Mathematische Fakultät

Essener Seminar für Algebraische Geometrie und Arithmetik

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Regular Singular Stratified Bundles in Positive Characteristic

Modulare Arithmetik

Klassische Zahlenbereiche

Die „klassischen" Zahlenbereiche (Mathematiker sprechen von *Ringen* oder *Körpern*) sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$

die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$$-1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{3}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots,$$

die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Grenzwerte aller Cauchy Folgen von rationalen Zahlen, z.B. e, π,

und die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$. Die komplexen Zahlen haben die schöne Eigenschaft, dass jede Polynomgleichung über ihnen eine Lösung besitzt; d.h. jede Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit komplexen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ und der Unbekannten x besitzt eine Lösung. Man sagt $\mathbb{C}$ sei *algebraisch abgeschlossen*.

Modulare Arithmetik und „positive Charakteristik"

Alle dieser „klassischen" Zahlenbereiche haben die Eigenschaft gemein, dass sie die ganzen Zahlen enthalten. Zurückgehend auf den Mathematiker Evariste Galois (1811–1832) werden auch Zahlenbereiche studiert, die nicht diese Eigenschaft haben. Ein solcher Zahlenbereich F (genauer *Körper*) hat die Eigenschaft, dass es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für jedes Element a des Zahlenbereichs F gilt

$$p \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{p \text{ Summanden}} = 0.$$

Prototypisch für solche Zahlenbereiche ist der Körper $\mathbb{F}_p$: Seine Elemente sind die Zahlen $0, 1, \dots, p-1$ und seine Verknüpfungsregeln sind: Für Elemente a, b aus $\mathbb{F}_p$, die wir als natürliche Zahlen zwischen 0 und $p-1$ auffassen, sind a„+"b bzw. a„·"b definiert als die Reste, die entstehen wenn man die natürlichen Zahlen $a+b$ bzw. $a \cdot b$ versucht durch p zu teilen; diese Reste werden auch *Modulus* genannt; das Rechnen in diesen Zahlenbereichen wird daher *Modulare Arithmetik* genannt, und p wird die *Charakteristik* des Zahlenbereichs genannt. Man sagt der Zahlenbereich habe *positive Charakteristik*.

Die Situation ist ähnlich dem Rechnen mit Uhrzeiten: ist es 18 Uhr, und addiert man 10 Stunden, so erhält man auch nicht „28 Uhr" sondern 4 Uhr (auch wenn 24 natürlich keine Primzahl ist).

Algebraische Geometrie

Algebraische Geometrie in positiver Charakteristik

Der Ursprung der Algebra ist das Bestreben Lösungsmengen von Systemen von Polynomgleichungen zu verstehen. Solch ein System nennt man *algebraische Varietät*, und der Unterbereich der *Algebraischen Geometrie* geht auf die Beobachtung zurück, dass sich die Lösungsmengen eines solchen Systems geometrisch veranschaulichen lassen. Betrachtet man z.B. die Polynomgleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

in den zwei Unbekannten x und y, so ist nicht schwer zu sehen, dass die Menge der Paare von reellen Zahlen (a, b), die die Gleichung lösen, einen Kreis im zwei-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ bilden. In den Ausdruck $x^2 + y^2$ kann man aber auch Paare von Elementen beliebiger anderer Zahlenbereiche einsetzen; es ergibt also Sinn nach der Lösungsmenge der Gleichung (1) in anderen Zahlenbereichen zu fragen. Betrachtet man die Paare von komplexen Zahlen, die die Gleichung (1) lösen, so stellt man fest, dass die Menge dieser Paare die Struktur einer *komplexen Mannigfaltigkeit* in $\mathbb{C}^2$ trägt. Solche Objekte kommen aus einem anderen Bereich der Mathematik, sind von großem Interesse auch in der Physik, und es gibt sehr weit entwickelte geometrische Methoden um sie zu analysieren.

Es ist aber ebenso sinnvoll nach der Lösungsmenge der Gleichung (1), oder allgemeiner nach der Lösungsmenge eines Systems von Polynomgleichungen, in einem Zahlenbereich von positiver Charakteristik zu fragen. Für sie gibt es keine so naheliegende geometrische Interpretation, aber es ergibt sich die Frage:

Frage
Lassen sich die Eigenschaften der Lösungsmenge in den komplexen Zahlen, die man mit geometrischen Methoden gefunden hat, auf die Lösungsmenge der Gleichung in Zahlenbereichen von positiver Charakteristik übertragen?

In meiner Dissertation beantworte ich diese Frage für eine ganz bestimmte Eigenschaft.

Die Frage ist für Mathematiker interessant, weil sie Auskunft über die „Natur" dieser Eigenschaften gibt: Ist eine Eigenschaft der Lösungsmenge eines Systems von Polynomgleichungen „intrinsisch" in dem System kodiert, oder hängt sie von dem Kontext in dem man arbeitet — dem Zahlenbereich in dem man die Lösungen sucht — ab?

Das Studium der Beziehungen der „klassischen Situation" über den komplexen Zahlen zu der Situation in positiver Charakteristik hat eine lange Tradition, und es ist bekannt, dass in positiver Charakteristik ganz neue Phänomene sichtbar werden, die klassisch nicht zu erahnen waren. In vielen Fällen bestehen dennoch starke Parallelen, sofern man eine Formulierung in positiver Charakteristik findet, die die neu auftretenden Phänomene berücksichtigt.

Zusammenhänge und die Riemann-Hilbert Korrespondenz

Lineare Differentialgleichungen und Zusammenhänge

Die Theorie der Differentialgleichungen ist von großem Interesse für alle Bereiche der Naturwissenschaften. Der Begriff eines *flachen Zusammenhangs* ∇ auf einem Vektorbündel E auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Konzeptes eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Die Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen die man vielleicht in der Schule kennengelernt hat entsprechen Zusammenhängen auf dem trivialen Vektorbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}^n$. Ein Vektorbündel mit Zusammenhang (E, ∇) ist also eine „Verklebung" von solchen klassischen Systemen von Differentialgleichungen. Formal definieren wir hier (etwas ungenau, die Experten mögen es verzeihen) ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang als ein Vektorbündel, das gleichzeitig ein Modul über dem Ring der Differentialoperatoren $\mathscr{D}_X$ ist.

Ist X eine (glatte) algebraische Varietät über einem Körper k, so gibt es den Begriff der *algebraischen Differentialoperatoren* $\mathscr{D}_{X/k}$, und wie oben erhalten wir den Begriff eines *flachen algebraischen Zusammenhangs* auf einem Vektorbündel E auf X. Ist $k = \mathbb{C}$, so ist es ein fundamentaler Satz von Pierre Deligne ([Del70]), dass die Begriffe „flacher algebraischer Zusammenhang auf E" und „flacher Zusammenhang auf E^{an}" zusammenfallen, sofern man sich auf Zusammenhänge mit *regulären Singularitäten (in ∞)* einschränkt. Diese Bedingung bedeutet, dass die Lösungen der Differentialgleichungen nur „moderat" wachsen, wenn man dem Rand der komplexen Mannigfaltigkeit X^{an} näher kommt.

Die Riemann-Hilbert Korrespondenz

Die Riemann-Hilbert Korrespondenz in der Formulierung von Deligne ([Del70]) hat fundamentale Bedeutung: Ist X eine algebraische Varietät über $\mathbb{C}$, so beschreibt sie eine Verbindung der Topologie der komplexen Mannigfaltigkeit X^{an} mit den algebraischen Eigenschaften der Varietät X. Wir schreiben $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, x)$ für die *Fundamentalgruppe* von X^{an} am Basispunkt x. Deligne beweist, dass es die folgende Äquivalenz von Kategorien gibt, die auch *Riemann-Hilbert Korrespondenz* genannt wird:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{endlich dimensionale komplexe}\\ \text{Darstellungen von } \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, x)\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\text{Riemann-Hilbert}} \left\{\begin{array}{c}\text{Vektorbündel } E \text{ auf } X\\ \text{mit flachem Zusammenhang } \nabla\\ \text{und regulären Singularitäten}\end{array}\right\}$$

Die Gruppe $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, x)$ ist eine rein topologische Invariante, die sich im allgemeinen nicht aus der algebraischen Struktur von X rekonstruieren lässt. Nur die endlichen Quotienten der Gruppe $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, x)$ sind in der algebraischen Varietät X kodiert, nämlich als die endlichen Quotienten der *étalen Fundamentalgruppe* $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$.

Positive Charakteristik und Stratifizierte Bündel

Das Hauptresultat

Sei für einen Moment X weiterhin eine algebraische Varietät über den komplexen Zahlen. Fast per Definition schränkt sich die Riemann-Hilbert Korrespondenz ein zu einer Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{\begin{array}{c}\text{endlich dimensionale komplexe}\\ \text{Darstellungen von } \pi_1^{\text{ét}}(X, x)\\ \text{mit \textit{endlichem Bild}}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\text{Riemann-Hilbert}} \left\{\begin{array}{c}\text{Vektorbündel } E \text{ auf } X\\ \text{mit flachem Zusammenhang,}\\ \text{regulären Singularitäten}\\ \text{und \textit{endlicher Monodromie}}\end{array}\right\}$$

Beide Seiten dieser Äquivalenz sind jetzt *algebraische Objekte*, es ergibt also Sinn zu fragen:

Frage
Wenn X eine glatte algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossen Körper k positiver Charakteristik ist, gibt es ein gutes Analogon für die obige Äquivalenz?

In meiner Dissertation beantworte ich diese Frage vollständig. Historisch bedingt werden Vektorbündel mit $\mathscr{D}_{X/k}$-Modulstruktur in diesem Kontext *stratifizierte Bündel* genannt. Basierend auf einer Arbeit von David Gieseker ([Gie75]) definiere ich einen allgemeinen Begriff von regulären Singularitäten für stratifizierte Bündel, und ich beweise:

Theorem ([Kin12]). Wenn X eine glatte algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossen Körper positiver Charakteristik ist, dann gibt es eine $(\otimes$-$)$Äquivalenz

$$\left\{\begin{array}{c}\text{endlich dimensionale}\\ k\text{-Darstellungen von } \pi_1^{\mathrm{tame}}(X, x)\\ \text{mit \textit{endlichem Bild}}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Stratifizierte Bündel auf } X\\ \text{regulären Singularitäten}\\ \text{und \textit{endlicher Monodromie}.}\end{array}\right\}$$

Hierbei ist $\pi_1^{\mathrm{tame}}(X, x)$ die *zahme Fundamentalgruppe*; sie ist ein Quotient von $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ der nur in positiver Charakteristik sichtbar, und außerordentlich interessant ist ([KS10]).

Lars Kindler
Dr. rer. nat.
Betreut durch Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Esnault

Literatur

[Del70] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970. 0417174 (54 #5232)

[Gie75] D. Gieseker, *Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), no. 1, 1–31. MR0382271 (52 #3156)

[KS10] M. Kerz and A. Schmidt, *On different notions of tameness in arithmetic geometry*, Math. Ann. **346** (2010), no. 3, 641–668.

[Kin12] L. Kindler, *Regular singular stratified bundles and tame ramification*, arXiv:1210.5077, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..