Holzäpfel, L., Rieu, A., Schacht, F., Zastrow, M., Fink, B. (2024). Vom Problemlösen zum Argumentieren. Hinführen zu prozessbezogenen Kompetenzen. mathematik lehren, 242, 29–34.

LARS HOLZÄPFEL, ANDREAS RIEU, FLORIAN SCHACHT, MAYA ZASTROW, BIANCA FINK

Vom Problemlösen zum Argumentieren

Hinführen zu prozessbezogenen Kompetenzen

LERNGRUPPE: 5. – 13. Schuljahr

IDEE: Am Beispiel arithmetischer Basisfähigkeiten wird gezeigt, wie Lernende das Argumentieren und Kommunizieren über die Schuljahre hinweg lernen und dabei kognitiv aktiviert werden

PRINZIPIEN: Durchgängigkeit, Kognitive Aktivierung, Lernendenorientierung & Adaptivität

VORKENNTNISSE: Teilbarkeit/Teiler/Primzahlen

ZEITBEDARF: 2 Unterrichtsstunden (90 min)

„Ich will gar nicht wissen, ***warum*** *das so ist. Ich will nur wissen,* ***wie es geht****, damit ich es ausrechnen kann und das Ergebnis habe!“* Solche vertrauten Sätze aus dem Schulalltag machen deutlich, wie wenig Bedeutung die Lernenden dem *Verstehen* von Mathematik beimessen. Dabei kommt es gerade bei der Konzeption von kognitiv aktivierendem und kommunikationsförderndem Unterricht darauf an, den Aufbau eines vertieften Verständnisses von Mathematik zu fördern, sich mit dem „Warum“ auseinanderzusetzen und nach Gründen zu suchen, weshalb ein Verfahren, eine Regel oder eine Formel funktioniert bzw. angewendet werden kann – oder auch nicht (vgl. u. a. Reiss 2002, Brunner 2014).

So gibt es etwa bei der Aufgabe „Teiler der Zahl 10 000 finden“ (vgl. Holzäpfel u. a. 2018, S. 51) eine Reihe von Möglichkeiten, sich mit dem „Warum“ auseinanderzusetzen und Fragen zu stellen. (Wichtig ist natürlich, dass diese Aufgaben auch eine Reichhaltigkeit an Bearbeitungsmöglichkeiten anbieten.)

Teiler der Zahl 10 000 finden

a) Bestimme die Primfaktorzerlegung von 10 000.
b) Wie viele Teiler hat die Zahl 10 000?
c) Welche Zahl unter 10 000 hat die meisten Teiler?

Die reine Fokussierung auf das Ergebnis würde bei dieser Aufgabe gar nicht genügen, denn man wird hier zur argumentativen Absicherung regelrecht aufgefordert – sonst würde man in Aufgabenteil b) auch gar nicht sicher sagen können, ob man alle Teiler von 10 000 überhaupt gefunden hat.

Fachmathematisch basiert die Aufgabe auf dem Fundamentalsatz der Arithmetik, nach dem die Primfaktorzerlegung einer Zahl eindeutig ist. Dies muss im Unterricht nicht angesprochen werden, kann jedoch für bestimmte Klassen(-stufen) einen Denkmoment darstellen bei der Frage, ob durch die kombinatorische Darstellung der Primfaktoren auch tatsächlich alle Teiler abgebildet werden.

Schrittweise Unterricht planen

Argumentationsqualitäten als Lernausgangslage diagnostizieren

Lernende finden in der Regel – meist in unsystematischer Weise – einige Teiler der Zahl 10 000 und geben sich dann recht schnell zufrieden mit der Aussage „Ich bin fertig, mehr finde ich nicht“ oder „Ich habe alle“.

Dies ist keine zufriedenstellende und dennoch typische Lösung. Hier müssen also Wege gefunden werden, wie die Lernenden darin unterstützt werden können, selbst Fragen zu stellen, eine kritische Haltung gegenüber (vorläufigen oder auch falschen) Ergebnissen zu entwickeln und ihre eigenen Aussagen stärker abzusichern. Dazu ist es zunächst erforderlich, sich ein Bild davon zu verschaffen, wo die Lernenden überhaupt stehen.

An solch einer Stelle zeigt sich sehr schnell die Heterogenität einer Lerngruppe – umso wichtiger ist es, verschiedene Ansatzpunkte zu identifizieren, an denen die Lernenden adaptiv unterstützt werden können (Friesen/Holzäpfel/Leuders 2022). Entsprechend müssen unterschiedliche Argumentationsqualitäten und damit verbunden unterschiedliche Ansprüche an die Starken und Schwachen formuliert werden (Bardy/Holzäpfel/Leuders 2021).

Die Aufgabe, alle Teiler der Zahl 10 000 zu finden, bietet einen großen Spielraum und ist auch insofern gut für den Einstieg in das Argumentieren geeignet, da sie inhaltlich nahezu voraussetzungsfrei ist und nur den Begriff des Teilers, also der Vorstellung der restfreien Division der Ausgangszahl, durch eine weitere natürliche

1 | Wissenswert: Typische Herausforderungen reichhaltiger Aufgaben

Welche typischen Hürden können bei der Aufgabe „Teiler der Zahl 10 000 finden" zu Beginn beobachtet werden?

- *anzufangen fällt schwer:* Mit welchen Teilern sollte man beginnen?
- *unsystematisches Vorgehen:* keine paarweise Aufzählung der Teiler (kommt oft erst in einem späteren Schritt)
- *vergessen/übersehen einzelner Teiler:* nicht alle Teiler gefunden, zum Beispiel 1 (als trivialer Teiler) vergessen
- *fehlendes Begründungsbedürfnis:* Sind es wirklich alle? Warum?
- *Zusammenhang* zwischen den Teilaufgaben (a) und (b) *wird nicht erkannt* (Zusammenhang zwischen Primfaktorzerlegung und Anzahl der Teiler); nicht die Anzahl der Teiler wird betrachtet, sondern die Teiler selbst
- die Zahl 10 000 ist (zu) groß – eine Verkleinerung des Problems z. B. auf 100, um eine Idee für das Lösen zu entwickeln, wird nicht als Strategie erkannt
- *fehlende Ideen für eine grafische Darstellung* (z. B. schrittweises Zerlegen in Produkte in der Baumdarstellung) oder *systematische tabellarische Auflistung*
- *Rechenfehler* führen zu falschen Ergebnissen (und können Erkenntnisse behindern)

Zahl benötigt – was einen Einsatz in allen Klassenstufen jederzeit ermöglicht und einen Fokus auf das Argumentieren legt.

Wie die in **Kasten 1** beschriebenen typischen Hürden verdeutlichen, kommen vonseiten der Lernenden häufig kaum Argumentationsprozesse zustande. Wie dies unterstützt werden kann, wird nachfolgend diskutiert.

Lernziele setzen: Argumentationsqualitäten bestimmen

Ziel des Unterrichts ist es, die Lernenden für das Begründen zu sensibilisieren. Von sich aus bringen sie nicht unbedingt ein Begründungsbedürfnis mit – dazu gibt es zunächst auch keinen Anlass. Wir möchten jedoch vermitteln, dass das Begründen (bzw. das Beweisen, welches sich durch eine gewisse formale Strenge vom Begründen abgrenzen lässt) die Mathematik als Disziplin ausmacht. Und dabei geht es nicht primär darum, andere zu überzeugen, sondern vor allem die mathematischen Gegenstände besser zu durchdringen, zu verstehen und entlang ihrer logischen Struktur zu ordnen, d. h. neue Zusammenhänge oder Sätze aus bekannten mathematischen Zusammenhängen herzuleiten.

Argumentieren
ist ein Begründungsprozess, bei dem verschiedene Gesprächsteilnehmende Argumente zu mathematischen Zusammenhängen austauschen und rechtfertigen, um gemeinsam Begründungen für mathematische Zusammenhänge zu entwickeln.

Insofern steht beim Argumentieren insbesondere die soziale Interaktion im Vordergrund (Meyer/Prediger 2009).

Ferner kann – wie in **Abb. 1** dargestellt – eine Abgrenzung zum Beweisen vorgenommen werden (s. dazu auch Brunner 2014).

Was macht eine gute Argumentation aus?

Um Argumente zu analysieren, hat der Philosoph Stephen Toulmin ein Argumentationsschema aus *Information*, *Schlussregel* mit *Stützung* und *Schlussfolgerung* entwickelt (Toulmin 1996, siehe auch Krummheuer 2003). Angewendet auf die Suche der Teiler von 10 000 wird dabei ausgehend von der Menge der Teiler von 100 (also der Teilermenge der Zahl 100) darauf geschlossen, dass diese Teilmenge (der Zahl 100), als Teilmenge in der Teilermenge von 10 000 enthalten ist (vgl. **Abb. 2**).

Diese Erkenntnis wird durch Regeln und Sätze aus der Mathematik gestützt – hier zu Teilmengen und Teilermengen. Auch wenn das Toulmin-Schema zwei Begründungsstufen vorsieht – nämlich Schlussregel („weil") und Stützung („aufgrund"), ist für den Unterricht eine dieser beiden Stufen bzw. eine Zusammenfassung völlig ausreichend.

Solche zusammenhängenden Überlegungen und Gedankenschritte gilt es herauszuarbeiten und den Lernenden bewusst zu machen, dass und wie Aussagen oder Beobachtungen zusammenhängen und begründet werden können. Ein Beispiel: „Wenn ich einen Teiler gefunden habe, muss es dazu noch einen zweiten Teiler geben, weil ich ja die zweite Zahl finden muss, mit der man multipliziert, um 10 000 zu erhalten. Das heißt, wenn ich die 10 000 durch 5 teile, erhalte ich die 2 000. Und die ist dann auch ein Teiler" (vgl. **Abb. 3**).

Argumentieren	⟷	Beweisen
• Diskursivität (Kommunizieren) • Nutzen eigensprachlicher Mittel • Argumentieren durch Plausibilität • möglichst hohe Zugänglichkeit • charakteristisch: großer Bedeutungsspielraum		• formale Sprache • hohe Akzeptanz innerhalb der Fachdisziplin • Nutzen mathematischer Sprache und Symbole

Abb. 1: Abgrenzung der Begriffe Argumentieren und Beweisen.

Icon: © DZLM

Dieser Gedankengang wäre ein Beispiel für eine Argumentation, die auf den Teilerbegriff und dessen Definition zurückgreift. Allerdings wird hier deutlich, dass die Ansprüche natürlich auch entsprechend der Heterogenität der Lernenden bzw. der Klassenstufen skaliert werden müssen.

Beim Bestimmen der Primfaktorzerlegung bedarf es einer eher einfachen Überlegung, wohingegen die Absicherung dafür, dass in Teilaufgabe b) alle Teiler gefunden wurden bzw. in Teilaufgabe c) diejenige Zahl kleiner 10 000 mit den meisten Teilern ermittelt wurde, deutlich anspruchsvoller ist: Während z. B. wie oben bereits beschrieben für die Schwächeren die Argumentation für einen Komplementärteiler als ein Lernziel angesetzt werden kann, wäre das (in der gleichen Klasse) für die Starken sicherlich zu wenig herausfordernd – hier sollte man in jedem Fall die Argumentation für das *Finden aller Teiler* als Lernziel anvisieren (z. B. über die Kombination der Primfaktoren).

Lernpfad konzipieren – beim Lernstand beginnen

Eine Argumentations- und Begründungskultur kann nur sukzessive und über einen längeren Zeitraum hinweg aufgebaut werden und kommt idealerweise als Leitkonzept in unterschiedlichen Ausprägungen in verschiedenen Inhaltsbereichen zum Einsatz (vgl. mathematik lehren 218 Langfristiger Kompetenzaufbau).

Es ist hilfreich, Lernpfade so zu konzipieren, dass die Lernenden die Möglichkeit erhalten, zunächst selbst erste Vermutungen zu formulieren, um diese dann unter Verwendung mathematischer Sachverhalte schlüssig zu begründen und anschließend in argumentativer Auseinandersetzung im Klassenzimmer reflektieren bzw. validieren. Ein solches *strukturiertes Gespräch über Mathematik* führt dazu, erste eigene Gedanken auszudrücken, zu argumentieren und gleichzeitig die Herangehensweisen anderer nachzuvollziehen. Dieses Gespräch ist insbesondere zu Aufgabenteil a) (Primfaktorzerlegung) möglich.

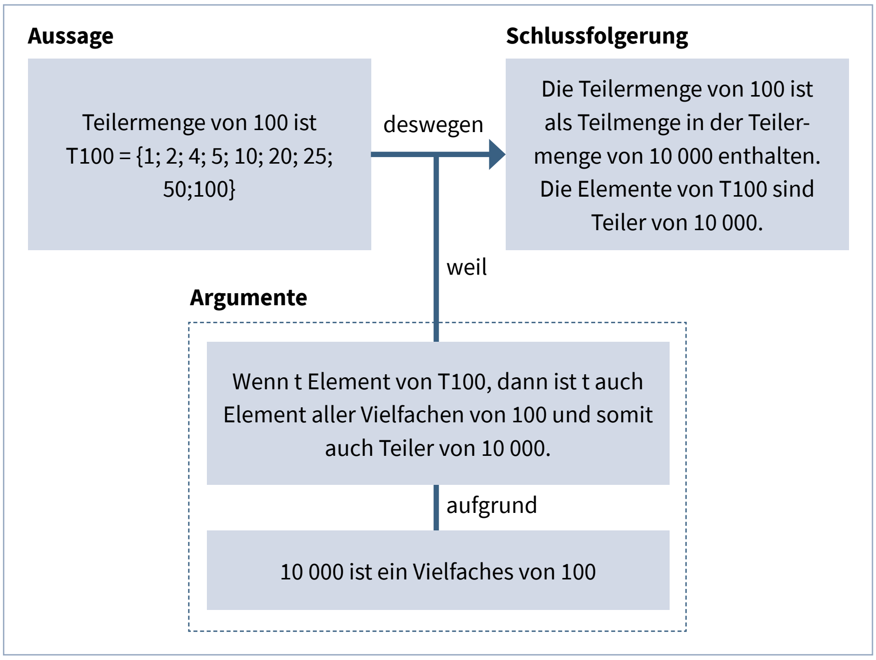

Abb. 2: Argumentationsschema nach Toulmin am Beispiel der Teileraufgabe (zwei Begründungs-Stufen)

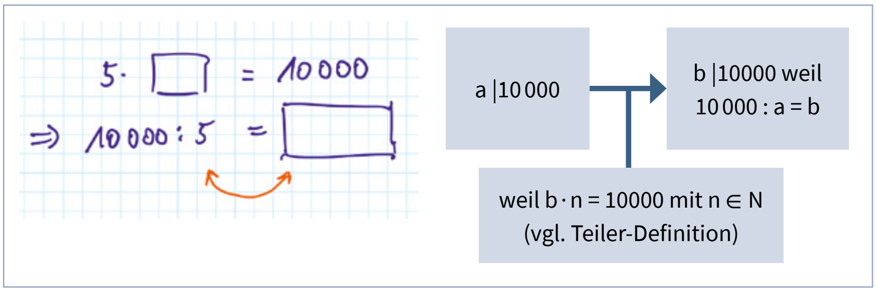

Abb. 3: Ansatz zum Finden der Teiler von 10 000 mit dazugehörigem Argumentationsschema nach Toulmin.

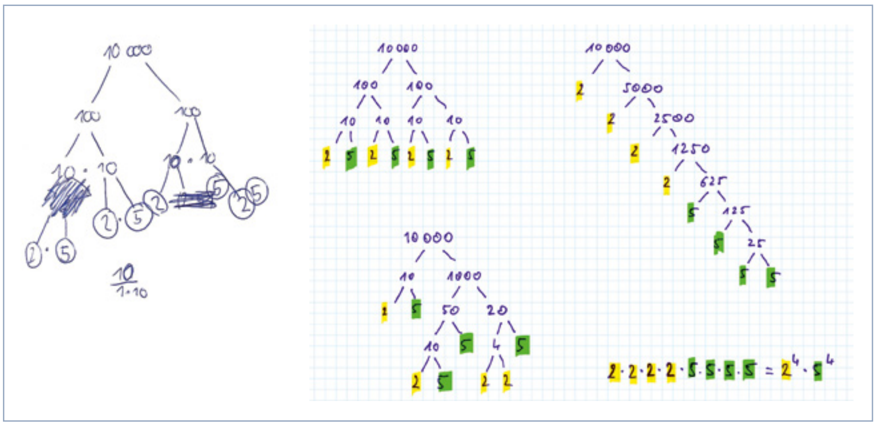

Abb. 4: Darstellung mit Hilfe von Zerlegungsbäumen

Bearbeitungswege

Aufgabenteil a): Es kann bereits bei der Suche nach den Primfaktoren verschieden vorgegangen werden. Die Unterschiedlichkeit der Herangehensweisen bietet einen ersten Argumentationsanlass: Ist die Reihenfolge, wie man vorgeht, um auf die Primfaktorzerlegung zu gelangen, von Bedeutung? Oder anders gefragt: Kommt man immer zur selben Primfaktorzerlegung? Warum ist das so? Die Lernprodukte in **Abb. 4**

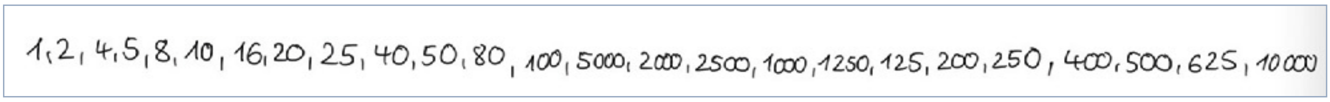

Abb. 5: Teiler der Zahl 10 000 suchen

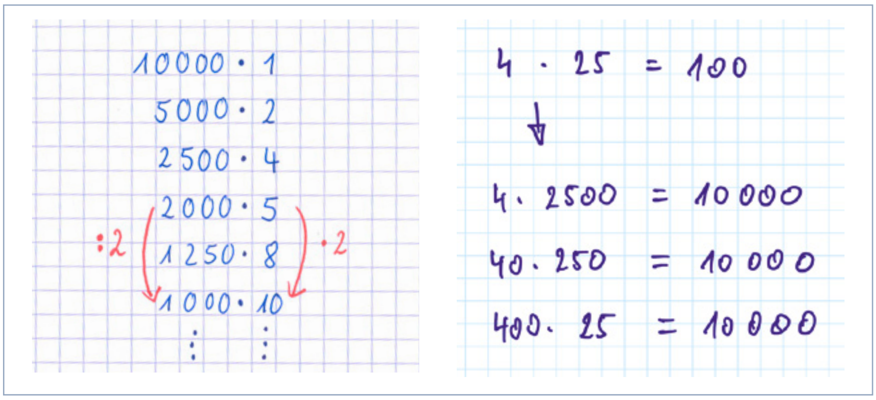

Abb. 6: Nutzen geschickter Notationen für das Finden von Teilern

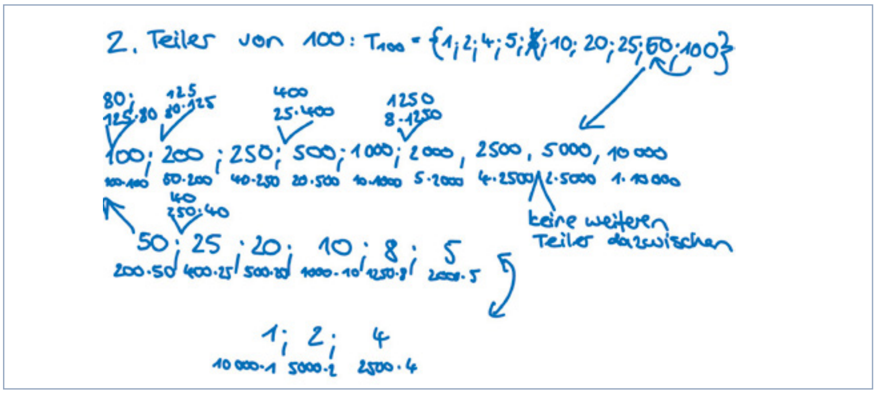

Abb. 7: Lösung mit Lücken

zeigen die unterschiedlichen Vorgehensweisen. Allein aufgrund der bildlichen Darstellung kann schon argumentiert werden: An den Enden stehen immer dieselben Zahlen in derselben Vielfachheit. Daher spielt die Reihenfolge hier keine Rolle. Ebenso kann auch „rückwärts“ argumentiert werden: Betrachtet man das Produkt aller Primfaktoren und wendet das Kommutativgesetz an, zeigt sich, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Aufgabenteil b): Die **Abb. 5** zeigt ein typisches Vorgehen bei der Suche nach Teilern: Zunächst wird klein angefangen und probiert. Dabei fällt auf, dass nicht jeweils Paare notiert werden, die zusammenpassen, wie etwa 2 und 5 000 bzw. 4 und 2 500. Die Komplementärteiler werden erst später sukzessive erkannt und ergänzt. Beim Lernprodukt in **Abb. 5** kommt der Lernende erst nach der Zahl 5 000 zu der Erkenntnis, dass es zu den bereits gefundenen Teilern immer noch einen weiteren Teiler geben muss. Dieses intuitive Vorgehen „von klein nach groß“ stößt spätestens nach der 5 000 an Grenzen. Das ist die Stelle, an der erkannt wird, dass es zu den bereits gefundenen Teilern immer noch einen weiteren Teiler geben muss. Mit dieser Erkenntnis kann nun systematisch weitergesucht werden. Ausgehend davon, dass die 2 als Teiler gefunden wurde und damit auch die 5 000, kann durch das Prinzip „verdoppeln und halbieren“ auf die beiden Teiler 4 und 2 500 geschlossen werden.

Diese Stelle eignet sich zum Argumentieren und kann mit der ganz einfachen Frage: „Warum funktioniert dieses Vorgehen?“ und dem Zurückgreifen auf die Produktregel (z. B. $10\,000 = 2 \cdot 5\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 5\,000 : 2$) hervorgehoben werden. Auch eine geschickte Notation hilft hierbei (vgl. **Abb. 6**). Analog können auch die Überlegungen zur Verschiebung der Zehnerpotenz genutzt werden: Hier wurde zunächst von der einfacheren Überlegung mit der Zahl 100 ausgegangen und dann auf die Zahl 10 000 übertragen ($100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \rightarrow 10\,000 = 100 \cdot 100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$). Solche Stellen sollten genutzt werden, um von den Lernenden eine Begründung für ihr Vorgehen einzufordern: „Kannst du mir erklären, warum das funktioniert?“ Mit diesen Ansätzen lassen sich

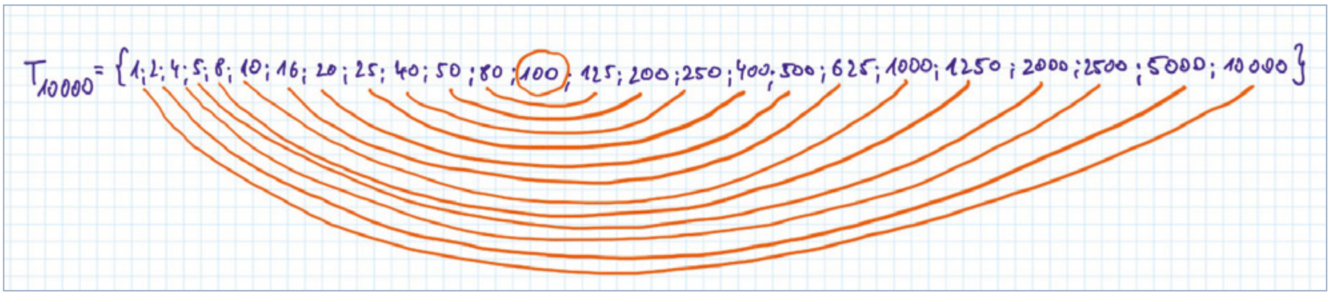

Abb. 8: Grafische Darstellung zur argumentativen Stützung des Ergebnisses

Abb. 5, 6, 7, 8: © DZLM

sicherlich einige Teiler finden – aber auch alle? Wohl eher nicht. Dass es immer noch Lücken gibt, die leicht übersehen werden können, zeigt etwa die Bearbeitung in **Abb. 7**.

Am nachträglichen Auffüllen zeigt sich, dass es immer noch eine Stelle gibt, an der etwas entdeckt wurde. Auch wenn zunächst von der vereinfachten Aufgabe mit der Zahl 100 ausgegangen wurde, so fehlt hier doch ein systematisches Vorgehen, um auch alle Teiler von 10 000 zu finden. Die Komplementärteiler-Idee ist sicherlich sinnvoll und führt auch zu der Erkenntnis, dass es eine ungerade Anzahl an Teilern geben muss, weil die 10 000 eine Quadratzahl ist – auch das ist eine schöne Stelle, um zu argumentieren! Mit einer grafischen Darstellung (vgl. **Abb. 8**) lässt sich das auch argumentativ stützen.

Für die Unterrichtsplanung ist es hilfreich, sich genau zu überlegen, wie die Lernenden am Übergang von individuellen und intuitiven Vorgehensweisen zum strategischen Arbeiten unterstützt werden können. Die hier dargelegten Überlegungen und grafischen Darstellungen können als Impulse gegeben werden.

Lernprozesse fördern – Systematisierungsphasen nutzen

Inhaltlich ist es sicherlich notwendig, einzelne Impulse so zu setzen, dass damit auch eine substanzielle Begründung dafür erfolgen kann, wie man *alle* Teiler findet. Dazu ist eine systematische Auflistung der Primfaktor-Kombinationen hilfreich. Da die Lernenden in der Regel von den Teilern ausgehen und nicht von den Primfaktoren, könnte das so aussehen wie in **Abb. 9**. In der rechten Darstellung sind zeilenweise immer die Komplementärteiler dargestellt. Dabei wurden die Primfaktoren, die in der linken Spalte „noch nicht verbraucht wurden" in der rechten Spalte (zeilenweise) immer „aufgefüllt". In der linken Bearbeitung sieht man alle Teiler systematisch durch die Potenzen der Primfaktoren dargestellt. Das Dokument rechts unten zeigt die Darstellung der Zahl 10 000 als Primfaktorzerlegung, welche die Möglichkeit bietet alle Komplementärteiler durch Kombinationen der Primfaktoren zu finden. Die systematische Auflistung in **Abb. 10** führt schließlich dazu, alle Teiler zu identifizieren. Hier kann leicht erkannt werden, dass es 5 × 5 = 25 Teiler gibt. Die Exponenten werden also „um eins erhöht" und miteinander multipliziert. Die „Erhöhung um eins" kommt daher, dass auch „hoch null" möglich ist.

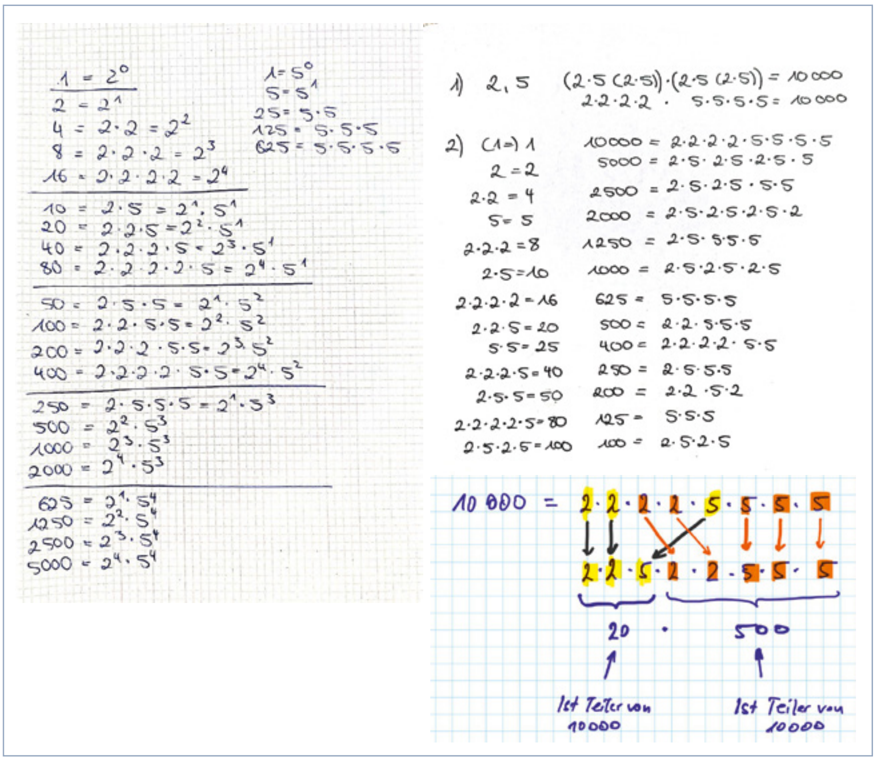

Abb. 9: Systematische Auflistung der Teiler von 10 000

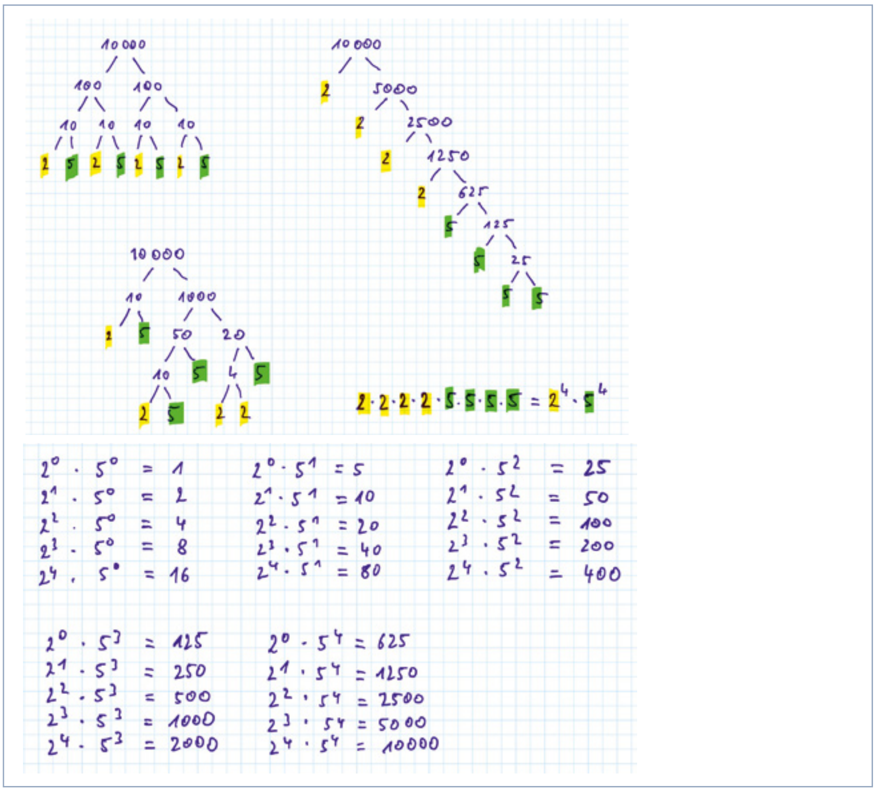

Abb. 10: Finale systematische Auflistung nach den zwei Aspekten der Aufgabe

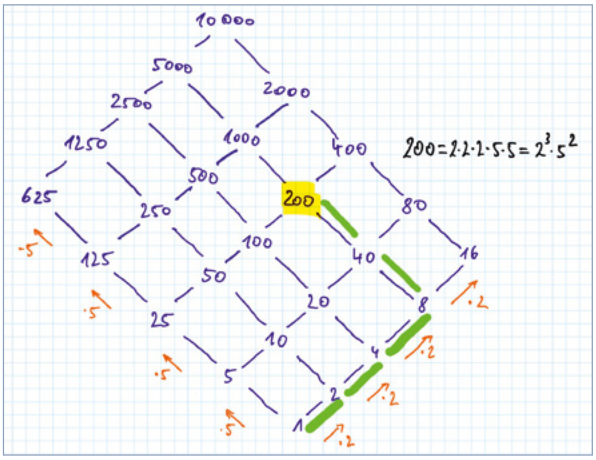

Abb. 11: Darstellung mit Hilfe eines Hasse-Diagramms

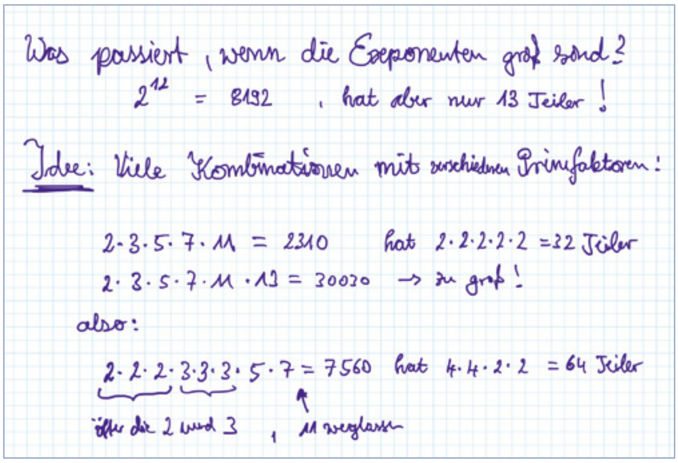

Abb. 13: Suche nach einer Zahl mit möglichst vielen Teilern

Eine für die Schule sicherlich nicht vertraute Darstellung ist die des Hasse-Diagramms, weshalb dieses sicherlich durch die Lehrkraft angeregt werden müsste (vgl. **Abb. 11**). Hier könnte z. B. der Anfang ausgehend von der 1 in die beiden Richtungen „mal 2“ und „mal 5“ vorgegeben werden (oder es wird das komplette Diagramm gezeigt und die Lernenden können daran entdecken, wie hiermit die Teileranzahl bestimmt werden kann).

Schlussendlich sollte zur abschließenden Beantwortung der Frage nach der Anzahl der Teiler von 10 000 auf die beiden Teilaspekte der Aufgabe eingegangen werden und dann kombinatorisch argumentiert werden: Da 10 000 als $2^4 \cdot 5^4$ dargestellt werden kann, ergibt sich die Menge aller Teiler durch die 25 Kombinationsmöglichkeiten der 2-er- und 5-er Potenzen (jeweils 5 Möglichkeiten). **Abb. 12** zeigt verschiedene visuelle Darstellungsmöglichkeiten für diesen Gedankengang.

Aufgabenteil c) (Welche Zahl unter 10 000 hat die meisten Teiler?) kann nun mit dem Gedanken der Kombinatorik gelöst werden: Es kommt ja darauf an, möglichst viele Kombinationsmöglichkeiten zu generieren. Dabei kann einerseits die Anzahl Primfaktoren, andererseits können die Exponenten erhöht werden. Hierzu zeigt **Abb. 13**, wie die Lernenden das ausprobieren – gerade durch Extremfälle wie „nur einen Faktor wählen“ wird deutlich, dass es eher wenige Teiler gibt. Werden hingegen mehrere Primfaktoren gewählt, gibt es mehr Teiler; allerdings wird dann die Zahl auch schnell zu groß – das kann nun ausgelotet werden, wie die Bearbeitung in **Abb. 13** zeigt.

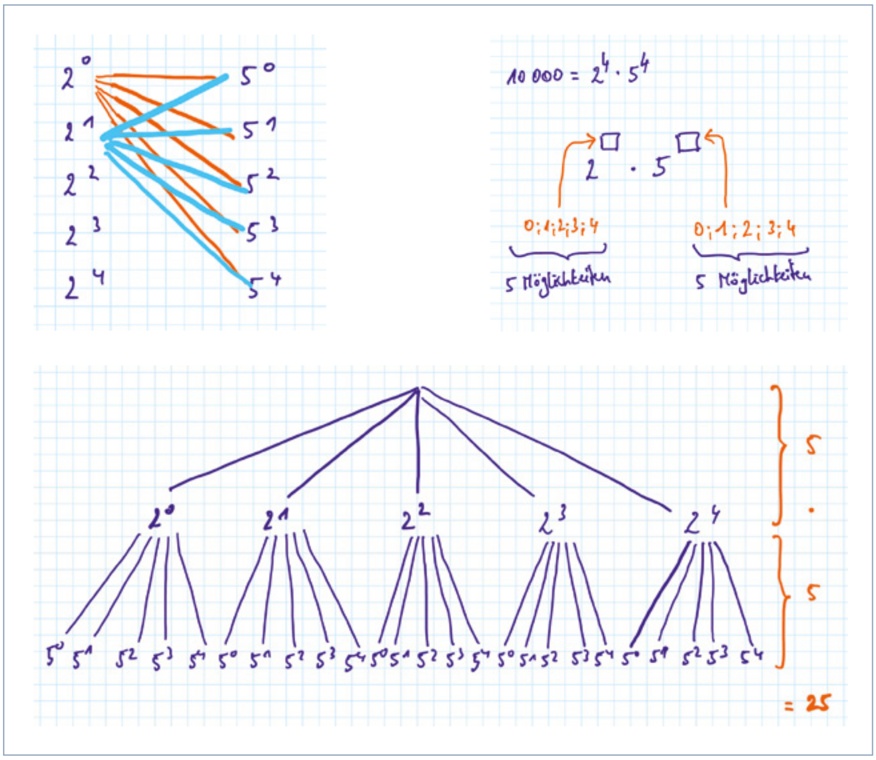

Abb. 12: Visuelle Darstellung der Argumentation für den kombinatorischen Ansatz

Verstehensförderliche Gespräche mit allen moderieren

Eine große Herausforderung besteht darin, die Schülerinnen und Schüler untereinander zur Kommunikation anzuregen. Hierfür ist es sinnvoll, die Aufgabenbearbeitung nach dem Think-Pair-Share-Prinzip zu beginnen, da nach der Think-Phase in aller Regel unterschiedliche Teilergebnisse vorliegen, die dann für den Dialog in der Pair-Phase einen hohen Aufforderungscharakter haben. Für die Lehrkraft ist diese Phase enorm wichtig, denn hier können die für den späteren Diskurs im Plenum wichtigen Ansätze der Lernenden identifiziert werden. Konkret heißt das, dass die einzelnen Ansätze der Lernenden beobachtet werden und überlegt wird, welche sich eignen, um Diskussionen anzuregen (Holzäpfel 2023). Kriterien für die Auswahl einzelner Ansätze wären u. a.:

- möglichst kontrastierende Ansätze wählen, die dann in Beziehung zueinander gesetzt werden können (z. B. verschiedene Vorgehensweisen bei der Primfaktorzerlegung)
- typische oder auch systematische Fehler finden, die in Kontrast mit richtigen Lösungen abgeglichen werden; Gründe für die Fehler können überlegt und diskutiert werden
- unvollständige Lösungen darbieten und nicht gleich die richtige und vollständige Lösung einbringen, (z. B. werden nur die Exponenten 1, 2, 3 und 4 berücksichtigt und dabei die „hoch 0" vergessen, hier könnte gefragt werden, wie der Teiler 5 dann dargestellt wäre)
- unklare, unvollständige oder auch falsche Äußerungen oder Behauptungen aufgreifen und durch geschicktes Re-Formulieren pointieren bzw. verstärken (z. B. „Es muss doch immer eine gerade Anzahl an Teilern sein").

Um die Lernenden in Diskurs zu bringen, bietet sich die Gesprächstechnik des „Revoicing" an (O'Connor/Michaels 1996; Forman u. a. 1998). Im Unterschied zum „Lehrerecho", bei dem die Lehrkraft Aussagen von Lernenden wiederholt, geht es beim „Revoicing", bei dem die Lehrkraft oder Lernende die Aussagen der Lernenden in eigenen Worten sinngemäß wiederholen, darum, ...

- Gedankengänge von Lernenden (noch einmal) zu explizieren
- Aussagen durch Wiederholung zu verstärken
- eine Positionierung vorzunehmen: Lernende herauszufordern, sich zu ihrer eigenen Aussage zu äußern – d. h., etwas ablehnen oder bekräftigen zu lassen
- widersprüchliche Aussagen in Beziehung zu setzen, Unstimmigkeiten hervorzuheben.

Um Diskurse im Klassenzimmer erfolgreich zu führen, können folgende Vorgehensweisen unterstützen:

- Wahl geeigneter Medien (z. B. Plakate, Padlets, Tafel) zur Kommunikationsunterstützung, z. B. um Aussagen zu sammeln und zu strukturieren oder grafische Darstellungen sichtbar zu machen (z. B. die verschiedenen Baumdarstellungen bei der Primfaktorzerlegung oder das Hasse-Diagramm)
- Verwenden geeigneter Darstellungen (wie z. B. das Hasse-Diagramm oder die Baumdarstellung), um besser über die relevanten Dinge (etwa Vernetzung der genutzten Darstellungen) sprechen zu können
- sprachliche Unterstützung, um auch schwierige Überlegungen (präzise) ausdrücken zu können
- Lernstände identifizieren und (individuell) passende Anforderungen stellen bzw. auch die Einbindung möglichst aller Lernenden: Dazu gehört auch, zueinander passende Ansätze aufeinander zu beziehen – d. h. zu wissen, welche Schülerinnen und Schüler an diesen Stellen aufgerufen werden sollten
- unterschiedliche Lösungen bzw. Fehler nutzen und diese gezielt adressieren – mit dem Ziel, kognitive Konflikte zu erzeugen bzw. aufzulösen
- immer wieder geeignete Fragen stellen wie z. B.
  „(Warum) Ist das so?",
  „(Wie) Kannst du dir sicher sein?",
  „(Wie) Kannst du das erklären?".

Wesentlich ist es, den Dialog möglichst zwischen den Lernenden anzuregen. Hierzu ist es hilfreich, sich als Lehrkraft mit inhaltlichen Äußerungen weitestgehend zurückzuhalten und die Überlegungen und Fragen immer wieder in die Klasse zurückzuspielen.

Insgesamt geht es bei der hier vorgestellten Unterrichtsidee nicht so sehr darum, dass alle Lernenden die Aufgaben vollständig lösen, sondern vielmehr darum, das Argumentieren zu üben, also Gesprächs-/Denkmomente zu identifizieren, die Argumentationsmöglichkeiten darstellen, und die Lernenden dabei zu unterstützen, diese mit eigenen Argumentationen zu füllen.

Foto: Lars Holzäpfel

Literatur

Bardy, T./Holzäpfel, L./Leuders, T. (2021): Adaptive Tasks as a Differentiation Strategy in the Mathematics Classroom: Features from Research and Teachers' Views. – In: Mathematics Teacher Education and Development 23(3), S. 26 – 53.

Biehler, R./Kempen, L. (2016): Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 1(37), S. 141 – 179.

Brunner, E. (2014): Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Springer Berlin Heidelberg.

Forman, E. A./Larreamendy-Joerns, J./Stein, M. K./Brown, C. A. (1998): "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. – In: Learning and instruction, 8(6), S. 527 – 548.

Holzäpfel, L. (2023): Kommunikationsförderung durch Think–Pair–Share? Auf die Aufgabe kommt es an! – In: mathematik lehren 238, S. 17 – 20.

Holzäpfel, L./Lacher, M./Leuders, T./Rott, B. (2018): Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken. Klett Kallmeyer.

Krummheuer, G. (2003): Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35, S. 247 – 256.

Meyer, M./Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. – In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(30), S. 1 – 7.

Reiss, K. (2002): Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. – In: Projektserver SINUS. Bayreuth: Universität.

Toulmin, S. E. (1996): Der Gebrauch von Argumenten (2. Aufl.). Weinheim, Beltz.

D **Differenzierung auf den Punkt gebracht**

Aspekte der Heterogenität:
- Argumentationsfähigkeit und strukturiertes Vorgehen beim Problemlösen

Methode:
- dialogorientierte Moderation

Praxistipp:
Planen Sie genügend Zeit für den Austausch und bringen Sie Lösungsbeispiele bei Bedarf gezielt in die Diskussion ein.