

Modellierung, Analyse, Verifikation

Aufgabe 5 Ungewöhnliche Fixpunkte

- (a) Bestimmen Sie einen Verband (L, \sqsubseteq) und eine Funktion $f: L \rightarrow L$, die gar keine Fixpunkte besitzt.
- (b) Bestimmen Sie einen Verband (L, \sqsubseteq) und eine Funktion $f: L \rightarrow L$, die mehrere Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt, besitzt.
- (c) Bestimmen Sie einen Verband (L, \sqsubseteq) und eine monotone Funktion $f: L \rightarrow L$, die einen kleinsten Fixpunkt l besitzt, so dass aber $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\perp) \neq l$.

Aufgabe 6 Verbände

- (a) Gegeben sei ein vollständiger Verband (L, \sqsubseteq) . Zeigen Sie, dass in jedem vollständigen Verband das *Absorptionsgesetz* gilt, d.h., für zwei Verbandselemente $\ell, m \in L$ gilt immer

$$(\ell \sqcup m) \sqcap \ell = \ell \text{ und } (\ell \sqcap m) \sqcup \ell = \ell$$

- (b) Das *Distributivgesetz* besagt, dass für drei Verbandselemente $\ell, m, n \in L$ gilt:

$$(\ell \sqcup m) \sqcap n = (\ell \sqcap n) \sqcup (m \sqcap n) \text{ und } (\ell \sqcap m) \sqcup n = (\ell \sqcup n) \sqcap (m \sqcup n)$$

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn er das Distributivgesetz erfüllt. Geben Sie je ein Beispiel für einen distributiven und für einen nicht-distributiven (vollständigen) Verband an.

(*Hinweis*: Es gibt einen nicht-distributiven Verband mit fünf Elementen.)

Aufgabe 7 Verband der Fixpunkte

Sei (L, \sqsubseteq) ein vollständiger Verband und $f: L \rightarrow L$ eine monotone Funktion.

- (a) Seien l_1, l_2 Fixpunkte von f . Zeigen Sie, dass $l_1 \sqcup l_2$ (das Supremum von l_1 und l_2 in (L, \sqsubseteq)) nicht notwendigerweise ein Fixpunkt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass aber dennoch gilt: $(\text{Fix}(f), \sqsubseteq)$ ist ein vollständiger Verband.

Aufgabe 8 Analyse lebendiger Variable

Betrachten Sie folgendes WHILE-Programm:

```
[x:=10]1;  
[x:=y]2;  
while [x>0]3 do  
    [x:=x-1]4  
od
```

Führen Sie eine Analyse der lebendigen Variablen für dieses Programm durch. Nehmen Sie an, dass nach Ausführung des Programms die (Ausgabe-)Variable x lebendig sein soll, d.h., der Analysewert für den finalen Block ist $\iota = \{x\}$.

Stellen Sie das Gleichungssystem auf, das die Lösung der Datenflussanalyse beschreibt, und lösen Sie dieses Gleichungssystem mit Hilfe von Fixpunktiteration. Geben Sie Ihre Zwischenstufen an!