Äquivalenz korrekt ist, wandeln Sie eine Formel mit Hilfe von Äquivalenzumformungen in die andere um. Geben Sie bei der Umwandlung jeweils ausreichend Zwischenschritte und – nach Möglichkeit – das verwendete Äquivalenzgesetz an. Falls Sie der Meinung sind, dass die jeweilige Äquivalenz nicht gilt, geben Sie eine passende Belegung an, die die Nicht-Äquivalenz zeigt.

**Aufgabe 27** (*Resolution* (Alte Klausuraufgabe)) (2 Punkte)

Zeigen Sie, mit Hilfe aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Klauselmenge nicht erfüllbar ist:

$$\{\{A\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{B, D\}, \{B, \neg D\}\}$$

(2p)

**Aufgabe 28** *Strukturen und Modelle* (Alte Klausuraufgabe)

(8 Punkte)

In dieser Aufgabe ist  $P$  ein einstelliges Prädikatsymbol,  $R$  ein zweistelliges Prädikatsymbol und  $f$  ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Gegeben seien die folgende Strukturen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ :

- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, I_{\mathcal{A}})$ , wobei die Prädikate und Funktionssymbole folgende Interpretationen haben:

$$\begin{aligned}P^{\mathcal{A}} &= \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} \\R^{\mathcal{A}} &= \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x \leq y\} \\f^{\mathcal{A}}(x) &= x^2\end{aligned}$$

- $\mathcal{B} = (U_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}})$ , wobei  $U_{\mathcal{B}} = \{\text{Bratwurst, Frikandel, Hamburger, Pommes}\}$  und die Prädikate und Funktionssymbole folgende Interpretationen haben:

$$\begin{aligned}P^{\mathcal{B}} &= \{\text{Frikandel, Hamburger, Pommes}\} \\R^{\mathcal{B}} &= \{(\text{Pommes, Frikandel}), (\text{Frikandel, Pommes}), (\text{Hamburger, Hamburger})\} \\f^{\mathcal{B}}(x) &= \begin{cases} \text{Frikandel} & \text{falls } x = \text{Hamburger} \\ \text{Hamburger} & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Geben Sie jeweils für die folgenden Formeln  $F_1, F_2$  an, ob  $\mathcal{A} \models F_i$  und ob  $\mathcal{B} \models F_i$ . (Es ist auch möglich, dass keine oder beide Aussagen gelten.) Begründen Sie Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung erhalten keine Punkte.

(1)  $F_1 = \forall x (P(x) \rightarrow R(x, f(x)))$  (3 p)

(2)  $F_2 = \forall x \forall z (\exists y (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow x = z)$  (3 p)

*Hinweis.* Die Menge  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge aller natürlichen Zahlen. Eine natürliche Zahl  $n > 1$  ist eine Primzahl, falls sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten 5 Primzahlen sind also 2, 3, 5, 7 und 11.

(b) Gegeben seien die Formeln

$$\begin{aligned}G_1 &= \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \\G_2 &= \forall x R(x, x)\end{aligned}$$

Zeigen Sie, indem Sie eine geeignete Struktur angeben, dass  $G_1 \not\models G_2$ . Begründen Sie, warum die von Ihnen angegebene Struktur dies zeigt. (2 p)

**Aufgabe 29** *Normalformen und Herbrand-Universen* (Alte Klausuraufgabe) (6 Punkte)

Geben Sie in dieser Aufgabe bei den Umwandlungen jeweils ausreichend Zwischenschritte und die verwendeten Äquivalenzgesetze an. Antworten ohne Nennung der angewandten Äquivalenzgesetze erhalten Punktabzug.

Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$H = \neg(\forall x \neg \forall y P(x, y)) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(f(a))).$$

- (a) Wandeln Sie  $H$  in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel  $H'$  in *Klauselform* um. Geben Sie alle Zwischenschritte (bereinigte Form, Pränexform, Skolemform) an. (4p)
- (b) Geben Sie für die Formel  $H'$  das Herbrand-Universum  $D(H')$  an. Geben Sie für ein unendlich großes Herbrand-Universum mindestens die ersten 9 Elemente an, so dass das Schema der Aufzählung deutlich wird. (2p)

**Aufgabe 30** *Herbrand-Modell* (8 Punkte)

Betrachten Sie folgende prädikatenlogische Formel  $F$ :

$$F = \forall x \exists y R(x, y) \wedge \\ \forall x \neg R(x, x) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)).$$

- (a) Begründen Sie, warum  $F$  kein endliches Modell haben kann. (2p)  
(*Hinweis:* Sie können sich zunächst überlegen, warum das Modell von  $F$  nicht einelementig, zweielementig, etc. sein kann.)
- (b) Geben Sie ein Modell von  $F$  an, dessen Universum die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  sind. (3p)
- (c) Geben Sie ein Herbrand-Modell von  $F$  an. (3p)  
(*Hinweis:* Wandeln Sie die Formel  $F$  zuerst in Skolemform um.)

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **30** Punkte vergeben.)

**Bonus-Aufgabe** *Chaos an Weihnachten!*

*Dies ist eine Zusatzaufgabe. Die maximal erreichbaren Punkte (10) dieser Aufgabe werden nicht zur Gesamtsumme der zu erreichenden Bonuspunkte addiert. Sie können also auch ohne Bearbeitung dieser Aufgabe 100% der Bonuspunkte erreichen. Wenn Sie die Aufgabe jedoch bearbeiten und dabei Punkte erhalten, werden diese (wie die Punkte "normaler" Aufgaben) zu Ihrer persönlichen Gesamtpunktzahl addiert und auch bei der Ermittlung des Bonus berücksichtigt. Das folgende Rätsel können Sie (ohne weitere Hilfsmittel) mit Zettel und Stift lösen.*

Auch in diesem Jahr möchte der Weihnachtsmann Geschenke an brave Studierende verteilen. Er erreicht eine Straße mit fünf Häusern, die in einer Reihe stehen und die von jeweils genau einem Studierenden bewohnt werden. Jeder Bewohner studiert ein anderes Studienfach, gehört einer anderen Nationalität an, fährt ein anderes Auto, wünscht sich eine andere Konsole zu Weihnachten und freut sich auf ein bestimmtes Weihnachtsessen.

Leider hat Knecht Ruprecht die Wunschliste verloren, so dass der Weihnachtsmann nicht mehr weiß, welches Geschenk zu welchem Haus gehört. Er erinnert sich jedoch die folgenden Einträge zu den Häusern gesehen zu haben:

Attribute:

- Nationalitäten: Schwede, Japaner, Deutscher, Italiener, Amerikaner
- Studiengänge: Mathematik, Komedia, Informatik, Psychologie, Jura
- Autos: Ford, Mercedes, Porsche, Ferrari, Audi
- Wunschkonsole: 3DS, X-Box, PS4, Switch, PSP
- Essen: Kartoffeln, Waffeln, Eiscreme, Schokolade, Gans

Außerdem hatte sich Knecht Ruprecht beim Erstellen der Wunschliste die folgenden Notizen gemacht:

- (1) Der Jura-Student bewohnt ein Haus (direkt) rechts von dem Mercedesfahrer.
- (2) Die Person, die gerne Eiscreme isst, wohnt (direkt) neben der Person, die gerne Kartoffeln isst.
- (3) Der (direkte) Nachbar des 3DS-Spielers isst gerne Gans.
- (4) Der Bewohner des Hauses mit dem Informatikstudium spielt gerne Switch.
- (5) Der Komedia-Student lebt (direkt) neben dem Mathematiker.
- (6) Der Mercedesfahrer wünscht sich ein 3DS.
- (7) Der Japaner wohnt (direkt) neben dem Porschefahrer.
- (8) Der Deutsche wohnt im Haus (direkt) rechts vom X-Box-Spieler.
- (9) Der Fahrer des Ford lebt (direkt) neben der Person, die gerne Eiscreme isst.
- (10) Die Person im dritten Haus freut sich auf die Gans.
- (11) Der Schwede wohnt (direkt) links neben dem Italiener.
- (12) Die Person in Haus fünf mag keine Kartoffeln.
- (13) Der Amerikaner ist ein (direkter) Nachbar des PS4-Spielers.
- (14) Der Porschefahrer ist der (direkte) rechte Nachbar des Ferrarifahrers.
- (15) Der Fordfahrer wohnt (direkt) links vom Mercedesfahrer.
- (16) Der Komedia-Student ist (direkter) Nachbarn des Ferrarifahrers.
- (17) Der Deutsche lebt (direkt) rechts neben der Person, die gerne Eiscreme isst.
- (18) Der PS4-Spieler wohnt (direkt) neben der Person, die gerne Schokolade isst.

Welches Geschenk gehört in welches Haus?

Helfen Sie dem Weihnachtsmann und füllen die „Attribute“ der folgenden Bewohner-Tabelle der Häuser (1–5) aus, sodass alle 18 Hinweise gelten. Begründen Sie, wie Sie die Tabelle ausgefüllt haben! Beschreiben Sie also Schritt für Schritt aus welchen Hinweisen Sie die Zelleninhalte folgern konnten. Antworten ohne Begründung erhalten *keine* Punkte!

Haus	1	2	3	4	5
Nationalität					
Studium					
Auto					
Konsole					
Essen					

Ho ho ho!

*F*rohe *W*eihnachten

&

einen guten Rutsch ins Neue Jahr