

Einleitung

Motivation: Optimalsteuerprobleme mit partiellen Differentialgleichungen sind aus vielen Anwendungsbereichen mittlerweile nicht mehr wegzudenken. Mit Hilfe einer Steuerungsvariable wird die Lösung der Differentialgleichung, welche Zustand genannt wird, beeinflusst. Gleichzeitig soll ein Zielfunktional minimiert werden. Bei vielen technischen Anwendungen sind punktweise Beschränkungen an den Zustand und die Steuerung unerlässlich. Es ist bekannt, dass die zu Zustandsbeschränkungen gehörigen Lagrangeschen Multiplikatoren keine messbaren Funktionen mehr sind, siehe [1]. Dies macht die Anwendung effizienter Optimierungsalgorithmen und numerische Analysis extrem schwierig.

Ziel: Entwicklung einer Regularisierungsmethode, um oben genannte Probleme mit Multiplikatoren zu vermeiden. Diskretisierung der regularisierten Probleme und Herleitung einer a priori Fehlerabschätzung der endlichdimensionalen Probleme zum Originalproblem.

Zugang: Die Einführung einer zusätzlichen verteilten Steuerungsvariable ermöglicht die Nutzung der Lavrientiev-Regularisierung. Lagrangesche Multiplikatoren bezüglich der entstehenden sogenannten gemischten Kontroll-Zustandsschranken sind wieder reguläre Funktionen, siehe [4]. Diese regularisierten Probleme werden mit Hilfe von finiten Elementen diskretisiert. Basierend auf geeignet konstruierten Testfunktionen für die Optimalitätsbedingungen kann eine Fehlerabschätzung zur optimalen Lösung des Originalproblems hergeleitet werden.

Linear-quadratisches Neumannrandsteuerungsproblem

$$\text{Minimize } J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (\mathbf{P})$$

bezüglich der linearen partiellen Dgl.

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \partial_n y &= u \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

und Kontroll- bzw. Zustandsschranken

$$\begin{aligned} u_a &\leq u(x) \leq u_b \quad \text{f.ü. auf } \Gamma \\ y(x) &\geq y_c(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega' \subset\subset \Omega \end{aligned}$$

- Existenz und Eindeutigkeit einer optimalen Lösung (\bar{u}, \bar{y}) ist Standard
- notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen können formuliert werden, allerdings ist der Lagrange-Multiplikator bezüglich der Zustandsbeschränkung im allg. nur ein Maß, siehe Casas [1]
- Außerdem sind die dualen Variablen nicht eindeutig \Rightarrow zusätzliche Schwierigkeiten für effiziente Optimierungsverfahren

Konzept der virtuellen Steuerung

Die Einführung einer neuen verteilten Steuerung v_ε gestattet die Betrachtung gemischter Kontroll-Zustandsschranken:

$$\text{Minimize } J_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon) := \frac{1}{2} \|y_\varepsilon - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\psi(\varepsilon)}{2} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\mathbf{P}_\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} -\Delta y_\varepsilon + y_\varepsilon &= \phi(\varepsilon)v_\varepsilon \quad \text{in } \Omega \\ \partial_n y_\varepsilon &= u_\varepsilon \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega \\ u_a &\leq u_\varepsilon(x) \leq u_b \quad \text{f.ü. auf } \Gamma \\ y(x) &\geq y_c(x) - \xi(\varepsilon)v_\varepsilon \quad \text{f.ü. in } \Omega' \subset\subset \Omega \end{aligned}$$

- Existenz und Eindeutigkeit einer optimalen Lösung $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon)$ ist Standard
- Lagrange-Multiplikator bzgl. der gemischten Beschränkung ist reguläre Funktion, siehe [4]
- duale Variablen sind eindeutig per Konstruktion \Rightarrow Anwendung von Aktiver-Mengen-Strategie oder Newton-ähnlichen Methoden inklusive Analysis möglich

Theorem: Konvergenz von (\mathbf{P}_ε) zu (\mathbf{P}) , [2]

Seien (\bar{u}, \bar{y}) bzw. $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon)$ die optimalen Lösungen von (\mathbf{P}) bzw. (\mathbf{P}_ε) . Dann existiert eine von ε unabhängige positive Konstante c , so daß

$$\|\bar{u} - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\bar{y} - \bar{y}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left(\frac{\xi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon)}{\sqrt{\psi(\varepsilon)}} \right)^{\frac{2}{d+1}}.$$

Diskretisierung von (\mathbf{P}_ε)

Diskretisierung des Gebietes und der Variablen:

- wir betrachten eine Triangulierung \mathcal{T}_h , bestehend aus Dreiecken oder Tetraedern, des Gebiet Ω mit der Gitterweite $h > 0$
- basierend auf dieser Triangulierung wird der endlichdimensionale Raum der auf diesen Elementen stückweise linearen Funktionen eingeführt:

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

\Rightarrow die Zustandsvariable y_ε und die virtuelle Steuerung v_ε werden stückweise linear diskretisiert

- die Randsteuerung soll ebenfalls stückweise linear auf entsprechenden Randelementen diskretisiert werden:

$$U_h = \{u \in C(\Gamma) \mid u|_e \in \mathcal{P}_1 \forall e \in \mathcal{T}_h \cap \Gamma\}$$

Basierend auf obigen Diskretisierungen betrachten wir nun folgendes regularisierte und endlichdimensionale Optimalsteuerproblem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J_\varepsilon(y_h^\varepsilon, u_h^\varepsilon, v_h^\varepsilon) &:= \frac{1}{2} \|y_h^\varepsilon - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\psi(\varepsilon)}{2} \|v_h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\mathbf{P}_h^\varepsilon) \\ \int_\Omega \nabla y_h^\varepsilon \cdot \nabla z_h + y_h^\varepsilon z_h \, dx &= \int_\Gamma u_h^\varepsilon z_h + ds \int_\Omega \phi(\varepsilon) v_h^\varepsilon z_h \, dx \quad \forall z_h \in V_h \\ u_a &\leq u_h^\varepsilon \leq u_b \quad \text{f.ü. auf } \Gamma \\ y_h^\varepsilon &\geq y_{c,h} - \xi(\varepsilon)v_h^\varepsilon \quad \text{f.ü. in } \Omega' \subset\subset \Omega \end{aligned}$$

- notwendigen (und hinreichende) Optimalitätsbedingungen einfach zu formulieren
- duale Variablen sind wie im kontinuierlichen Problem eindeutig \Rightarrow verwenden Primal-duale aktive Mengenstrategie als Optimierungsalgorithmus
- $(\mathbf{P}_h^\varepsilon)$ kann als quadratisches Optimierungsproblem mit linearen Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen im \mathbb{R}^n geschrieben werden

Theorem: Konvergenz von $(\mathbf{P}_h^\varepsilon)$ zu (\mathbf{P}) , [3]

Seien (\bar{u}, \bar{y}) bzw. $(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v}_h^\varepsilon, \bar{y}_h^\varepsilon)$ die optimalen Lösungen von (\mathbf{P}) bzw. $(\mathbf{P}_h^\varepsilon)$. Ferner gelte $\frac{\phi(\varepsilon) + \xi(\varepsilon)}{\sqrt{\psi(\varepsilon)}} \sim (h |\log h|^{1/2})^{1+d}$, $d = 2, 3$. Dann existiert eine von ε und h unabhängige positive Konstante c , so daß

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} + \|\bar{y} - \bar{y}_h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq ch |\log h|^{1/2}.$$

wichtige Eckpunkte:

- L^∞ -FE-fehlerabschätzungen in Ω' , sowie L^2 -FE-fehlerabschätzungen bzgl. Maßen
- gleichmäßige Beschränktheit der diskreten Lösungen bzgl. ε und h
- Konstruktion geeigneter Testfunktionen für die jeweiligen Optimalitätssysteme
- Betrachtung der Zustandsbeschränkungen in innerem Teilgebiet Ω' von Ω
- Kopplung des Regularisierungsparameters und der Gitterweite

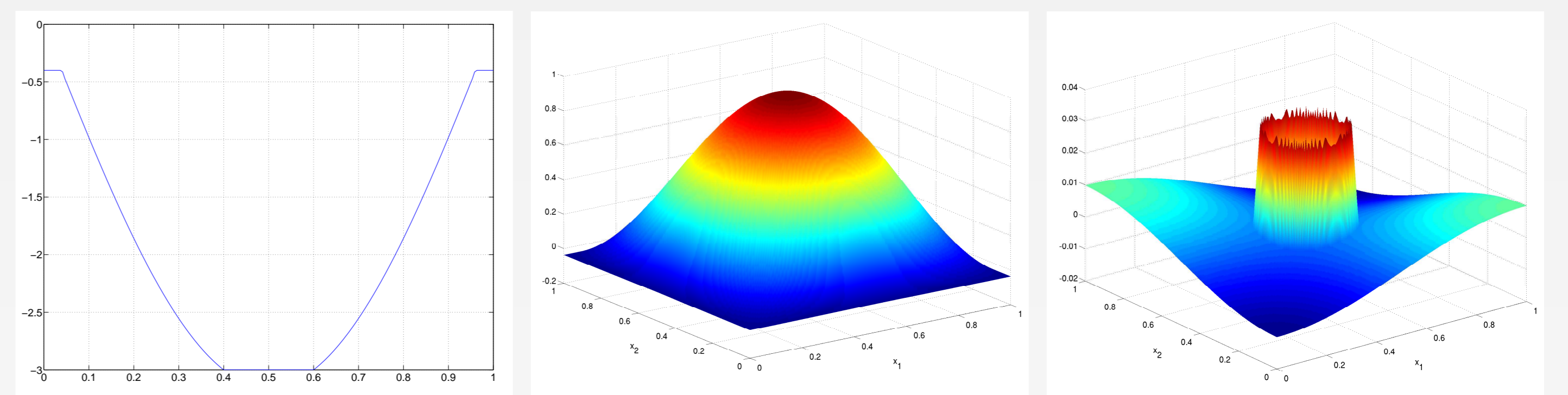
Numerische Testergebnisse

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad \Omega = [0, 1]^2 \\ -\Delta y + y &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_n y &= u + g \quad \text{on } \Gamma, \\ -3 &\leq u \leq -0.4 \quad \text{f.ü. auf } \Gamma \\ y &\geq y_c \quad \text{f.ü. in } \Omega' \end{aligned}$$

Die gegebenen Funktionen sind derart gewählt, so dass sich folgende optimale Lösung ergibt

$$\bar{u}(x) = \text{Proj}_{[-3, -0.4]} \{-\pi(\sin(\pi x_1) + \sin(\pi x_2))\} \quad \text{und} \quad \bar{y}(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$$

Optimale Lösung von $(\mathbf{P}_h^\varepsilon)$ für fixiertes h und ε

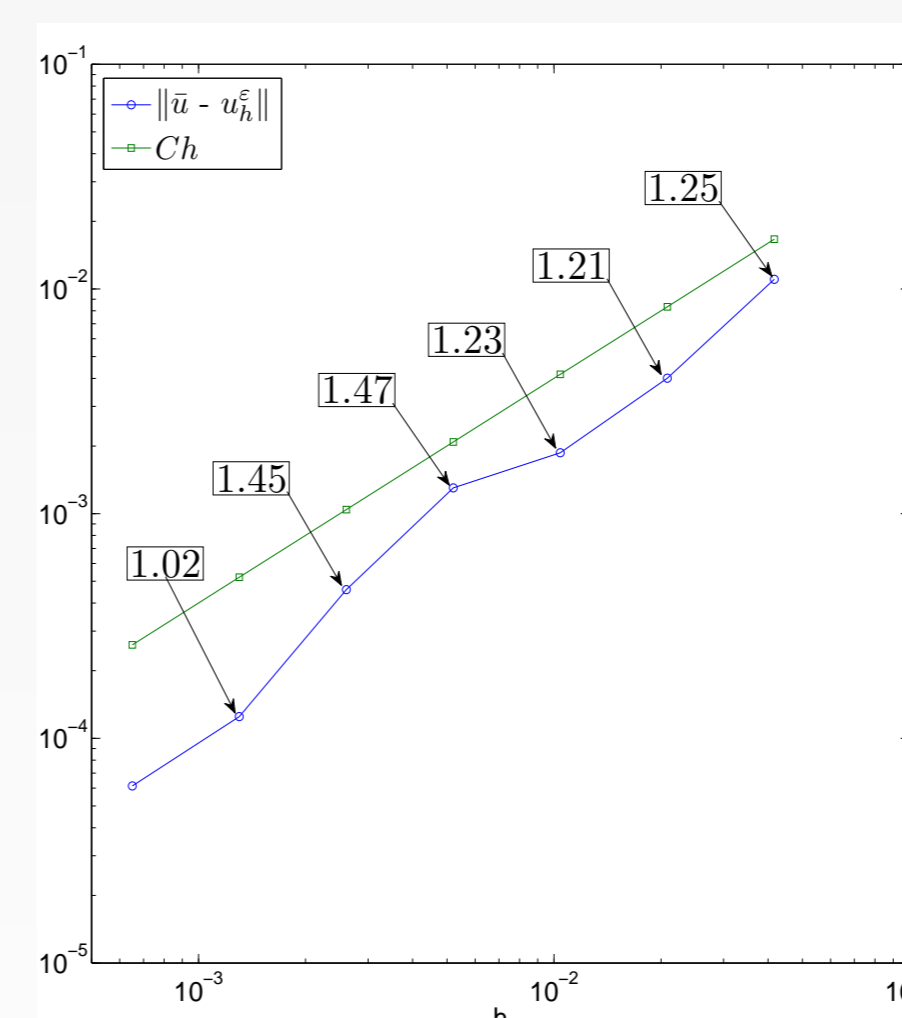


Randsteuerung \bar{u}_h^ε

Zustand \bar{y}_h^ε

virtuelle Steuerung \bar{v}_h^ε

Konvergenz der diskreten und regularisierten Lösung



- betrachten den Fehler $\|\bar{u} - \bar{u}_h^\varepsilon\|$ für folgende Parameterfkt.:

$$\phi(\varepsilon) = \xi(\varepsilon) \equiv 1, \quad \psi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

- die Kopplung zwischen ε und h ist somit gegeben durch:

$$\varepsilon \sim h^3 |\log h|^{3/2}$$

- die numerischen Resultate stützen unsere a priori Fehlerabschätzung. Die experimentellen Konvergenzraten sind sogar etwas besser als erwartet.

Referenzen

- [1] E. Casas. Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints. *SIAM J. Control and Optimization*, 31:993–1006, 1993.
- [2] K. Krumbiegel and A. Rösch. On the regularization error of state constrained Neumann control problems. *Control and Cybernetics*, 37(2):369–392, 2008.
- [3] K. Krumbiegel, C Meyer and A. Rösch. A priori error analysis for linear quadratic elliptic Neumann boundary control problems with control and state constraints *submitted*.
- [4] A. Rösch and F. Tröltzsch. Existence of regular Lagrange multipliers for elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints. *SIAM J. Optimization*, 45(2):548–564, 2006.