

FLORIAN SCHACHT, FLORIAN BASTKOWSKI, PAUL TYRICHTER

„Eigentlich wie eine Welle!“

Differenzierende Wege zur Sinusfunktion

LERNGRUPPE: 8. – 13. Schuljahr

IDEE: Beim voraussetzungsreichen Thema der Sinusfunktion werden Verstehensgrundlagen der Trigonometrie sowie linearer und periodischer Funktionen gezielt aufgegriffen und es wird darüber explizit gesprochen

PRINZIPIEN: Lernendenorientierung & Adaptivität, Kommunikationsförderung



VORWISSEN: lineare und quadratische Funktionen, geometrische Beziehungen

ARBEITSBLATT: Erarbeiten der Sinusfunktion

WEITERES MATERIAL: Impulsfragen und Verlaufsplan dynamische Visualisierung

ZEITBEDARF: 2 Unterrichtsstunden (90 min plus Übungszeit)

Die Sinusfunktion ist eine bedeutsame mathematische Funktion, mit der sich periodische Vorgänge der Natur beschreiben lassen und die in der mathematischen und physikalischen Praxis eine wichtige Rolle spielt. Für den Mathematikunterricht ist die Sinusfunktion ein lohnenswerter, allerdings auch

sehr komplexer Lerngegenstand (Hefendehl-Hebeker, 2002).

Die *Sinusfunktion* – schon der Begriff verknüpft ein geometrisches Konzept (den Sinus) mit einem funktionalen Zusammenhang. Für Lernende ergeben sich hier häufig Herausforderungen: Periodische Vorgänge thematisieren sie im Zusammenhang mit der Sinusfunktion zum ersten Mal im Mathematikunterricht, hierzu müssen dann sowohl trigonometrische als auch funktionale Verstehensgrundlagen herangezogen werden, um die trigonometrischen Beziehungen im Kontext funktionaler Veränderungsprozesse zu deuten (**Abb.1**).

Den Unterricht planen

Annäherungen Lernender an die Sinusfunktion beobachten



Im folgenden Ausschnitt diskutieren die Schülerinnen Lea und Mira über die Riesenrad-Aufgabe in **Abb.2**. Bei der Aufgabe soll unter anderem der Graph der Zeit-Höhe-Funktion hergeleitet und gezeichnet werden.

Lea: Ist das jetzt so ein Graph [*deutet mit dem Bleistift eine proportionale Funktion an*] oder ein Halbkreis?

Mira: Eigentlich muss es ja eine Parabel sein.

Lea: Eigentlich muss es ja so eine Welle sein [*zeigt mit dem Stift annähernd den Verlauf der Sinusfunktion*].

Mira: Es geht erst nach oben, dann ist es oben, dann nach ganz unten zum Boden und dann wieder nach oben.

Lea: Wir hatten aber noch nie zwei Bögen!

Mira: Wenn die Gondel weiterfahren würde, wäre sie sogar noch mehrmals rauf und runter mit mehr Bögen.

Lea: Es wiederholt sich immer hoch und runter.

Mira: Es würde immer weiter so gehen [*deutet mit der Hand einen Wellenverlauf an*].

Diese kurze Sequenz verdeutlicht das komplexe begriffliche Gefüge, in dem sich Lernende den neuen periodischen Vorgängen annähern. Wie viele Jugendliche nehmen sie zunächst an, dass der Zusammenhang linear ist. Dieses Phänomen wird als *Illusion of Linearity* bezeichnet (De Bock u. a. 2007). Lea fragt direkt zu Beginn der Sequenz, ob es sich um einen Graphen handelt (damit meint sie einen linearen Zusammenhang) oder um einen Halbkreis – Letzteres verstanden als Objekt einer geometrischen Domäne, der für sie kaum mit Funktionen verknüpft ist. Außerdem verdeutlicht das Transkript das Zusammenspiel von dynamischer Betrachtung (Grundvorstellung der Kovariation) und statischer Betrachtung (Grundvorstellung der Zuordnung).

Sehr wohl bekannt ist ihnen hingegen der Umgang mit quadratischen Funktionen, daher wirft Mira ein, dass die Form des entstehenden Funktionsgraphen die einer Parabel sei. Lea entwickelt den Gedanken mit Blick auf den periodischen Vorgang weiter und merkt an, dass es sich aufgrund der Drehung des Riesenrads um eine Welle handeln müsste. Solche periodischen Betrachtungen im Mathematikunterricht sind den Lernenden in der Regel neu – und Lea merkt an, dass sie bei einer Funktion „*aber noch nie zwei Bögen*“ gesehen habe – was Mira mit Blick auf

den Kontext plausibel herleiten und sogar fortsetzen kann: „Wenn die Gondel weiterfahren würde, wäre sie sogar noch mehrmals rauf und runter mit mehr Bögen.“

Dieser kurze Ausschnitt zeigt ein typisches Zusammenspiel von Faktoren, die bedeutsam für den Lernprozess sind:

Verstehensgrundlagen

Die Lernenden knüpfen in der obigen Szene an ihr Alltagswissen, ihr Vorwissen zu linearen und quadratischen Funktionen sowie zu geometrischen Beziehungen an und müssen diese mit den Anforderungen des neuen Kontextes in Beziehung setzen. Doch welche Verstehensgrundlagen sind für das Erlernen der Sinusfunktion besonders wichtig und sollten – entweder bei leistungsschwächeren oder gerade bei leistungstärkeren Lernenden – noch einmal bewusst thematisiert werden?

Sprache

Die beiden Lernenden kommunizieren sehr erfolgreich und entwickeln ihre Ideen gemeinsam weiter. Andere brauchen dafür mehr Unterstützung. Mit selbst gewählten Begriffen drücken Lea und Mira jeweils – in verdichteter und durchaus kreativer Form – spezifische begriffliche Zusammenhänge aus. „So ein Graph“ [begleitet mit Geste der Geradlinigkeit] meint bei ihnen eine proportionale Funktion, *Halbkreis* bezieht sich auf den Verlauf der Gondel, *Parabel* knüpft an bekannte Funktionen an und *Welle* deutet die Periodizität des betrachteten Vorgangs an. Wie geht man im Unterricht mit solchen Begriffen um, die die Lernenden nutzen und die für das Verstehen des neuen Zusammenhangs von großer Bedeutung sind?

Dieser Beitrag zeigt, auf welche Verstehensgrundlagen die Lernenden aufbauen (müssen), um sich die Sinusfunktion zu erschließen, und welche Rolle gerade die Sprache dabei spielt. So werden einerseits Möglichkeiten bereitgestellt, die *Kommunikation* zu fördern, andererseits *adaptiv* an die jeweiligen individuellen Lernvoraussetzungen anzuknüpfen.

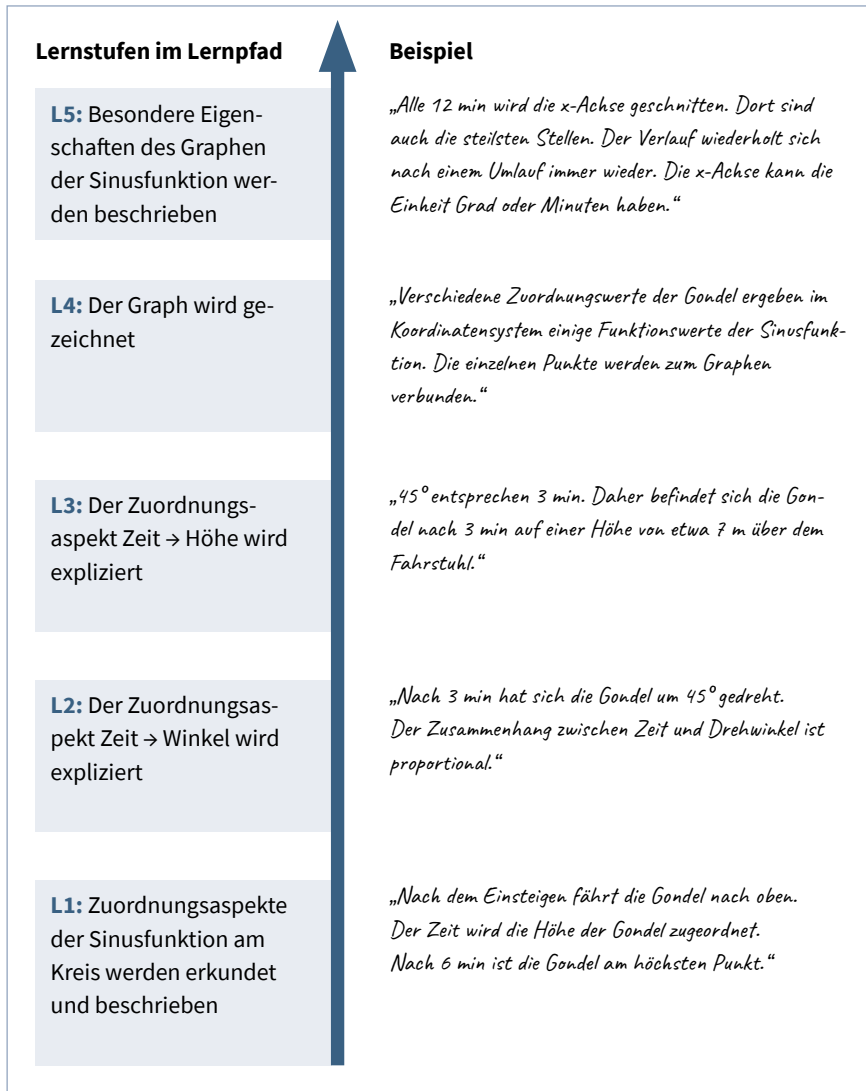


Abb. 1: Lernpfad zur Thematisierung der Sinusfunktion

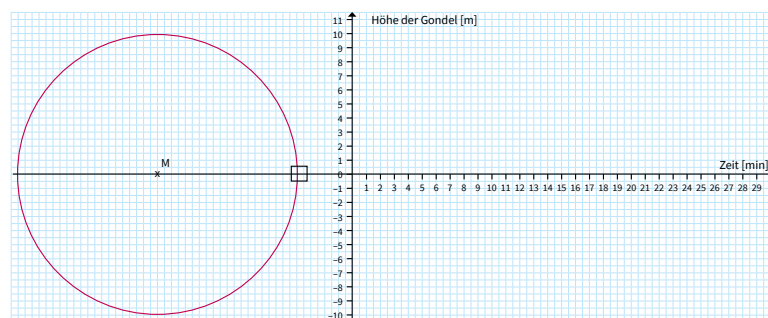
Vom Riesenrad zur Sinusfunktion

Situation:

Das Riesenrad dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn mit einer konstanten Geschwindigkeit. Man kann während der Fahrt in die Gondeln steigen und diese verlassen, ohne dass die Gondel dabei hält. Das Riesenrad benötigt für eine vollständige Umdrehung 24 Minuten. Zum Zeitpunkt 0 Min. steigt man in die eingezeichnete Gondel ein.

Frage:

Wie hoch ist die Gondel nach x Minuten? Zeichne diese Zuordnung in das Koordinatensystem.



→ *Tipp:* Markiere im Riesenrad verschiedene Stellen für die Gondel. Zu welchem Zeitpunkt befindet sich die Gondel dort jeweils? Wie hoch ist sie?

Abb. 2: Riesenrad-Aufgabe zur Erarbeitung periodischer Vorgänge (vgl. Hußmann u. a., 2017)

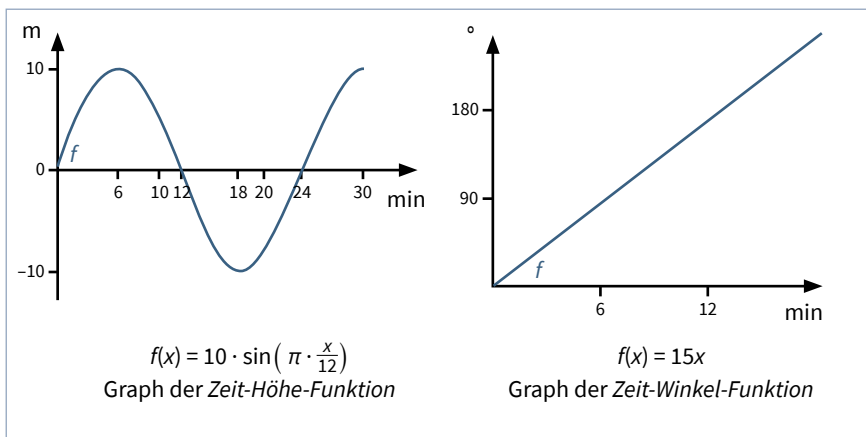


Abb. 3: Periodischer (links) und proportionaler (rechts) funktionaler Zusammenhang im Kontext der Riesenrad-Aufgabe

Lernziele entlang des Lernpfads setzen

Unterschiedliche funktionale Zusammenhänge verknüpfen

Der in Abb. 1 dargestellte exemplarische Lernpfad greift eine unterrichtliche Thematisierung im Sinne von fünf aufeinander aufbauenden Lernstufen auf. Auf der grundlegenden Lernstufe L1 geht es zunächst darum, die Sinusfunktion unter dem besonderen Fokus des Zuordnungsaspektes zu erkunden. Auf der Grundlage einer Auseinandersetzung mit dem proportionalen

Zuordnungsaspekt Zeit \rightarrow Winkel (L2) und der Zuordnung Zeit \rightarrow Höhe (L3) kann der grobe Verlauf erschlossen und anschließend exakt gezeichnet werden (L4). Auf dieser Basis kann dann die Beschreibung der besonderen Eigenschaften vorgenommen werden (L5).

Die Aufgabe in Abb. 2 adressiert mit der Gondelfahrt einen periodischen Zusammenhang, den sich die Lernenden im Rahmen der Unterrichtssequenz erschließen. In einem ersten Schritt soll dazu in einem Koordinatensystem

eingezeichnet werden, auf welcher Höhe sich die betrachtete Gondel jeweils zum Zeitpunkt t befindet (Zeit-Höhe-Funktion). Wichtig ist hierbei, dass die x -Achse als Horizontlinie gedeutet wird – das heißt, die negativen y -Werte stellen die orientierte Höhe der Gondel in Abhängigkeit von der Einsteighöhe dar. Der periodische funktionale Zusammenhang führt aus mathematischer Sicht direkt zur Sinusfunktion (Abb. 3 links).

Im Erarbeitungsprozess selbst spielt noch ein zweiter funktionaler Zusammenhang eine wichtige Rolle. In der Regel betrachten die Lernenden zunächst markante Punkte, an denen sich die Gondel befindet: zu Beginn der Fahrt auf Höhe 0 m , nach einer Vierteldrehung (entspricht 90°) und 6 min auf Höhe 10 m , nach einer halben Drehung (entspricht 180°) und 12 min auf Höhe 0 m , nach einer Dreivierteldrehung (entspricht 270°) und 18 min auf Höhe -10 m usw. Im weiteren Verlauf können die betrachteten Zeitpunkte dann zunehmend verfeinert werden.

Im Unterricht wird dieser funktionale Zusammenhang häufig nicht explizit angesprochen, wengleich er

MatheWelt: Alles Anteile oder was?



Der Weg von Anteilen zur Exponentialfunktion

Lerngruppe: 9. – 10. Schuljahr

Gegen Ende der Mittelstufe zeigt unsere Rückschau auf die Zusammenhänge verschiedener Themengebiete über die Schuljahre hinweg den Lernfortschritt und die roten Fäden.

Die Lernenden erkennen dabei die gemeinsame Kernidee: „Mit

einem Faktor kann man Dinge vergrößern bzw. verkleinern.“ Diese ist für das Verständnis von mehrjähriger Verzinsung (Zinseszins) oder von Exponentialfunktionen grundlegend, da hier die Veränderung mehrfach hintereinander ausgeführt wird.

Der sukzessive Aufbau einer durchgängig genutzten Visualisierung zunächst als Anteils- bzw. Bruchstreifen, später als Prozentstreifen und dann die Betrachtung wachsender

Säulen bei der Exponentialfunktion soll Kohärenz stiften und verstehendes Lernen ermöglichen.

Die Aufgaben in dieser MatheWelt vertiefen noch einmal die einzelnen Themenfelder, die hier zusammenkommen, und fördern damit den Blick für die Zusammenhänge.

Zunächst können die Lernenden anhand einer komplexeren Aufgabe aus Klasse 9/10 ihr Wissen einschätzen, und dann aus einem Aufgabenpool für sie passende bearbeiten. Diese thematisieren verschiedene Inhalte vergangener Schuljahre und tragen so zur Kompensation von Wissenslücken bei. Wichtig ist, individuelle Lernziele zu setzen; das geschieht im Selbst-Check durch die Aufgaben A-E. Dann gilt es, die Lernenden basierend auf den Ergebnissen des Selbst-Checks adaptiv bei ihren Lernprozessen zu unterstützen und zu fördern.

Die MatheWelt bietet Material, das sich an den Prinzipien der Verstehensorientierung, Durchgängigkeit und auch kognitiven Aktivierung orientiert und dabei die Planungsaufgabe Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren konkretisiert.

Viel Erfolg beim Einsatz im Unterricht!

Birte Pöhler, Lars Holzäpfel

für das Verstehen und den Begriffsbildungsprozess von besonderer Bedeutung ist: Betrachtet wird oft zunächst die *Zeit-Winkel-Funktion*, die die Drehung angibt, die die Gondel zum entsprechenden Zeitpunkt zurückgelegt hat. Im Unterschied zur *Zeit-Höhe-Funktion* ist die *Zeit-Winkel-Funktion* proportional, das heißt, der Winkel ändert sich proportional zur Zeit (s. **Abb. 3** rechts).

Im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen ist die entscheidende Verstehensgrundlage, zunächst die zwei Größen zu explizieren (vgl. Lernstufen L2 und L3 in **Abb. 1**), die zueinander in Beziehung gesetzt werden (Zindel u. a. 2018). Ohne eine Klärung der zwei beteiligten Größen wird die Sinusfunktion nicht zu erarbeiten sein. Gibt es Lernen, die sich mit der Festlegung der zwei Größen als Verstehensgrundlage noch schwertun, so sollte man diese gezielt mit ihnen thematisieren. Dabei müssen zuerst die beiden voneinander abhängigen Größen identifiziert werden. Danach könnten einige zugehörige Werte in einer Tabelle aufgelistet werden. Zur Vertiefung könnten anschließend noch weiteren Darstellungsformen thematisiert werden.

Tab. 1 verdeutlicht beispielhaft Varianten, die *Zeit-Winkel-Funktion* im Unterricht zu thematisieren. Dabei ist es hilfreich, die unterschiedlichen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge miteinander in Beziehung zu setzen.

Die – exemplarische – Diskussion der Bedeutung der Größen und Darstellungsformen des proportionalen Zusammenhangs als Verstehensgrundlage für die Erarbeitung der Sinusfunktion wirft nun die Frage auf, welche Verstehensgrundlagen Lernende darüber hinaus im Kontext der Betrachtung periodischer Vorgänge im Mathematikunterricht benötigen bzw. worauf sie zurückgreifen (können). **Abb. 4** zeigt einige wichtige Grundlagen entlang der beiden Leitideen Raum und Form sowie Strukturen und funktionaler Zusammenhang (vgl. KMK, 2022) im Sinne der Durchgängigkeit. Die entsprechenden Leitideen und Inhalte sind als langfristig angelegte Lernpfade über die Unterrichtsreihen hinweg eng miteinander vernetzt.

Wertetabelle	Zeit in min	0	3	6	9	12	24
	Winkel in °	0	45	90	135	180	360
Alternative oder simultane Achsenbeschriftung	Die Abszisse des Koordinatensystems kann sowohl in Minuten als auch Grad (oder simultan in beidem) beschriftet werden. So wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Drehwinkel erkennbar.						
Im Kreis Zeiten und Winkel markieren							
Entsprechend der Position der Gondel auf dem Kreis können an ausgewählten Stellen die vergangenen Minuten notiert werden. So wird ein proportionaler Zusammenhang deutlich.							
Funktionsgleichung explizit angeben	Anhand der Wertetabelle kann die Gleichung $y = 15 \cdot x$ hergeleitet werden, wobei x die vergangenen Minuten und y den Drehwinkel in Grad darstellen.						
Funktionsgraphen zeichnen	Mithilfe der Wertetabelle oder der Funktionsgleichung kann der proportionale Zusammenhang gemäß Abb. 3 rechts visualisiert werden.						

Tab. 1: Möglichkeiten der Problematisierung des proportionalen Zusammenhangs zwischen Zeit und Winkel als Verstehensgrundlage im Kontext der Sinusfunktion unter besonderer Berücksichtigung vielfältiger Darstellungen

Geometrisch wird der Sinus als das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck definiert. Darauf aufbauend findet die Trigonometrie wieder Verwendung bei der Bestimmung des Winkels zwischen Vektoren, der Berechnung von Längen in Dreiecken oder Flächeninhalten in Parallelogrammen sowie bei der Beschreibung von besonderen Kurven im Dreidimensionalen (z. B. Helix).

Auf der anderen Seite kann der Sinus auch funktional betrachtet werden (vgl. etwa Wittmann 1987, Leuders/Prediger, 2005). Dabei müssen die Trigonometrie im Dreieck und die Sinusfunktion nicht zwingend gleich zu Beginn im Unterricht verknüpft werden. Mit qualitativen Betrachtungen können Lernende auch ohne Vorkenntnisse über trigonometrische Beziehungen im Dreieck den Verlauf des Graphen der Sinusfunktion zeichnen.

Die in Klasse 6/7 thematisierten Zuordnungen zweier Größen werden hier

noch einmal für einen Verstehensprozess explizit thematisiert. Die Abgrenzung des proportionalen Zusammenhangs von Zeit (in *min*) und Position der Gondel im Rad (in °) zu dem periodischen Zusammenhang von Zeit (in *min*) und Höhe (in *m*) ist für viele ein relevantes Lernziel.

Die Kovariation zwischen der vergangenen Zeit (in *min*) und der

D Differenzierung auf den Punkt gebracht

Aspekte der Heterogenität:

- sprachliche Ausdrucksfähigkeit zwischen Alltags-, Bildungs- und Fachsprache

Methode:

- Darstellungswechsel erläutern lassen, Plenumsgespräche

Praxistipp:

Lassen Sie Elemente der Veränderung beschreiben, einzelne Stellen verändern, und Grundvorstellung der Funktion verbalisieren.

Leitidee
Raum & Form

Besondere Kurven (z. B. Helix)
Winkel zwischen Vektoren

Sinus im rechtwinkligen Dreieck

Ähnlichkeit
Strahlensätze

Kongruenz

Klassifizieren von Dreiecken

Kreis und Winkel
Koordinatensystem

Symmetrie
Zahlenstrahl

Leitidee Strukturen & Funktionaler Zusammenhang

Differenzial- und Integralrechnung
(auch an trigonometrischen Funktionen)

Manipulation trigonometrischer Funktionen
Sinusfunktion

Quadratische Funktionen

Lineare Funktionen
Qualitativer Umgang mit Graphen und Funktionen

Nutzung verschiedener Repräsentationen
(u. a. tabellarisch, algebraisch, graphisch, sprachlich)
(Proportionale) Zuordnungen

Muster und Strukturen

x	0	1	2	3	...
y	0	2	4	6	...

$f(x) = 2x$

$x \rightarrow y$
$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 4$
$3 \mapsto 6$
\vdots
$x \mapsto 2x$

Abb. 4: Verstehensgrundlagen im Kontext der Sinusfunktion

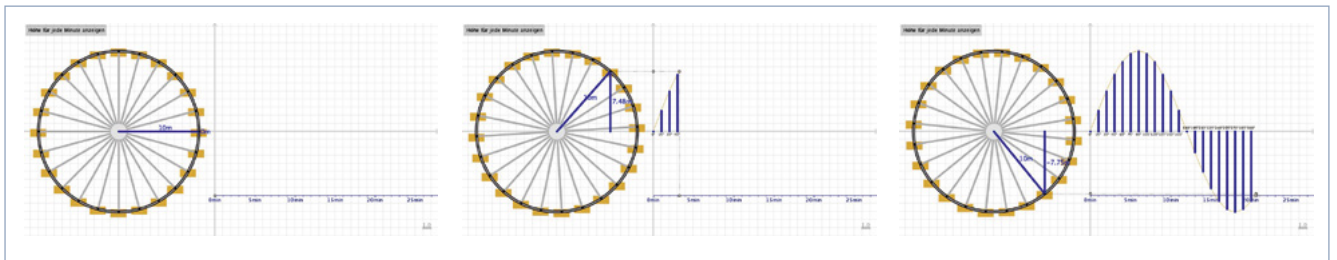


Abb. 5: Sequenz einer dynamischen Visualisierung

Gondelposition im Riesenrad (in $^\circ$) kann tabellarisch, in Form einer Gleichung, im Rahmen eines Graphen im Koordinatensystem, unmittelbar im Kreis oder sogar gemeinsam auf der Abszisse des Koordinatensystems dargestellt werden (s. Tab. 1). Um adaptiv mit heterogenen Verstehensgrundlagen der Lernenden umzugehen, wird die Aufgabe zunächst offen differenzierend gestellt, sodass einige Lernende sie ohne weitere Unterstützung bewältigen können. Andere erhalten je nach Verstehensprozess adaptiv weitere Unterstützung durch vielfältige Darstellungen.

Digitale Werkzeuge auswählen für differenzierende Zugänge



Mithilfe einer dynamischen Visualisierung kann die Aufgabe im zeitlichen Ablauf, interaktiv oder als kleiner Film, anschaulich dargestellt werden (s. Abb. 5). Eine dynamische Geometriesoftware (DGS) lässt sich, je nach Fokussierung, in allen Stufen des Lernpfads (s. Abb. 1) sinnvoll einsetzen.

Für den Einsatz einer DGS sind vor allem zwei Varianten denkbar. Die Übertragung der Höhen im Einheitskreis in ein Koordinatensystem (vgl. Lernstufe L4 in Abb. 1) gelingt

leistungsstärkeren Lernenden, wie in unserem Beispiel Mira und Lea, selbstständig. Dynamische Visualisierungen könnten für Mira und Lea zur Vertiefung des Verständnisses des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Zeit und der Höhe im Kreis verwendet werden, sodass die Visualisierung im Anschluss an eine intensive Auseinandersetzung mit der Thematik erfolgt, um bisherige Gedanken noch einmal zu reflektieren und zu ordnen.

Alternativ könnte eine DGS aber auch für leistungsschwächere Lernende zum Einstieg als „Black Box“

verwendet werden, um erste Erkenntnisse über den funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe im Kreis zu sammeln (vgl. Lernstufe L1 in **Abb. 1**) und Verstehensschritte vorzuentlasten. In dem Zusammenhang ist es für die zugrunde liegenden Verstehensprozesse und zur Differenzierung besonders wichtig, dass man die Größen abmisst und überträgt, zum Beispiel an der Tafel oder auf Papier.

Sprache und Lernprozesse unterstützen und fördern



So wie hier für das Beispiel der dynamischen Visualisierung vorgestellt, können die Lernprozesse von schwächeren Lernenden oft durch stärkere Vorstrukturierung der Aufgaben unterstützt werden. Dabei sollte allerdings das *Unterstützen* nicht nur zur richtig gelösten Aufgabe führen („Haben alle das Richtige im Heft stehen?“). Stattdessen dient es auch der Förderung der Lernprozesse („Haben möglichst alle nun das Richtige im Kopf?“). Eine solche Förderung wird immer auch einzelne Lernende gezielt unterstützen, aber ihnen dabei das Denken nicht abnehmen.

Der Unterschied zwischen *Unterstützen* (mit kurzfristigem Ziel der Aufgabenbewältigung) und *Fördern* (mit Ziel des langfristigen Lernfortschritts) zeigt sich auch am Beispiel der sprachlichen Lernvoraussetzungen und Lernziele: Nicht alle Lernenden können ihre Gedanken so klar artikulieren wie Lea und Mira, die zwar noch nicht überall die formalbezogenen Fachbegriffe wie Hochpunkt, Tiefpunkt und Periode kennen, aber eine eigene bedeutungsbezogene Denksprache heranziehen, um ihre intuitiven Ideen zu kommunizieren (vgl. Lernstufe L1 in **Abb. 1**).

Welche Denksprache relevant sein könnte, wird in **Abb. 6** angedeutet. Eine reine Unterstützung der Denksprache für sprachlich schwächere Lernende könnte durch Formulierungshilfen angeboten werden, doch ist stets die Gefahr, dass Lernende die Satzbausteine kurzfristig übernehmen, ohne sie langfristig in ihren Wortschatz aufzunehmen (Prediger 2020).

Eine Förderung der Denksprache braucht daher aktivere Aneignungs-

Zeit-Winkel-Funktion	Zeit-Höhe-Funktion
Position der Gondel nach 6 Minuten ist die Gondel ... Grad und Minuten ganz unten sind 18 min. bei 0° sind 0 min. Zeit konstant proportional Winkel Viertelkreis Zusammenhang Halbkreis Achtelkreis Zuordnung	es sieht so aus [Gesten] wie eine Welle höchster Punkt Spiegelachse Welle Bogen Halbkreis Umdrehung immer so weiter wiederholen Steigung unendlich weiter Parabel mehrere Bögen tiefster Punkt Zick-Zack Funktion Periodizität periodisch

Abb. 6: Typische Satzbausteine auf dem Weg zur Sinusfunktion

prozesse mit Verknüpfung zur eigenen Sprache. Lehrkräfte, die die Lernprozesse der Lernenden aufmerksam beobachten, können etwa Satzbausteine mitschreiben (**Abb. 6**), die sie dann für alle in der Klasse thematisieren können: „*Lea hat vorhin etwas Interessantes gesagt, sie hat zwischen ‚so einem Graph‘ [begleitet mit Geste der Linearität] und ‚Halbkreis‘ unterschieden, was meinte Lea damit?*“. So könnten andere Lernende antworten: „Der Graph ist nicht gerade, sondern krumm“, „also Parabel“. Beide Ausdrucksweisen würden dann in einem Klassen-Sprachspeicher gesammelt.

So könnte der Wortschatz der Lernenden gefördert, also sukzessive aufgebaut werden, ausgehend von den mitgebrachten Satzbausteinen über eine gemeinsame Denksprache hin zu den formalen Sprachmitteln.

Plenumsgespräche gestalten

Gerade in Plenumsgesprächen kommt es darauf an, etwa zugrunde liegende Vorstellungen in den Beiträgen der Lernenden explizit zu machen und gezielt zu thematisieren. Dies ist insbesondere dann besonders wichtig, wenn fehlerhafte Vorstellungen geäußert werden, z. B. dass der Graph der periodischen Funktion sich aus der

Aneinanderreihung von Halbkreisen ergibt. Solche Beiträge bieten ein hohes Potenzial, das Begriffsnetz, in das die Sinusfunktion eingebettet ist, genauer aufzufalten. Der beispielhafte Unterrichtsentwurf in **Abb. 7** beschreibt unterschiedliche Gesprächsanlässe im Klassenverbund.

Material zum Download:

Vom Riesenrad zur Sinusfunktion

Einstieg
 Wenn ich mit dem Riesenrad fahre, kommt es mir immer so vor, dass man relativ schnell hoch- und runterfährt, aber oben halbiert man ziemlich lange.
 Mein! Das kann ich mir nicht vorstellen. Die Gondeln fahren doch immer gleich schnell.
 Ich glaube, Lea hat trotzdem recht. Am Anfang gewinnt man doch recht schnell an Höhe. Dann ist man lange oben, bevor man wieder schnell an Höhe verliert.

Phase	Handlungsanlass	Zeit
Einstieg	• Beispiel: Groß-Riesenrad, Spielplätze mit Dreirad-Lernrädern • Überlegungen der Lernenden zum Zusammenhang (Halbkreis) und gleichzeitige Zeitmessung (Stopwatch/Bildzeit) • Antizipierte Lösung: „Ich denke, dass die Höhe sich konstant ändert, weil die Gondel ja eine konstante Geschwindigkeit hat.“	10
Analogiephase 1	• Besprechen der Aufgabenstellung mit Partner • Bearbeiten der Aufgabe (z. B. in Partnerarbeit) • Hilfestellung/Unterstützung (Sprechblasen, Hilfenotizen, Tipp auf dem Blatt)	20
Schwung 1	• Diskutieren des Rezensenten-Ergebnisses • Mögliche Reaktionen: • „Beschreibt den Funktionsgraphen.“ • „Wann beschreibt der Funktionsgraph den Kontext der Aufgabe?“ • „Wie geht es über die Aufhängeseite?“ • „Wie unterscheiden sich diese Funktionen von bekannten Funktionen?“ • Auflösen der Aufgabenstellung	15
Gelenkschleife	• Qualitative Betrachtung des komplexen Zusammenhangs der Zeit-Winkel-Funktion • Besprechung der Begriffe von Graph - Halbkreis - Parabel - Höhe - Kreis • Diskutieren von Fachbegriffen zur Beschreibung der Sinusfunktion • „steil“ / „flach“, „Anstieg“, „Bergung“, „Rundung“, „Bogen“ • „Periode“ / „Periodenlänge“ / „periodisch“ • „Amplitude“	5-20 je Bedarf
Analogiephase 2	• Die Lernenden erhalten Zugang zur digitalen Visualisierung der Aufgabe • „Haben alle den Graphen richtig interpretiert?“ • „Vergleiche den dynamischen Vorgang mit einem Ergebnis. • Was gleich, was anders?“ • „Verändert das Riesenrad, sodass es eine Höhe von 5 m hat. • Wie verändert sich der Graph? (Nur zur Beschreibung der neuen Fachbegriffe!) • „Verändert das Leiten des Riesenrad auf 12 min, wie verändert sich der Graph?“ • „Wie verändert sich der Graph?“	20
Schwung 2	• Diskutieren des Rezensenten-Ergebnisses	10
Gelenkschleife	• Themenfragen (Lea: „Halbkreis“ - „Halbkreis“ oder „Ich dachte“ - „Parabel“)	

Themen

Abb. 7: Beispielhafter Unterrichtsverlauf

Im Folgenden wird auf mögliche Moderationsansätze für die drei darin eingeplanten Unterrichtsgespräche eingegangen.

Das erste Plenumsgespräch findet während des Einstiegs statt. Die Lehrkraft erläutert die Aufgabe und moderiert die Gesprächssituation. Dabei wird die Aufgabensituation zunächst als Impuls gesetzt. Die Aufgabe der Lehrkraft besteht primär darin, die Aussagen und Ideen der Lernenden zu bündeln und beispielsweise als Hypothesen an der Tafel zu fixieren (s. **Abb. 8**). Diese Aussagen werden nach der Erarbeitungsphase erneut beleuchtet.

Das zweite Plenumsgespräch erfolgt in der ersten Systematisierungsphase. Die Lernenden präsentieren ihre Erkenntnisse aus der Erarbeitungsphase und erörtern diese in Gruppen. Hier sollte die Lehrkraft ggf. zwischenzeitlich moderierend eingreifen, um die wichtigsten Aspekte der Arbeitsphase in den Fokus des gemeinsamen Gesprächs zu rücken. Mögliche Impulse könnten sein:

- „Beschreibt bitte den Funktionsgraphen!“
- „Welche Auffälligkeiten (z. B. Symmetrie, Periodizität) sind zu beobachten?“
- „Wie unterscheidet sich diese Funktion von bereits bekannten Funktionen?“
- „Könnte man die x -Achse auch mit einer anderen Einheit beschriften?“
- „Wie genau kann man den Graphen im negativen y -Achsenbereich zeichnen?“

Ziel dieser Gesprächsführung ist es, die anfangs aufgestellten Hypothesen mit den Lernenden noch einmal zu erörtern und aufzulösen. In diese Phase gehört auch die oben bereits beschriebene Moderation, die Sprachmittel der Lernenden mit den zu lernenden Sprachmitteln verknüpft.

Das dritte Plenumsgespräch findet nach der zweiten Arbeitsphase, der Auseinandersetzung mit dem digitalen Werkzeug, statt. Die Lernenden haben nun idealerweise die vorherigen Erkenntnisse vertieft, neue Fachbegriffe zur Beschreibung der funktionalen Zusammenhänge genutzt

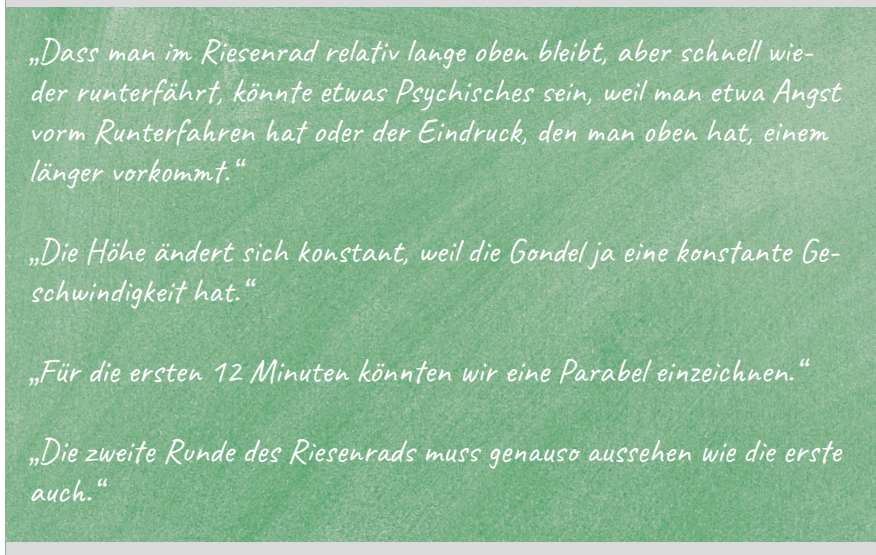


Abb. 8: Sammlung an der Tafel: Antizipierte Hypothesen der Lernenden

und die Auswirkungen von Änderungen der grundlegenden Parameter erkannt. Die Lehrkraft moderiert die Gesprächssituation und gibt ggf. Impulse, um das Gespräch zu lenken, z. B.

- „Welchen Einfluss hat die Höhe des Riesenrads auf den Verlauf der Sinuskurve?“
- „Welche Einfluss hat die Laufzeit des Riesenrades auf die Sinuskurve?“
- „Wieso kann der Graph keinen Zick-Zack-Verlauf haben?“
- „Wieso verläuft der Graph nicht in Form eines Halbkreises?“

Eine Illusion? Linearität als Verstehensgrundlage sehen

Mit der Illusion of Linearity wird das Phänomen bezeichnet, dass Lernende selbst dort lineare Zusammenhänge unterstellen, wo diese mathematisch nicht passend sind.

Schaut man allerdings genauer auf Verstehensgrundlagen, so macht das Beispiel der Sinusfunktion deutlich, wie vernetzt mathematische Begriffe sind. Der Kontext der Riesenrad-Aufgabe ist ein Beispiel für einen periodischen Zusammenhang, für den Linearität bzw. ein sicheres Gespür für proportionale Zusammenhänge durchaus wichtig ist. Die Zeit-Höhe-Funktion ist periodisch – aber die Zeit-Winkel-Funktion als Verstehensgrundlage ist eine proportionale Funktion (vgl.

Lernstufe L2 und L3 in **Abb. 1**). Eine Illusion also? Linearität spielt auf einmal dort eine wichtige Rolle, wo man sie nicht vermuten mag: beim Verstehen der Sinusfunktion.

Literatur

- Bock, D. D./Dooren, W. V./Janssens, D./Verschaffel, L. (2007): The illusion of linearity. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71164-5>
- Hefendehl-Hebeker, L. (2002): Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. – In: Augsburgener mathematisch-naturwissenschaftliche Schriften 41. Wißner.
- Hußmann, S./Barzel, B./Leuders, T./Prediger, S. (2017): Mathewerkstatt. Mittlerer Schulabschluss. Allgemeine Ausgabe 10. Schuljahr. Cornelsen, Berlin.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2022): Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) [Beschluss vom 23.06.2022].
- Leuders, T./Prediger, S. (2005) (Hrsg.): Funktioniert's? Denken in Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule, 47(2).
- Prediger, S. (2020): Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe – ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Cornelsen, Berlin.
- Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Vieweg.
- Zindel, C./Brauner, U./Jungel, C./Hoffmann, M. (2018): Um welche Größe geht's? Die Sprache funktionaler Zusammenhänge verstehen und nutzen. – In: mathematik lehren 206, Friedrich Verlag GmbH, S. 23–28.

Hinweis: In diesem Beitrag/Werk werden digitale Angebote von Drittanbietern erwähnt, die auf pädagogische Eignung geprüft wurden. Der Verlag kann die Rechtmäßigkeit und Aktualität dieser Angebote nicht fortlaufend überprüfen. Es liegt in der Verantwortung der Lehrkraft, die geltenden Bestimmungen in Bundesländern und Schulen zu beachten.