Fakultät für Mathematik

Differentialgleichungen und Differentialgeometrie

Prof. Dr. rer. nat. U. Dierkes

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

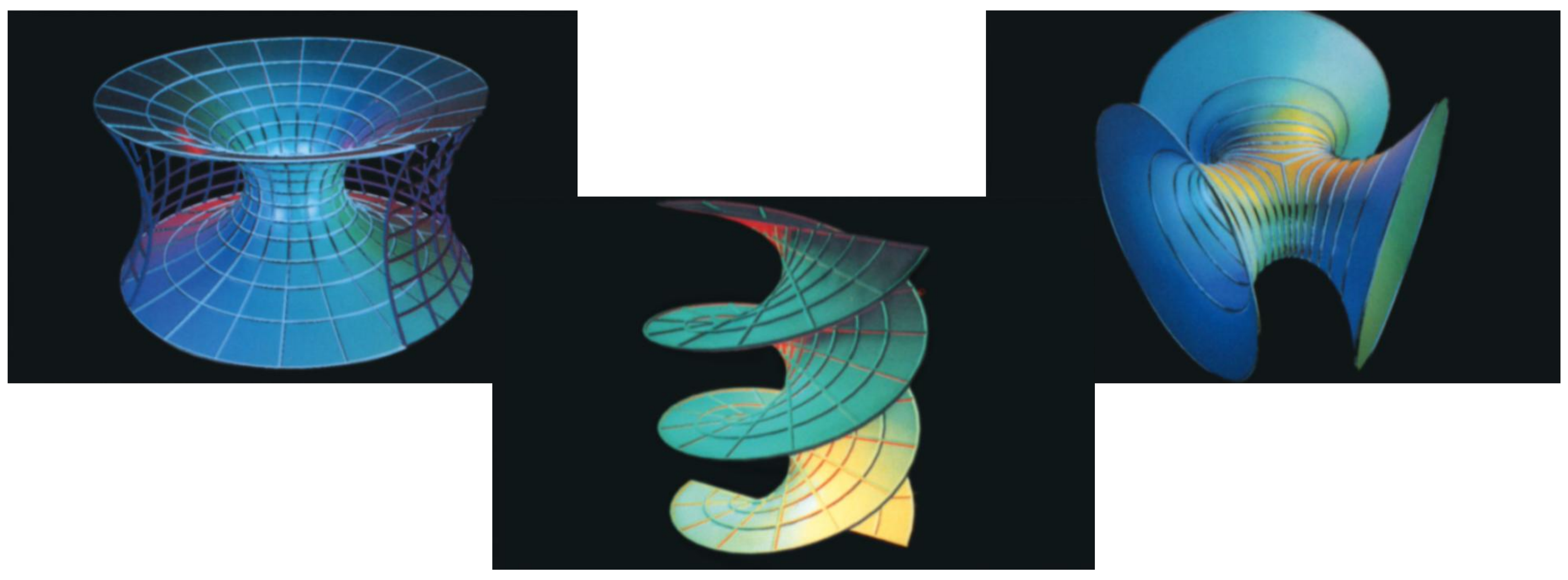
Patrick Henkemeyer:

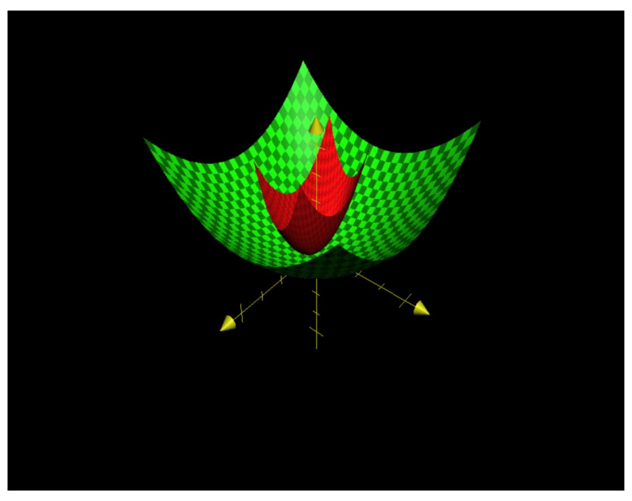
Ein Barriereprinzip für zweidimensionale Flächen mit beliebiger Kodimension

Das Plateau-Problem für H-Flächen

Ist eine beliebige Kurve in dem euklidischen Raum vorgegeben, dann versteht der Mathematiker unter dem Plateau-Problem das Auffinden einer Fläche, welche die vorgegebene Kurve als Rand und in jedem Punkt eine vorgeschriebene mittlere Krümmung *H* besitzt. Das Problem ist nach dem Physiker J. Plateau benannt, der im 19. Jh. mit Drahtgestellen und Seifenhäuten experimentierte; dabei bilden sich Flächen mit mittlerer Krümmung *H=0*, sogenannte Minimalflächen. Mathematisch ist das Problem schon vorher von L. Euler und J. L. Lagrange im Kontext der Variationsrechnung analysiert worden.

Beispiele für Minimalflächen



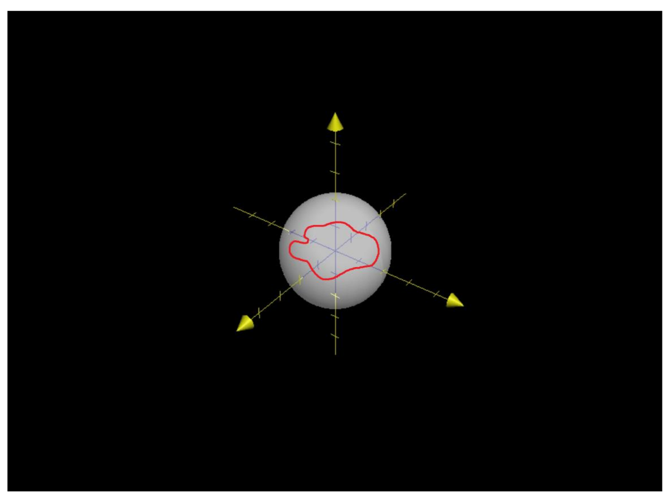


Das Barriereprinzip

Berühren sich zwei Flächen unter geeigneten Krümmungsbedingungen in einem Punkt, so ist es möglich ein Barriereprinzip anzuwenden. Dieses liefert die Übereinstimmung beider Flächen in einer ganzen Umgebung um den Berührpunkt. Eine Situation wie in dem linksstehenden Bild, dass sich die beiden Flächen nur in einem Punkt berühren, ist damit unmöglich.

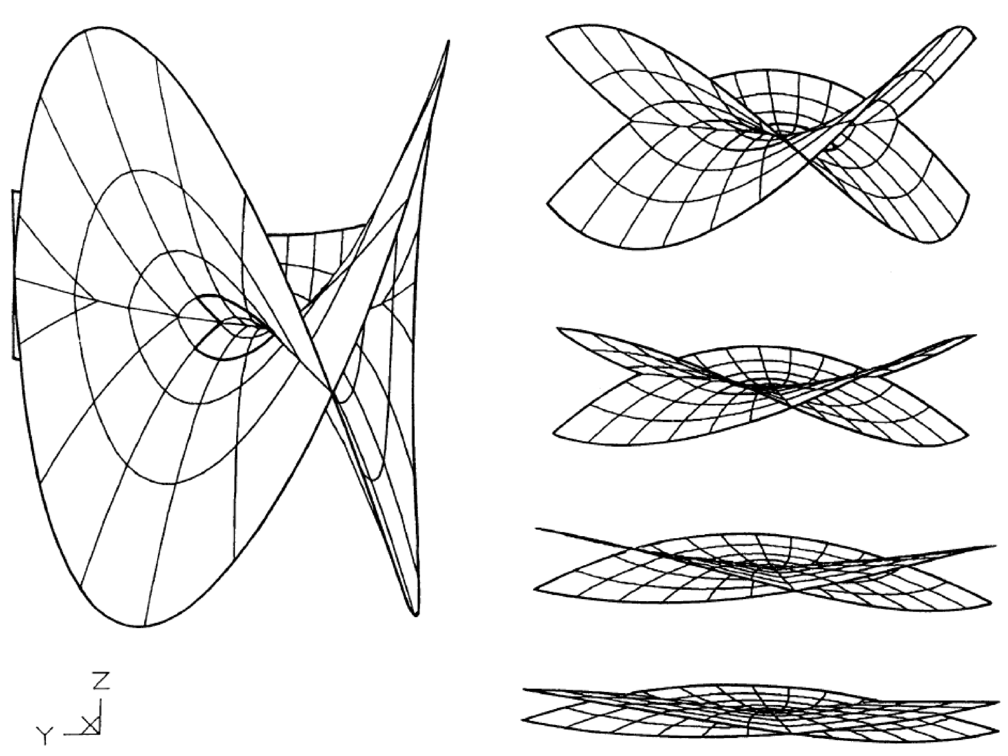
Anwendung des Barriereprinzips zur Lösung des Plateau-Problems

Eine Möglichkeit die Existenz einer Lösung des Problems zu garantieren, ist eine geeignete Kugel um die Randkurve zu legen und in dieser Menge das Problem mit Variationsmethoden zu lösen. Das Barriereprinzip liefert Aussagen über die Koinzidenzmenge der Fläche mit der Kugel, welche essentiell für die Regularitäts-beweise der Lösung sind.



Die Vorgehensweise und die neuen Ergebnisse der Arbeit

In der Arbeit wird ein Barriereprinzip für zweidimensionale Flächen in dem *(n+2)*-dimensionalen euklidischen Raum mit einem beliebigen *n* (Kodimension) bewiesen.
Dafür wird das Verhalten solcher Flächen in Verzweigungspunkten untersucht und erstmalig gezeigt, dass dort eine Tangentialebene existiert. In der Skizze rechts wird beispielsweise der Verzweigungspunkt der Catalan-Minimalfläche immer näher herangezoomt und der typische Sattelpunkt-Charakter ist erkennbar.
Desweiteren werden geeignete Krümmungsbedingungen gefunden: Statt dem Mittelwert aus allen Hauptkrümmungen muss nur der Mittelwert aus den beiden kleinsten Haupt-krümmungen der Barriere berücksichtigt werden. Schließlich können wir das Hauptresultat formulieren:



Theorem (H. '12): Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+2}$ eine reguläre Hyperfläche der Klasse C^2 mit der Einheitsnormalen ν und 2-mittlerer Krümmung Λ_2 bezüglich dieser Normalen. Weiter bezeichnen $(H_k)_{k=1,\dots,n}$ stetige, beschränkte Funktionen auf $\mathbb{R}^{n+2}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge. Wir nehmen an, dass $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+2}) \cap H^2_{2,loc}(\Omega, \mathbb{R}^{n+2})$ lokal auf der Seite von S liegt, in welche die Normale ν zeigt und eine konforme Lösung der Variationsungleichung

$$\delta\mathcal{F}(X,\varphi) = \int_\Omega \left\{ \langle \nabla X, \nabla\varphi \rangle + 2W \sum\nolimits_{k=1}^{n} H_k \langle N_k, \varphi \rangle \right\} dudv \geq 0$$

für alle $\varphi \in \mathring{H}^1_2(\Omega, \mathbb{R}^{n+2}) \cap L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+2})$ ist, sodass $X + \varepsilon\varphi$ für $0 < \varepsilon \ll 1$ lokal auf der gleichen Seite von S liegt. Dabei sind die $(N_k)_{k=1,\dots,n}$ die orthonormierten Normalen und $W = |X_u|^2 = |X_v|^2$. Wir setzen weiterhin voraus, dass X die Hyperfläche S berührt, also für ein $w_0 \in \Omega$ ist $P_0 = X(w_0) \in S$, und dass für eine Umgebung $U = U(P_0) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ gilt $|\mathbf{H}(x)| = \left| \sum_{k=1}^n H_k(x) N_k(x) \right| \leq \Lambda_{2,\rho(x)}(x)$ für alle $x \in U$.

Dann existiert eine Scheibe $B_\varepsilon(w_0) \subset \Omega$, sodass $X(B_\varepsilon(w_0)) \subset S$.

Name: Patrick Henkemeyer, M.Sc.
Betreuer: Prof. Dr. Ulrich Dierkes

Kontakt: patrick.henkemeyer@uni-due.de

Referenzen und Bildquellen:

Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Sauvigny. F.: *Minimal Surfaces*. Grundlehren d. math. Wissenschaften Vol. 339, Springer-Verlag, 2010

Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Tromba, A.J.: *Regularity of Minimal Surfaces*. Grundlehren d. math. Wissenschaften Vol. 340, Springer-Verlag, 2010

Henkemeyer, P.: *A Barrier Principle for Surfaces with Prescribed Mean Curvature and Arbitrary Codimension*. Erscheint in Result. Math.