

## Modellierung, Analyse, Verifikation

### Aufgabe 5 Ungewöhnliche Fixpunkte

- (a) Bestimmen Sie einen Verband  $(L, \sqsubseteq)$  und eine Funktion  $f: L \rightarrow L$ , die gar keine Fixpunkte besitzt.
- (b) Bestimmen Sie einen Verband  $(L, \sqsubseteq)$  und eine Funktion  $f: L \rightarrow L$ , die mehrere Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt, besitzt.
- (c) Bestimmen Sie einen Verband  $(L, \sqsubseteq)$  und eine monotone Funktion  $f: L \rightarrow L$ , die einen kleinsten Fixpunkt  $l$  besitzt, so dass aber  $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\perp) \neq l$ .

### Aufgabe 6 Verbände

- (a) Gegeben sei ein vollständiger Verband  $(L, \sqsubseteq)$ . Zeigen Sie, dass in jedem vollständigen Verband das *Absorptionsgesetz* gilt, d.h., für zwei Verbandselemente  $\ell, m \in L$  gilt immer

$$(\ell \sqcup m) \sqcap \ell = \ell \text{ und } (\ell \sqcap m) \sqcup \ell = \ell$$

- (b) Das *Distributivgesetz* besagt, dass für drei Verbandselemente  $\ell, m, n \in L$  gilt:

$$(\ell \sqcup m) \sqcap n = (\ell \sqcap n) \sqcup (m \sqcap n) \text{ und } (\ell \sqcap m) \sqcup n = (\ell \sqcup n) \sqcap (m \sqcup n)$$

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn er das Distributivgesetz erfüllt. Geben Sie je ein Beispiel für einen distributiven und für einen nicht-distributiven (vollständigen) Verband an.

(*Hinweis:* Es gibt einen nicht-distributiven Verband mit fünf Elementen.)

### Aufgabe 7 Verband der Fixpunkte

Sei  $(L, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f: L \rightarrow L$  eine monotone Funktion.

- (a) Seien  $l_1, l_2$  Fixpunkte von  $f$ . Zeigen Sie, dass  $l_1 \sqcup l_2$  (das Supremum von  $l_1$  und  $l_2$  in  $(L, \sqsubseteq)$ ) nicht notwendigerweise ein Fixpunkt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass aber dennoch gilt:  $(\text{Fix}(f), \sqsubseteq)$  ist ein vollständiger Verband.

## Aufgabe 8 *Analyse lebendiger Variable*

Betrachten Sie folgendes WHILE-Programm:

```
[x:=10]1;  
[x:=y]2;  
while [x>0]3 do  
  [x:=x-1]4  
od
```

Führen Sie eine Analyse der lebendigen Variablen für dieses Programm durch. Nehmen Sie an, dass nach Ausführung des Programms die (Ausgabe-)Variable  $x$  lebendig sein soll, d.h., der Analysewert für den finalen Block ist  $\iota = \{x\}$ .

Stellen Sie das Gleichungssystem auf, das die Lösung der Datenflussanalyse beschreibt, und lösen Sie dieses Gleichungssystem mit Hilfe von Fixpunktiteration. Geben Sie Ihre Zwischenschritte an!