

Modellierung, Analyse, Verifikation

Aufgabe 21 Galois-Verbindung

Gegeben sei $k \in \mathbb{Z}$. Entwerfen Sie eine Galois-Verbindung, die ganze Zahlen auf folgende Weise abstrahiert: für jede Zahl zwischen $-k$ und k ist der abstrakte Wert die Zahl selbst. Ansonsten wird nur festgehalten, ob die Zahl kleiner als $-k$ oder größer als k ist.

- (a) Bestimmen Sie eine passende Extraktionsfunktion β und eine Galois-Verbindung $\langle \alpha, \gamma \rangle$.
 (b) Sei $+^\#$ die genaueste sichere Approximation von

$$\begin{aligned} +: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \\ (Z_1, Z_2) &\mapsto \{z_1 + z_2 \mid z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\} \end{aligned}$$

Analog sei $*^\#$ die genaueste sichere Approximation von $*$ (Multiplikation).

Berechnen Sie folgende Werte:

$$\begin{array}{lll} \alpha(\{k\}) & +^\# & \alpha(\{1\}) \\ \alpha(\{-(k+1)\}) & +^\# & \alpha(\{k\}) \\ \alpha(\{-(k+1)\}) & +^\# & \alpha(\{k+1\}) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \alpha(\{-1\}) & *^\# & \alpha(\{-(k+1)\}) \\ \alpha(\{-(k+1)\}) & *^\# & \alpha(\{k+1\}) \end{array}$$

Aufgabe 22 Komposition von Funktionen

Seien $f, g: L \rightarrow L$ monotone Funktionen und seien $f^\#$ und $g^\#$ die jeweils genauesten sicheren Approximationen dieser Funktionen bezüglich der Galois-Verbindung $\langle \alpha, \gamma \rangle$ mit $\alpha: L \rightarrow M$, $\gamma: M \rightarrow L$.

- (a) Ist $f^\# \circ g^\#$ eine sichere Approximation von $f \circ g$?
 (b) Ist $f^\# \circ g^\#$ eine genaueste sichere Approximation von $f \circ g$?

Falls ja, so geben Sie eine Begründung an, falls nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 23 Abstrakte Semantik

Betrachten Sie folgendes WHILE-Programm S :

```

if [x*x+x ≥ 0]1
  then
    while [x ≤ 0]2 do
      [x := x+1]3
    od
  else [x := -1]4
fi
    
```

Wir betrachten die Abstraktion, die durch Liften der Extraktionsfunktion $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \{-, 0, +\}$ erzeugt wurde (Definition siehe Skript).

- (a) Geben Sie alle Übergänge der hergeleiteten abstrakten Semantik, wie in der Vorlesung vorgestellt, beginnend vom Anfangszustand $\langle S, \{[x \rightarrow -], [x \rightarrow 0], [x \rightarrow +]\} \rangle$ an (d.h. führen Sie das Programm abstrakt aus). Denken Sie daran, dass diese Semantik die abstrakten Varianten der Operatoren und Prädikate verwendet.
- (b) Was ändert sich, wenn man die genaueste abstrakte Semantik verwendet?

Aufgabe 24 Abstrakte Semantik

Betrachten Sie folgendes WHILE-Programm S :

```
[x:=1]1;  
while [x<y]2 do  
  [x:=x+3]3  
od;  
if [x=101]4  
  then [x:=0]5  
  else [skip]6  
fi
```

Entwerfen Sie eine passende Abstraktion basierend auf abstrakten Variablenbelegungen, um zu zeigen, dass Block 5 nicht erreichbar ist. Bestimmen Sie die Übergänge der abstrakten Semantik, indem Sie das entsprechende Transitionssystem aufzeichnen.