

Supersymmetrische Berechnung der marginalen Wahrscheinlichkeitsdichte reeller und komplexer Korrelationsmatrizen

Betreuer:
Prof. Dr. Thomas Guhr

Christian Recher

Fakultät für Physik

Einführung

Die Analyse von Zeitreihen spielt eine zentrale Rolle bei der Untersuchung komplexer Systeme.

Zeitreihe: Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Beispiele für Zeitreihen:

- Aktienkurse, Schlussstände des DAX, Wechselkurse, Anzahl von Sonnenflecken, Arbeitslosenzahlen, Wasserstände, EEG Daten, ...

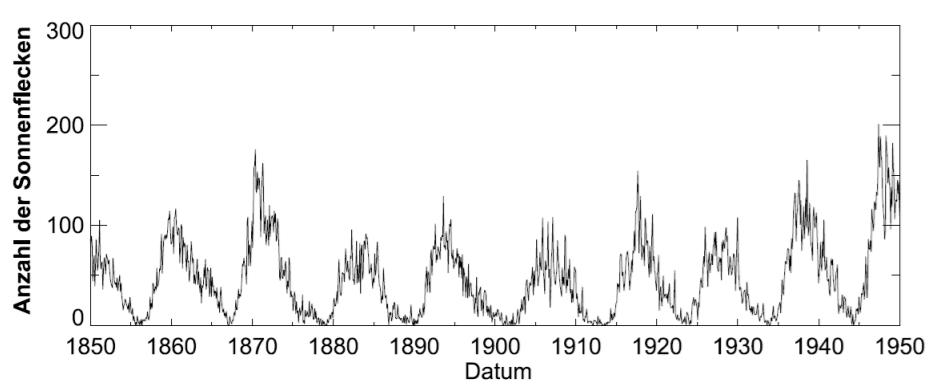


Abb. 1: Anzahl der Sonnenflecken

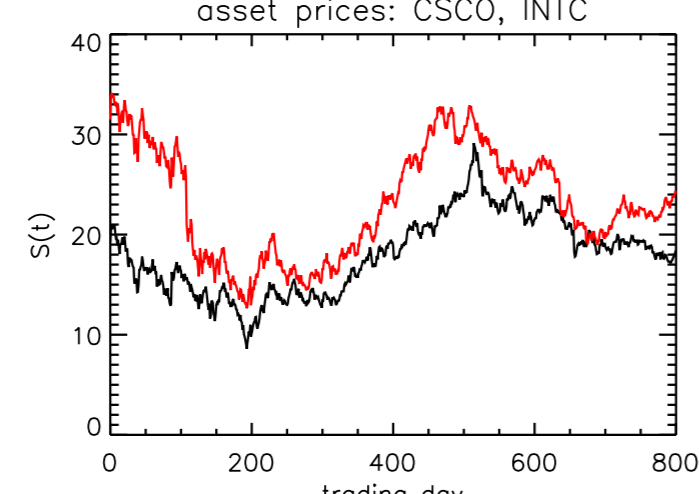


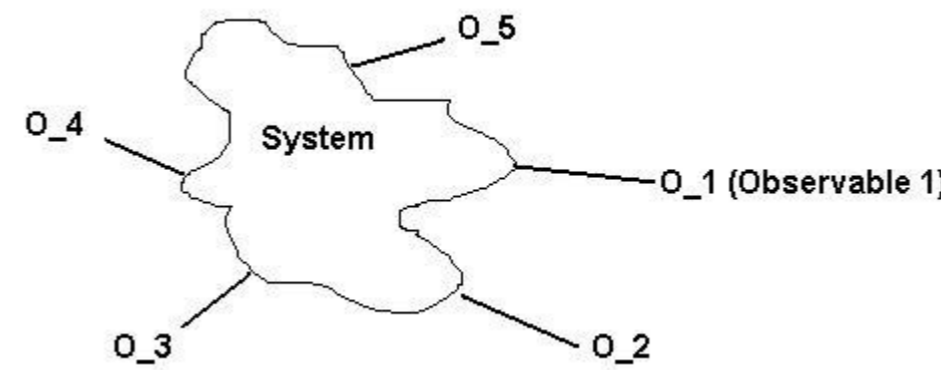
Abb. 2: Aktienkurse

Korrelationsmatrix

Korrelationen zwischen Observablen komplexer Systeme:

Exp. Zugang: Messung der Observablen und anschließender Vergleich der Messwerte

- p Observablen $O_j(t)$ $j = 1 \dots p$
- Messung der Observablen an n Zeitpunkten t_k $k = 1 \dots n$
- Messwert der Observablen $O_j(t)$ zum Zeitpunkt t_k G_{jk}



Messung liefert für jede Observable $O_j(t)$ eine Zeitreihe bestehend aus n

Messwerten

$$G_j : \quad G_{j1} \quad G_{j2} \quad \dots \quad G_{jn} \quad (1)$$

- Insgesamt pn Messwerte die in $p \times n$ Datenmatrix M zusammengefasst werden
- Korrelationskoeffizient zwischen den Zeitreihen G_j und G_l

$$C_{jl} = \frac{\langle (G_j - \langle G_j \rangle)(G_l - \langle G_l \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (G_j - \langle G_j \rangle)^2 \rangle \langle (G_l - \langle G_l \rangle)^2 \rangle}} = \frac{1}{n} (MM^\dagger)_{jl}. \quad (2)$$

- C_{jl} bilden die Einträge einer reell symmetrischen bzw. einer hermiteschen Matrix $C = C^\dagger$ die als Korrelationsmatrix bezeichnet wird.

Zufallsmatrixmodell

Ziel: Beschreibung statistischer Eigenschaften von Korrelationsmatrizen.

- Ersetze Datenmatrix M durch Zufallsmatrix W
- Einträge W_{ij} sind reelle ($\beta = 1$) oder komplexe ($\beta = 2$) Zufallsvariablen mit Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_\beta(W, C) \propto \exp\left(-\frac{\beta}{2} \text{tr} W^\dagger C^{-1} W\right) \quad (3)$$

- Ensemblemittel von WW^\dagger/n reproduziert Korrelationsmatrix C

$$\langle (WW^\dagger/n) \rangle = \int d[W] (WW^\dagger/n) P_\beta(W, C) = C \quad (4)$$

- Modell erlaubt es Größen von C durch Mittelung der entsprechenden Größen von WW^\dagger/n zu untersuchen.
- Bei Mittelung invarianter Größen (Spur, Determinante) kann C durch die Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_p)$ der Eigenwerte ersetzt werden $P_\beta(W, C) \rightarrow P_\beta(W, \Lambda)$.

Ziel: Berechne gemittelte marginale Wahrscheinlichkeitsdichte für die Eigenwerte der Matrix WW^\dagger

$$S_\beta(x) = -\frac{1}{p\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \int d[W] e^{-\frac{\beta}{2} \text{tr} W^\dagger \Lambda^{-1} W} \text{tr} \frac{1_p}{x + WW^\dagger} \quad (5)$$

sowohl für komplexe wie auch für reelle Korrelationsmatrizen.

Reelle v.s. komplexe Korrelationsmatrizen

Ansatz: Diagonalisiere Matrix WW^\dagger : $WW^\dagger = U^{-1} w^2 U$

$$w^2 = \text{diag}(w_1^2, \dots, w_p^2), \quad U \in \mathcal{O}(p), \mathcal{U}(p)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte nicht rotationsinvariant \rightarrow Gruppenintegral

$$\Phi_\beta(\Lambda, w^2) = \int \exp\left(-\frac{\beta}{2} \text{tr} U^\dagger \Lambda^{-1} U w^2\right) d\mu(U), \quad (6)$$

- komplexe Korrelationsmatrizen ($\beta = 2$):

Ein kompakter Ausdruck für $\Phi_2(\Lambda, w^2)$ ist bekannt [1, 2] mit Hilfe dessen sich $S_2(x)$ berechnen lässt

$$S_2(x) = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathcal{D}(i, j) x^{n-p+j-1} \exp(-x/\Lambda_i)}{p \left(\prod_{l=1}^p (n-l)! \right) \det^n \Lambda \Delta_p(\Lambda^{-1})} \Theta(x). \quad (7)$$

Dabei ist $\mathcal{D}(i, j)$ der Cofaktor der Matrix $D_{st} = (n-p+s-1)! \Lambda_t^{n-p+s}$ und $\Delta_p(\Lambda) = \prod_{i < j}^p (\Lambda_j - \Lambda_i)$ die Vandermonde Determinante.

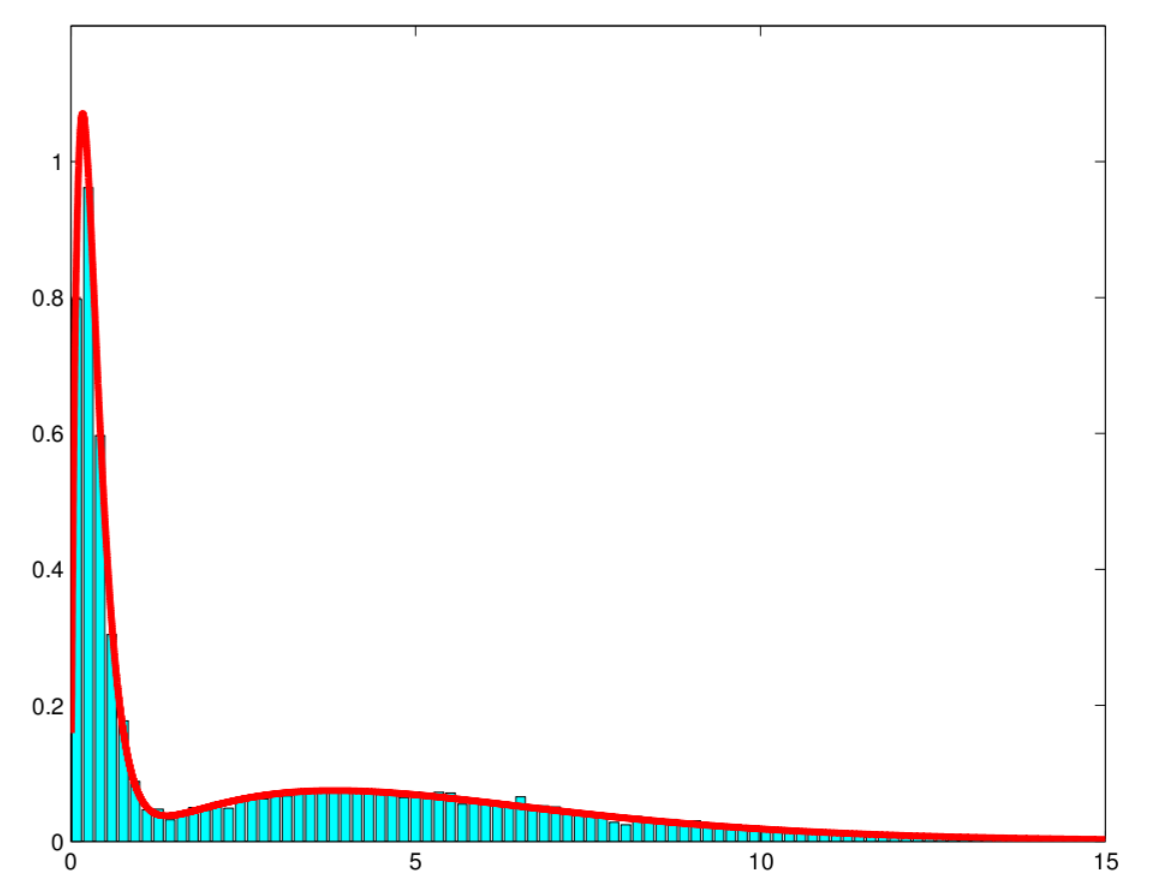


Abb. 3: marginale Wahrscheinlichkeitsdichte für $p = 2$ und $n = 3$.

- reelle Korrelationsmatrizen ($\beta = 1$):
Geschlossene Form des Gruppenintegrals ist nicht bekannt
- Einzige bekannte Form des Gruppenintegrals hat die Gestalt vielfacher unendlicher Reihen über Zonale bzw. Jack-Polynome [3, 4]
- keine expliziten Ausdrücke für marginale Wahrscheinlichkeitsdichte sowie höhere Korrelationsfunktionen

Supersymmetrie

- Konzept der Supersymmetrie hat seine Ursprünge in der Teilchenphysik

- Neben Anwendungen in der Teilchenphysik ist die Supersymmetrie heute ein unverzichtbare Rechentechnik zur Behandlung von Problemen in der Zufallsmatrixtheorie [5].

- Ausgangspunkt für die Berechnung der marginalen Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Erzeugende Funktion

$$Z_\beta(J) = \int d[W] P_\beta(W, \Lambda) \frac{\det(x + \mathbb{1}_p + J \mathbb{1}_p - WW^\dagger)}{\det(x + \mathbb{1}_p - J \mathbb{1}_p - WW^\dagger)} \quad (8)$$

- Zusammenhang mit marginaler Wahrscheinlichkeitsdichte durch Ableitung nach J

$$S_\beta(x) = -\frac{1}{2p\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left. \frac{\partial Z_\beta(J)}{\partial J} \right|_{J=0} \quad (9)$$

- Exakte Abbildung der erzeugenden Funktion auf ein Supermatrixintegral [6]

$$Z_\beta(J) = \int d[\varrho] I_\beta(\varrho) \prod_{j=1}^p \text{sdet}^{-\beta/2} \left(x + JI - \frac{\beta}{2} \Lambda_j \varrho \right) \quad (10)$$

- ϱ ist hermitesche 4×4 bzw. 2×2 Supermatrix für $\beta = 1$ bzw. $\beta = 2$.

- **Mit Hilfe der Supersymmetrie Methode wird die Anzahl der auszuführende Integrale erheblich reduziert.**

- J -Ableitung ausführen und anschließend ϱ diagonalisieren liefert

$$S_\beta(x) \propto \int d[R] |\text{Ber}_\beta(R)| I_\beta(2xR/\beta) (\text{str} R) \times \prod_{j=1}^p \text{sdet}^{-\beta/2} (R^- - \Lambda_j^{-1}) \quad (11)$$

- Für komplexe Korrelationsmatrizen kann ausgehend von Gl. (11) das bekannte Ergebnis für $S_2(x)$ reproduziert werden.

- **reelle Korrelationsmatrizen:** $R = \text{diag}(r_1, r_2, iR_{21}, iR_{21})$

$$S_1(x) \propto \int d[R] \frac{|r_1 - r_2|}{(r_1 - iR_{21})^2 (r_2 - iR_{21})^2} I_1(2xR) (\text{str} R) \times \left(\prod_{j=1}^p \frac{iR_{21} - \Lambda_j^{-1}}{\sqrt{(r_1^- - \Lambda_j^{-1})(r_2^- - \Lambda_j^{-1})}} \right) \quad (12)$$

mit $I_1(R) \propto \Theta(r_1) \Theta(r_2) (r_1 r_2)^{(n-1)/2} e^{-2\text{str} R} \left(-\frac{\partial}{\partial iR_{21}} \right)^{n-2} \delta(R_{21})$.

- Integration über R_{21} kann ausgeführt werden

- marginale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$S_1(x) = \Theta(x) \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{n-2-p+k} B_{jk} E_k(\Lambda^{-1}) x^{n-2-p+k-j} I_{jk}(x, \Lambda) \quad (13)$$

mit

$$E_k(\Lambda^{-1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \frac{1}{\Lambda_{i_1}} \dots \frac{1}{\Lambda_{i_k}}, \quad (14)$$

$$I_{jk}(x, \Lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \frac{|r_1 - r_2| (r_1 r_2)^{(n-1)/2} e^{-2x(r_1+r_2)}}{\prod_{j=1}^p \sqrt{(r_1^- - \Lambda_j^{-1})(r_2^- - \Lambda_j^{-1})}} \times \left\{ 2(1 - \delta_{j, n-2-p+k}) \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{1}{r_2^j} - \frac{1}{r_1^j} \right) - (r_1 + r_2) \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \frac{1}{r_2^{j+1} - r_1^{j+1}} \right\}. \quad (15)$$

- Das Problem der Berechnung der marginalen Wahrscheinlichkeitsdichte reeller Korrelationsmatrizen ist damit auf eine endliche Summe von Doppelintegralen reduziert.

Zusammenfassung

- Anwendung der Supersymmetrie Methode auf reelle und komplexe Korrelationsmatrizen.

- Mit Hilfe dieses Ansatzes lässt sich das bekannte Ergebnis für komplexe Korrelationsmatrizen reproduzieren.

- Ansatz umgeht das strukturelle Problem das für reelle Korrelationsmatrizen auftaucht.

- Für doppelte Entartung der Eigenwerte Λ_i kann die marginale Wahrscheinlichkeitsdichte durch ein einfach Integral ausgedrückt werden [7].

Literatur

- [1] Harish-Chandra. *Am. J. Math.*, 80:241, 1958.
- [2] C. Itzykson and J.B. Zuber. *J. Math. Phys.*, 21:411, 1980.
- [3] R.J. Muirhead. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, New York, 1st edition, 1982.

- [4] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Clarendon Press, Oxford, 2nd edition, 1998.

- [5] J.J.M. Verbaarschot. *AIP Conf. Proc.*, 744:277, 2004.

- [6] M. Kieburg, J. Grönqvist, and T. Guhr. *J.Phys. A*, 42:275205, 2009.

- [7] C. Recher, M. Kieburg, and T. Guhr. *submitted to Physical Review Letters*, 2010.