


Florian Schacht *Ruth Bebernik*

Gemeinsames Lernen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird anhand einer Fallstudie zum gemeinsamen Lernen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I diskutiert, welchen Beitrag fachdidaktische Analysen zur Beforschung des gemeinsamen Lernens am gemeinsamen Gegenstand leisten können. Dazu wird die normative Frage nach der Charakterisierung des gemeinsamen Gegenstands mit der empirischen Frage nach der Rekonstruktion der gemeinsamen Lernprozesse verknüpft. Die empirischen Daten weisen darauf hin, dass der gemeinsame Gegenstand hier weniger durch die Objekte (Prisma, Pyramide) charakterisiert ist, mit denen die Schülerinnen und Schüler lernen, sondern vielmehr die eingenommene Perspektive auf diese Objekte selbst zum gemeinsamen Lerngegenstand wird.

Der Anspruch an inklusiven Unterricht besteht darin, allen Lernenden gemäß ihren Voraussetzungen und Fähigkeitsprofilen gerecht zu werden (UNESCO, 2005, S. 13). Gerade für allgemeinbildende Schulen der Sekundarstufe I (und II) ist die Einlösung dieses Anspruchs in der Praxis häufig mit Herausforderungen verbunden. Neben organisatorischen und unterrichtsmethodischen Herausforderungen besteht – insbesondere mit Blick auf den Fachunterricht – Handlungsbedarf auf konzeptueller Ebene. Ein hoher Forschungsbedarf besteht etwa für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I darin, die Merkmale und Besonderheiten für Prozesse des gemeinsamen Lernens im inklusiven Setting auf empirischer Ebene genauer zu spezifizieren. Weiterhin besteht hoher Entwicklungsbedarf in der Frage, welche Lerngegenstände sich aus normativer Sicht als gemeinsamer Gegenstand (Feuser, 1998) im Unterricht produktiv nutzen lassen. Die empirische und die normative Frage nach der Realisierung des inklusiven Mathematikunterrichts spiegeln mithin den Kern aktueller mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsbedarfe (vgl. auch Prediger, 2016).

Diese Fragen werden im vorliegenden Beitrag am Beispiel des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I (Klasse 6) diskutiert. Dabei soll auch thematisiert werden, welchen Beitrag eine spezifisch fachdidaktische Perspektive zur genaueren Untersuchung des gemeinsamen Lernens im Mathematikunterricht leisten kann. Die Mathematikdidaktik verstehen wir dabei als eine Design Science (Wittmann, 1995), bei der die theoriegeleitete Entwicklung von Unterrichtsdesigns sowie die Beforschung der zugrunde liegenden Lernprozesse mit dem Ziel der konsequenten Weiterentwicklung von Mathematikunterricht im Mittelpunkt stehen. In diesem Sinne grenzt sich eine so verstandene fachdidaktische Perspektive klar von einer auf methodische Fragen reduzierten Haltung ab, die etwa in der Diskussion um inklusive Bildung auch von Feuser (2013) scharf kritisiert wird: „Eine primär fachdidaktisch-methodische Orientierung ist […] nicht nur unzureichend, sondern unangemessen" (Feuser, 2013, S. 5). Die Ausgangsfrage des vorliegenden Artikels ist vielmehr, welche Antworten eine fachdidaktische Perspektive sowohl auf die normative Frage geben kann, was von Lernenden in gemeinsamen Lernsituationen gelernt wird, als auch auf die empirische Frage, wie sich gemeinsames Lernen vollzieht. Kernaussage

Zeitschrift für Heilpädagogik
69., 2018
Seite 271–284

des vorliegenden Artikels ist, dass diese beiden Ebenen nicht getrennt voneinander betrachtet werden können. Vielmehr zeigen wir anhand der Rekonstruktion empirischer Lernprozesse eine Möglichkeit auf, den gemeinsamen Gegenstand (Feuser, 1998) genauer zu spezifizieren und zu strukturieren, um somit die normative Frage nach dem Was auf der Grundlage der empirischen Frage nach dem Wie zu beantworten. In der besonderen Verknüpfung der empirischen und der normativen Ebene sehen wir den wesentlichen Beitrag dieser Perspektive.

Mathematikdidaktische Forschungsbefunde zum gemeinsamen Lernen

Die Auseinandersetzung mit der Arbeit in heterogenen Lerngruppen unter besonderer Berücksichtigung inklusiven Lernens ist schon lange ein zentrales Feld der Fachdidaktik Mathematik, insbesondere im Bereich der Primarstufe. So existieren gut etablierte Forschungsansätze und vielfältige Resultate zu inklusionsorientierten Fragen im Mathematikunterricht, an die angeknüpft werden kann: Die Bedeutung sowohl der fachinhaltlichen als auch der fachdidaktischen Auseinandersetzung mit den Lerninhalten für die Planung und Durchführung eines inklusiven Mathematikunterrichts wird dabei besonders hervorgehoben (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013; Krähnemann, Labhart, Schnepel, Stöckli & Moser Opitz, 2015). Vor allem Herausforderungen der Differenzierung der Lerninhalte sowie die Aufgabenauswahl und Vorgehensweisen sollten aus fachdidaktischer Perspektive diskutiert werden (Moser Opitz, 2014, S. 63). So begründen Krauthausen & Scherer (2014) den Einsatz offener Aufgabenformate, die eine natürliche Differenzierung ermöglichen, sodass alle Lernenden die Erfahrung reichhaltiger Aktivitäten sammeln können (Scherer, 2015). Insofern fordert ein inklusiver Mathematikunterricht gerade zur Auseinandersetzung mit den mathematischen Strukturen und Mustern heraus: „Die Kinder benötigen substanzielle Aufgabenformate, um beziehungsreich und verstehensorientiert lernen zu können“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015, S. 69 f.). Weiterhin zeigen interaktionsorientierte Analysen die Bedeutung des Austauschs über Vorstellungen und Vorgehensweisen sowie der Kooperation und Interaktion innerhalb der Lerngruppe (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015).

Für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I leitet sich daraus der fachdidaktisch begründete Anspruch ab, dass Inklusion nicht nur als allgemeinpädagogische und unterrichtsmethodische Herausforderung zu begreifen ist, auf die etwa mittels getrennter Lernprogramme und durch individualisierte Förderpläne reagiert wird (Prediger, 2016). Vielmehr bedarf es einer Mischung aus Individualisierung und dem Anspruch auf gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand (Feuser, 1998; Rottmann & Peter-Koop, 2015, S. 6) in unterschiedlichen Lernsituationen (Wocken, 1998). Vor diesem Hintergrund ergeben sich erhebliche fachdidaktische Forschungs- und Entwicklungsbedarfe, etwa auf normativer Ebene, was Lernende mit fachlichem Förderbedarf eigentlich lernen sollten und mit welchen Zugängen (vgl. Prediger, 2016). Dies erfordert eine Spezifizierung des gemeinsamen Gegenstands und eine fachliche Strukturierung sowie ggf. Re-Strukturierung der Inhalte. Auf empirischer Ebene steht die Frage nach den interaktionsbezogenen Besonderheiten von Lern- und Interaktionsprozessen in gemeinsamen Lernsituationen im Mittelpunkt.

Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand: ein fachdidaktischer Zugang

Ein wesentliches Ziel der Mathematikdidaktik besteht in der Entwicklung und Erforschung unterrichtlicher Designs auf der Grundlage der Spezifizierung und Strukturierung der fachlichen Gegenstände einerseits und auf der Grundlage der Beforschung der zugrunde liegenden Lernprozesse andererseits (Hußmann & Prediger, 2016). In diesem Sinne wird Mathematikdidaktik im vorliegenden Beitrag als eine Design Science (Wittmann, 1995) verstanden. Die Verschränkung von fachlicher Perspektive und Lernendenperspektive ist demnach für mathematikdidaktische Forschung konstitutiv. Auch vor diesem Hintergrund wird das gemeinsame Lernen am gemeinsamen Gegenstand (Feuser, 1989) als zentrales Prinzip inklusiven Mathematikunterrichts angesehen: „Der gemeinsame Gegenstand integrativer Pädagogik ist nicht das materiell Faßbare, das letztlich in der Hand des Schülers zum Lerngegenstand wird, sondern der zentrale Prozeß, der hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen steht und sie hervorbringt“ (Feuser, 1989, S. 32).

Mathematische Gegenstände sind dabei aus epistemologischer Perspektive besonders, da sie theoretische Objekte sind (vgl. Steinbring, 1999). So betont etwa Sfard (1991), „advanced mathematical constructs are totally inaccessible to our senses – they can only be seen with our mind's eyes" (Sfard, 1991, S. 3).

Der Kreis etwa als die Menge der Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Mittelpunkt M alle den gleichen Abstand k haben, ist – im mathematischen Sinne – ein theoretisches Objekt. Es ist zwar möglich, Repräsentationen von Kreisen zu erzeugen, diese entsprechen aber eben nicht den mathematischen Objekten selbst. Auch wenn das Bild eines Kreises mit digitalen Hilfsmitteln erzeugt wird, etwa auf einem Computerbildschirm, so ist dies kein Kreis im mathematischen Sinne. Würden wir zoomen, so zeigt sich irgendwann die Grenze der Darstellbarkeit – spätestens dann, wenn der Zoomfaktor so hoch ist, dass die quadratische Struktur einzelner Pixel erkennbar wird. Solche Repräsentationen mathematischer Objekte sind einerseits essenziell für das Wesen der Mathematik, weil sie es uns überhaupt erst ermöglichen, über die mathematischen Objekte zu sprechen. Andererseits ist aber auch klar, dass diese Repräsentationen nicht mit dem Objekt selbst verwechselt werden dürfen. Die Kreisdarstellung ist demnach nicht die – materiell fassbare – Repräsentation des mathematischen Objekts an sich. Vielmehr erfordert die Bestimmung des Begriffs die „hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen" (Feuser, 1998, S. 32) stehenden Eigenschaften zu durchdringen und zu benennen, etwa durch die Angabe von Beispielen sowie Gegenbeispielen, durch Abgrenzung zu weiteren Begriffen oder durch aktive Konstruktion von Kreisen (zu weiteren Begriffsbestimmungsarten vgl. Winter, 1983).

Weil insofern die Natur mathematischer Objekte – im Unterschied zu den Objekten der Naturwissenschaften – in besonderer Weise theoretisch ist, ist ihre Existenz ohne die menschliche Aktivität und die Kommunikation über die mathematischen Objekte gar nicht denkbar. Diese Einsicht hat wichtige Konsequenzen: Die Spezifizierung und Strukturierung der mathematischen Gegenstände muss die Aktivitäten der Lernenden beim Hervorbringen der Mathematik berücksichtigen. Eine solche Erklärungshaltung hat bereits Freudenthal formuliert: „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen" (Freudenthal, 1974, S. 124). Aus dieser Perspektive erfordert die Bestimmung des gemeinsamen Gegenstands, die Handlungen und die zugrunde liegenden Lernprozesse ebenfalls genauer zu betrachten. Wird Feusers (1989) Ansatz gefolgt, ist die normative Frage nach dem Was (Was ist der gemeinsame Gegenstand?) nicht losgelöst von empirischen Fragen nach dem Wie (Wie vollziehen sich die gemeinsamen Lernprozesse?) zu denken. Hußmann und Prediger (2016) formulieren eben diesen Anspruch für eine fachdidaktische Entwicklungsforschung: Die Spezifizierung und Strukturierung der mathematischen Lerngegenstände fußen hier auf der genauen empirischen Beforschung der Lernprozesse. Im vorliegenden Beitrag wird daher die Frage nach der Spezifizierung und Strukturierung des gemeinsamen Gegenstands im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Geometrie auf der Grundlage empirischer Analysen von Lernprozessen in gemeinsamen Lernsituationen diskutiert.

Vor diesem Hintergrund ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:
- Forschungsfrage 1 (empirische Ebene): Inwiefern zeigen sich bei den Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler interaktionsbezogene Besonderheiten im Kontext geometrischen Arbeitens?
- Forschungsfrage 2 (normative Ebene): Welche gemeinsamen Gegenstände liegen dem Themenfeld Flächen und Körper beschreiben zugrunde und welche normativen Konsequenzen zum gemeinsamen Lernen lassen sich daraus ziehen?

Geometriedidaktische Fundierung

Hürden beim Übergang Ebene – Raum

Laut Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss ist im Rahmen des inhaltlichen Kompetenzbereichs Raum und Form unter anderem das Erkennen und Beschreiben geometrischer Strukturen in der Umwelt, das gedankliche Operieren mit Flächen und Körpern sowie das Beschreiben und Begründen von Eigenschaften geometrischer Objekte Lerngegenstand der Sekundarstufe I (KMK, 2003). In Bezug darauf können sich besondere Hürden für viele Lernende beim Übergang vom Umgang mit zweidimensionalen Objekten in der Ebene hin zum dreidimensionalen Raum ergeben, die sowohl auf (fach-)sprachliche Gründe als auch auf semantische Konzeptwechsel zurückgeführt werden können.

Das mathematische Höhenkonzept spielt dabei eine wichtige Rolle, da es sich nicht problemlos von der ebenen in die räumliche Geometrie übertragen lässt. Die Höhe ist sowohl ein Begriff der Umgangs- als auch der Fachsprache. In der Lebenswelt vieler Lernenden ist die Höhe ein Begriff, der mit einer senkrechten Strecke (vom Boden aus) assoziiert wird, beispielsweise im Zusammenhang mit dem Messen der eigenen Körpergröße. Im Unterschied zum Alltagsverständnis ist die Höhe im mathematischen Sinn ein Maß und nicht die Strecke selbst. Das mathematische Konzept der Höhe ist durch feste strukturelle Beziehungen zwischen Objekten gekennzeichnet, die durch definierte Eigenschaften charakterisiert sind. Mathematisch gesehen ist die Höhe im Raum die Länge eines Lots (Senkrechte) auf einer Strecke oder Fläche. Ein Dreieck hat beispielsweise drei Höhen, die jeweils dadurch entstehen, dass das Lot (Senkrechte) von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird. Während also umgangssprachlich i.d.R. nur von einer Höhe gesprochen wird, ist dies wie etwa beim Dreieck bei mathematischen Gegenständen im Allgemeinen nicht der Fall.

Wird das Höhenkonzept im Raum thematisiert, lassen sich Erfahrungen aus der ebenen Geometrie nicht unmittelbar auf die räumliche Geometrie übertragen. In Bezug darauf untersucht Hattermann (2015) den Übergang von der ebenen zur räumlichen Geometrie unter Berücksichtigung der Vorerfahrungen aus der ebenen Geometrie am Beispiel einer Lotgeradenkonstruktion (Abb. 1 und 2). Abbildung 1 zeigt die Gegenüberstellung einer Lotgeradenkonstruktion h zu g durch $P \in g$ in der Ebene und im Raum. Während die Orthogonale in der Ebene eindeutig dargestellt werden kann, gibt es unendlich viele Möglichkeiten, sie im Raum zu konstruieren. Die Vorstellung der Eigenschaft einer Lotgeraden in der (zweidimensionalen) Ebene, nämlich die Eindeutigkeit der Konstruktion, ist für den (dreidimensionalen) Raum nicht mehr tragfähig. Es existiert vielmehr eine eindeutige Ebene E, die zu g senkrecht steht und P enthält, wie in Abbildung 2 dargestellt wird. In dieser Ebene liegen unendlich viele Geraden h, die zu g senkrecht sind und P enthalten. Diese Lotebene E entsteht durch die Rotation der ursprünglichen Lotgeraden h um P im Raum.

Abb. 1:
Eindeutige (2D) und nicht eindeutige (3D) Lotgeradenkonstruktion h zu g durch P (nach Hattermann, 2015)

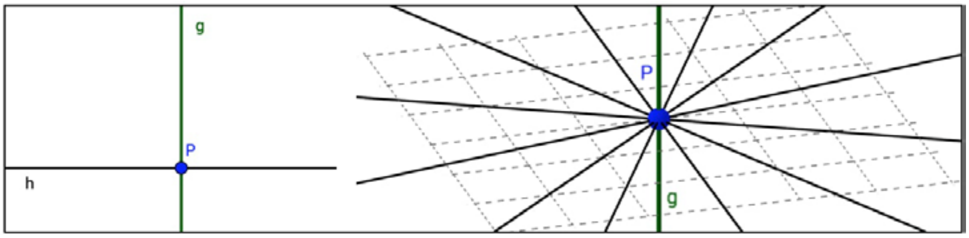
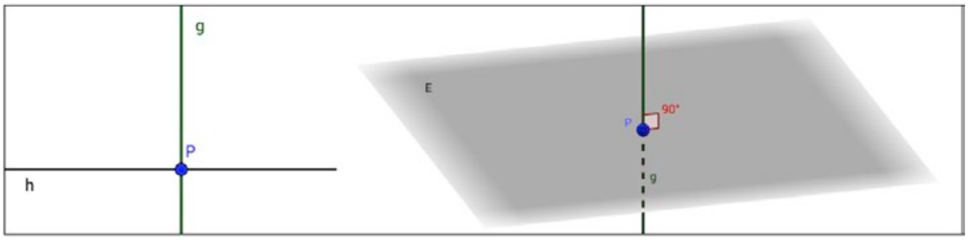


Abb. 2:
Eindeutige Konstruktion von Lotgerade (2D) und Lotebene (3D) zu g durch P (nach Hattermann, 2015)



Nach Hattermann (2015) sind somit wichtige zweidimensionale Definitionen und Vorstellungen im Raum nur noch teilweise tragfähig. Das Beispiel der Lotgeradenkonstruktion lässt sich auf weitere Beispiele übertragen, wie etwa die Konstruktion eines Dreiecks über die Höhe in der Ebene und im Raum.

Insgesamt kann somit am Beispiel der Höhe festgehalten werden, dass der Übergang von der ebenen zur räumlichen Geometrie für viele Lernende mit semantischen Konzeptwechseln verbunden ist. Die zunächst wahrgenommene Eindeutigkeit der Orthogonalen aus den Erfahrungen in der ebenen Geometrie geht im Raum verloren. Vielmehr muss zur Verallgemeinerung des Konzepts hin zu einer Lotebene ein gedanklicher Abstraktionsschritt vorgenommen werden.

Auch im Hinblick auf räumliche Objekte wie Quader oder Pyramiden ist der Höhenbegriff im mathematischen Sinne beim Übergang von Flächen zu Körpern herausfordernd. So entspricht sowohl im (zweidimensionalen) Rechteck als im (dreidimensionalen) Prisma die Höhenlinie jeweils einer Seite. Ebenfalls gilt sowohl für das (zweidimensionale) Dreieck als auch für die (dreidimensionale) Pyramide, dass es im Allgemeinen keine Seitenkante gibt, die gleichzeitig Höhenlinie ist. Auch wenn hier gewisse Parallelen die Übertragung von zweidimensionalen Eigenschaften auf dreidimensionale Objekte nahelegen, so ergeben sich bei der Betrachtung der Eigenschaften der Höhe (hier dargestellt an prototypischen Beispielen) in zwei- und dreidimensionalen Konfigurationen zentrale Herausforderungen, die eine einfache Übertragbarkeit verhindern (Tab. 1).

zweidimensionale Ebene	dreidimensionaler Raum
Jede Seite eines Rechtecks ist auch eine Höhenlinie im Rechteck.	Die Kanten einer Pyramide entsprechen im Allgemeinen nicht der Höhenlinie der Pyramide.
Die Seiten eines Dreiecks entsprechen im Allgemeinen nicht den Höhenlinien des Dreiecks.	

Tab. 1: Die Eigenschaften der Höhe bei zwei- und dreidimensionalen Objekten

In Tabelle 1 wird einerseits deutlich, dass die zunächst möglicherweise naheliegende Übertragung bekannter Konzepte der ebenen Geometrie hin zu dreidimensionalen Situationen begrifflich nicht trivial und mit deutlichen gedanklichen Abstraktionsschritten verbunden ist. Da eine (quadratische) Pyramide aus einem Quadrat (Grundfläche) und vier dreieckigen Seitenflächen besteht, ist zunächst nicht klar, wie das Konzept der Höhe übertragen werden soll.

Die Höhe als besonderes Lot (sowohl im Zwei- als auch im Dreidimensionalen) zu verstehen, setzt einen gedanklichen Abstraktionsschritt voraus, der von Lernenden, die bislang nur mit ebener Geometrie vertraut sind, nicht vorausgesetzt werden kann. Hier ist eine besondere Schwierigkeit dieses Konzepts zu sehen: Die Verallgemeinerung der Eigenschaften der Höhe beim Übergang von 2D zu 3D ist keinesfalls trivial, vielmehr im Gegenteil nicht nur mit problematischen Überschneidungen unterschiedlicher alltags- und fachsprachlicher Verwendungsweisen verbunden, sondern darüber hinaus noch mit einer enormen gedanklichen Abstraktionsleistung, die so eigentlich erst aus der Rückschau angemessen reflektiert werden kann.

Die empirische Analyse zeigt, welche Hürden sich für Lernende ergeben, wenn sie ihre Erfahrungen aus der ebenen Geometrie für die raumgeometrischen Herausforderungen in gemeinsamen Lernsituationen nutzen.

Prozess- und strukturbezogener Charakter beim Lernen geometrischer Begriffe

Mathematische Begriffe zeichnen sich in epistemologischer Hinsicht nicht nur durch ihren theoretischen Charakter aus, sondern auch durch ihre Doppelnatur. Sfard (1991) spricht in diesem Zusammenhang von der „dual nature of mathematical conceptions" (Sfard, 1991, S. 1). Zum einen können mathematische Begriffe strukturell als Objekt und zum anderen operational über ihren Prozesscharakter gefasst werden. Kennzeichnend für die strukturbezogene Dimension mathematischer Begriffe ist der statische Charakter, während die prozessbezogene Dimension eher dynamisch und sequentiell ist (ebd., S. 4). So lässt sich dieser Unterschied etwa am Symmetriebegriff verdeutlichen. Symmetrie kann statisch als Merkmal geometrischer Formen verstanden werden. In diesem Fall wird Symmetrie durch strukturbezogene Beschreibungen konzeptualisiert. In strukturbezogener Perspektive gilt etwa eine Figur als achsensymmetrisch, wenn es eine Gerade g (die Spiegelachse) gibt, sodass es zu jedem Punkt P der Figur einen weiteren Punkt P' der Figur gibt, wobei die Strecke P'P' von dieser Geraden rechtwinklig halbiert wird. Demgegenüber lässt sich der Symmetriebegriff gleichwertig – aber eben verschieden – auch in prozessbezogener Sicht definieren. So gilt eine Figur als achsensymmetrisch, wenn sie durch eine senkrechte Achsenspiegelung an ihrer Symmetrieachse auf sich selbst abgebildet werden kann. Im Unterschied zur strukturbezogenen Dimension werden hier abbildungstheoretische Begriffe (und damit Begriffe mathematischer Prozesse) genutzt, um den Symmetriebegriff zu definieren. Sfard (1991) betont den Unterschied zwischen diesen beiden Begriffsdimensionen: „[…] there is a deep ontological gap between operational and structural conceptions“ (Sfard, 1991, S. 4).

Beschreibung der Untersuchung und Methode

Bei der empirischen Untersuchung zum gemeinsamen Lernen in der Sekundarstufe I werden unterschiedliche Schülerpaare (jeweils mit und ohne Förderschwerpunkt (Sprache, Emotionale und soziale Entwicklung sowie Lernen) einer sechsten Hauptschulklasse im Rahmen eines qualitativen Designs untersucht, wobei im Folgenden die Ergebnisse eines Paares genauer diskutiert werden. Der mathematische Inhalt lehnt sich an den Geometriekontext „Verpackungen – Mathematische Körper beschreiben, herstellen, zeichnen“ (Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012, S. 35 ff.) an.

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie werden anhand von Einzelfallbeispielen erläutert, die Hinweise auf typische Merkmale, Hürden sowie Lernpotentiale der zugrunde liegenden Lernprozesse liefern können (Beck & Maier, 1993). Die zentrale Wirkkraft von Einzelfallbeispielen liegt darin begründet, „[…] die Komplexität eines Falls möglichst umfassend und detailliert“ (Bortz & Döring, 2006, S. 323) zu erfassen.

Die Ergebnisse dieses Projekts beziehen sich auf das ausgewählte Schülerpaar Ben und Adam. Ben hat einen diagnostizierten Förderschwerpunkt im Bereich Lernen und eine Lese-Rechtschreibschwäche. Dem Lernstoff im Mathematikunterricht kann er laut Klassenlehrer gut folgen und arbeitet aktiv mit. Nach einer gewissen Arbeitszeit lässt seine Konzentration jedoch nach, sodass er schnell abgelenkt ist. Sein Lernprozess wird im Unterricht mit einem Förderplan verfolgt und durch individuelle Fördermaßnahmen unterstützt. Dagegen kann Adam ohne diagnostizierten Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung im mittleren Leistungsbereich im Mathematikunterricht eingeordnet werden.

Exemplarisch wird in Abbildung 3 die Aufgabenstellung „Rücken an Rücken“ vorgestellt, die die Lernenden nach der Einführung von Flächen und Körpern durch unterschiedliche Verpackungen bzw. Gegenstände erarbeiten sollen. Die Rekonstruktionsaufgabe (Abb. 3) ist dadurch gekennzeichnet, dass durch eine Beschreibung eines vorliegenden Objekts eine Rekonstruktion dieses Objekts herzuleiten ist, die zum Original kongruent sein soll (Wollring, 2012, S. 12). Die Lernenden erhalten den Arbeitsauftrag, sich Rücken an Rücken zu setzen, jeweils ein Kantenmodell eines beliebigen Körpers mit Hölzchen und Knete zu bauen und anschließend dem Partner zu beschreiben (Geber). Dieser rekonstruiert mithilfe der Gegenstandsbeschreibung und spezifischer Unterstützung den Körper nach (Nehmer). „Die zentrale Erfahrung, die Lernende hier machen, besteht in der Anforderung eine funktionssichere Verständigung herbeizuführen, eben eine funktionale situative Sprache zu entwickeln“ (Wollring, 2012, S. 12).

Nach Bearbeitung der Rekonstruktionsaufgabe findet eine Reflexion statt, um Verständnisschwierigkeiten zu problematisieren. Die eingesetzten Aufgaben wurden so ausgewählt, dass eine innere Differenzierung ermöglicht wird, indem die Lernenden selbst entscheiden, welchen Körper sie zu Beginn bauen und anschließend beschreiben. Somit ergibt sich eine Lernsituation, die gleichsam produktiv und rezeptiv ist, da die Beschreibung (für den anderen) nicht nur selbst formuliert, sondern (als Beschreibung vom anderen) auch konstruktiv umgesetzt werden muss.

Neben dem Aufgabenmaterial werden Hilfestellungen auf Wort- und Satzebene zur Bezeichnung und Beschreibung von Körpern zur Verfügung gestellt, um Lernende mit Ausdrucksschwierigkeiten und geringer Fachsprachkompetenz sprachsensibel zu unterstützen. In diesem Sinne wird ein besonderer Schwerpunkt auf das sprachbezogene Fachlernen gelegt (Kniffka & Neuer, 2008). Außerdem liegen Körper und Flächen als Gegenstände vor, wodurch der Wechsel

Wie kann man Körper und ihre Eigenschaften beschreiben und nutzen?

In dem folgenden Spiel probiert ihr, selbst gebaute Körper möglichst gut zu beschreiben, ohne sie euch gegenseitig zu zeigen.

- Setzt euch zu zweit Rücken an Rücken zusammen.
- Eine Person baut einen Körper mit Hölzchen und Knete und beschreibt ihn.
- Die andere Person baut die Form des Körpers mit Hilfe der Beschreibung nach.
- Tauscht mehrmals die Rollen.

War die Beschreibung gut?
Welche Körper können nicht nachgebaut werden?
Begründe deine Antwort.

Neues Wort:
Eine gleichseitige Pyramide mit insgesamt vier Flächen nennt man auch *Tetraeder*

Abb. 3:
Exemplarische Aufgabenstellung (nach Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012, S. 38)

zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungsebene ermöglicht wird, um den Aufbau entsprechender Grundvorstellungen zu ermöglichen (Wartha, 2011).

Als Methode zur Untersuchung der Interaktionsprozesse werden klinische Interviews durchgeführt, um die Denkprozesse der Lernenden zu verstehen. Neben den halbstandardisierten Interviewverfahren wird die Erhebung auf Video aufgezeichnet, um sprachliche Äußerungen und konkrete Handlungen der Lernenden zu erfassen. Darüber hinaus dienen schriftliche Schülerdokumente zur Analyse der Lernprozesse.

Ergebnisse und Diskussion

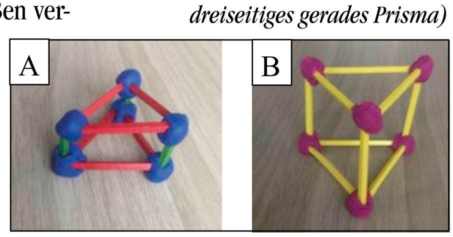
Zusammenspiel struktur- und prozessbezogener geometrischer Begriffe
Beischreibung eines Körpers durch Schüler Adam (A, ohne Förderschwerpunkt)
In der folgenden Szene (Tab. 2) hat der Schüler Adam (A, ohne FS) ein dreiseitiges, gerades Prisma erstellt (Abb. 4) und beginnt seine Beschreibung für den Schüler Ben.

Tab. 2:
Die Interaktion von Adam und Ben wechselt zwischen struktur- und prozessbezogenen Beschreibungen

T	P	Inhalt
1	A	Also (---) es hat (---) sechs Ecken.
2	B	Sechs Ecken ok.
3	A	Es hat neun Kanten (---) Mit Grundfläche äh, hat es fünf Flächen ((zählt die Flächen leise)).
4	B	Mit Grundfläche, also unten?
5	A	Ja. Eine Grundfläche und drei Seitenfläche und eine Deckfläche.
6	B	Hää (---) ((guckt sich die bildliche Hilfestellung an)). Ich weiß nicht, was du meinst. Es hat sechs Ecken, ne?
7	A	Ja, es hat, also es hat unten drei Kanten (---) und drei Ecken.
8	B	Ok. Geht es in die Höhe? ((beginnt den Körper nachzubauen)).
9	A	Ja.
10	B	Ok. (---) Es hat unten drei Ecken. Drei Ecken hast du da ne (---) Ich weiß was du].
11	A	Brauchst] du noch irgendwelche Informationen?
12	B	Joa, das wär nett.
13	A	Also unten wie gesagt drei Kanten und drei Ecken. Dann geht es in die Höhe. An jeder Ecke geht es einmal in die Höhe. Und dann das gleiche wie unten noch einmal. Oben hat es auch drei Kanten und drei Ecken.

Diese Szene gibt nicht nur Einblick in einen begrifflichen Entwicklungsprozess im Verlauf der Interaktion, sondern es wird hier auch ein geteiltes Verständnis für Kriterien einer für Ben verstehbaren Beschreibung sichtbar.

Abb. 4:
Links ist das von Adam (A) zuerst erstellte dreiseitige Prisma zu sehen, rechts das von Ben (B) auf der Grundlage der Beschreibung nachgebildete Objekt (ebenfalls ein dreiseitiges gerades Prisma)



Adam beginnt seine Beschreibung zunächst mit einem strukturbezogenen Zugang (T. 1, T. 3, T. 5, Tab. 2), indem er die Anzahlen von Flächen, Kanten und Ecken benennt bzw. die strukturellen Eigenschaften der Flächen (als Grund-, Seiten- bzw. Deckfläche) explizit beschreibt. Ben deutet in T. 4 begrifflichen Klärungsbedarf an, indem er fragt, ob die Grundfläche „unten" (T. 4, Tab. 2) ist. Mit der Verwendung der Präposition unten zeigt Ben, dass die reine strukturbezogene Beschreibung nicht ausreicht. Aus fachlicher Sicht spielt es keine Rolle, ob sich die Deckfläche oben oder die Seitenfläche seitlich befindet, da die Eigenschaften des Objekts auch dann identisch bleiben, wenn es etwa gedreht wird (Invarianz unter Drehungen). Dann macht Ben explizit, dass ihm die bisherigen Beschreibungen nicht zu helfen scheinen: „Ich weiß nicht, was du meinst" (T. 6, Tab. 2). Adam greift die lokalen Verweise auf und benennt lokale strukturelle Eigenschaften des Körpers: „Es hat unten drei Kanten und drei Ecken" (T. 7, Tab. 2). Dieses Aufgreifen der Präposition unten nutzt Ben, um eine Rückfrage auf prozessbezogener Ebene zu stellen: „Geht es in die Höhe?" (T. 8, Tab. 2). Im weiteren Verlauf der Interaktion lässt sich Adam in seinen Beschreibungen auf die prozessbezogene Ebene ein und gibt schließlich eine zusammenfassende Beschreibung seines Körpers im Sinne einer Bauanleitung mit einem stark prozesshaften Charakter (T. 13, Tab. 2). Ben konstruiert daraufhin ebenfalls ein dreiseitiges Prisma (Abb. 4).

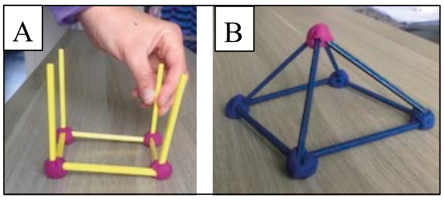
Die Analyse zeigt, inwiefern die Lernenden zwischen prozess- und strukturbezogenen Beschreibungen wechseln. Adam nutzt zunächst einen strukturbezogenen Zugang, wechselt dann aber hin zu einer prozessbezogenen Beschreibung, als Ben signalisiert, dass ihm der erste Zugang nicht weiterhilft. Die genaue Analyse zeigt, inwiefern im Verlauf der Interaktion eine für Ben tragfähige (nämlich prozessbezogene) Beschreibungsvariante im Sinne einer Bauanleitung zwischen den beiden Interaktionsteilnehmern gefunden wird. Zentrales Ergebnis ist weiterhin, dass Adam nicht nur auf die von Ben signalisierten Verstehensschwierigkeiten reagiert, sondern dass er in seiner Reaktion auch bewusst zwischen der prozess- und der strukturbezogenen Beschreibungsweise wechselt und schließlich die für Ben verständliche Beschreibungsebene bewusst wählt (T. 13, Tab. 2).

Be schreibungen von Körpern durch Schüler Ben (B, mit Förderschwerpunkt Lernen und Lese-Rechtschreibschwäche)
Im zweiten Transkriptausschnitt direkt im Anschluss an die vorangegangene Szene arbeiten die Lernenden im gleichen Kontext, wobei nun Ben zunächst einen Körper erstellt und Adam auf der Grundlage von Bens Beschreibung den entsprechenden Körper nachbaut

Tab. 3: Konzeptuelle Schwierigkeiten mit dem Höhenkonzept und weitere Konsolidierung der Beschreibungsebenen zwischen Struktur- und Prozessbezug

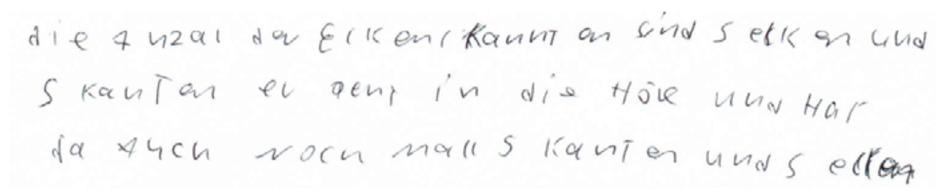
T	P	Inhalt
1	B	Meins hat äh unten vier Ecken äh, und jeweils auch vier Kanten (---). Es geht (---) also sag, wenn ich zu schnell bin ne, unten geht es [jeweils.
2	A	Warte] kurz ((beginnt den Körper nachzubauen)) (---). Vier Ecken?
3	B	Ja und vier Kanten, unten.
4	A	(---) ((baut die Grundfläche des Körpers)). Kannst weitersagen.
5	B	Ähm dann geht's jeweils (---) ähm, bei den vier Ecken hoch. Ähm.
6	A	An jeder Ecke? ((bringt eine senkrechte Kante an jeder Ecke an)).
7	B	Ja an jeder Ecke. Es hat aber auch insgesamt hat es fünf Ecken (---) ((zählt die Ecken)). Ja insgesamt hat es fünft Ecken und es hat eine Grundfläche und (---) ((zählt die Seitenflächen)) und vier Seitenflächen.
8	A	Es geht dann jeweils an den Kanten hoch? ((guckt irritiert))
9	B	Ja. (---) Und es sind insgesamt fünf Ecken. An den Ecken geht es jeweils hoch.
10	A	Ja.
11	B	Ja, es sind insgesamt fünf Ecken.
12	A	Also oben sind nicht so wie unten, vier Ecken, sondern (fünf)? [Also.
13	B	[Unten sind vier und oben eine.

Abb. 5: Rechts ist die von Ben erstellte Pyramide zu sehen (B), links der Konstruktionsschritt von Adam (A) in T. 5 ff. (Tab. 3): „[...] bei den vier Ecken hoch."



Ben benennt zunächst die Anzahl von Ecken und Kanten unten (T. 1, Tab. 3), wobei er hier zunächst die Grundfläche seiner Pyramide beschreibt. Auch für diese Beschreibung nutzt er die Präposition unten zur genauen lokalen Beschreibung der Seitenfläche in der Pyramide. Adam konstruiert simultan ein passendes Quadrat aus den bereitgestellten Materialien. Daraufhin folgt eine klar prozessbezogene Beschreibungsebene: „(...) dann geht's jeweils [...] bei den vier Ecken hoch." (T. 5, Tab. 3). Bevor Adam die Konstruktion simultan weiter erstellt, versichert er sich bei Ben, ob es auch „an jeder Ecke" hochgehe (T. 6, Tab. 3). Ben bestätigt dies und fügt nach einer kurzen Pause hinzu, dass der Körper „aber auch insgesamt […] fünf Ecken" hat (T. 7, Tab. 3). Gleichzeitig errichtet Adam vier Kanten senkrecht zur Grundfläche der Pyramide (Abb. 5 links). Für Adam ergibt sich ein kognitiver Konflikt aus den beiden für ihn widersprüchlich erscheinenden Aussagen, dass es an „[…] den vier Ecken hoch" gehe (T. 5, Tab. 3) und dass der Körper insgesamt nur fünf Ecken hat (T. 7, Tab. 3). Ben aber bekräftigt ebendiesen scheinbaren Widerspruch in T. 9: „[…] es sind insgesamt fünf Ecken. An den Ecken geht es jeweils hoch". Dieser scheinbare Widerspruch wird hier erst dadurch aufgelöst, dass Ben wieder Präpositionen wie unten und oben zur lokalen Beschreibung der Ecken verwendet (T. 13, Tab. 3).

Im weiteren Verlauf des Arbeitsprozesses notieren die beiden Lernenden eine Beschreibung eines geometrischen Körpers schriftlich, der für sie die schwierigste Form darstellt. Das folgende Dokument (Abb. 6) zeigt die Beschreibung eines fünfseitigen Prismas durch den Schüler Ben.



Abschrift: Schüler Ben (FS LE)
die Anzal der Ecken, Kannten sind 5 ecken und
5 Kanten er geht in die Höhe und Hat
da Auch noch mall 5 Kanten und 5 ecken

Abb. 6: Beschreibung eines fünfseitigen Prismas durch den Schüler Ben

Diese Beschreibung zeigt, inwiefern Ben auch in seiner schriftlichen Beschreibung einen prozessbezogenen Zugang wählt. Die Beschreibung selbst vollzieht den Prozess der (in diesem Fall gedanklichen) Konstruktion des Körpers nach.

Zusammenfassung

Insgesamt zeigen die Beispiele, dass Ben die in der ersten Szene herausgebildete prozessbezogene Beschreibungsebene geometrischer Körper zunächst in der mündlichen Kommunikation wählt und schließlich auch in seiner schriftlichen Dokumentation (Forschungsfrage 1).

Durch das offene Aufgabenformat wird den Lernenden die Möglichkeit gegeben, einen Körper selbstständig und individuell auszuwählen, sodass keine weiteren Differenzierungsmaßnahmen gezogen werden müssen und niemand ausgegrenzt wird. Beide Lernenden erreichen auf unterschiedlichen Ebenen das Ziel, einen Körper durch den Austausch der Zugänge möglichst gut einer anderen Person zu beschreiben. Weiterhin macht dieses Beispiel deutlich, inwiefern sich das Konzept der Höhe als zentral für die Beschreibung auf prozessbezogener Ebene erweist, weil mittels dieses Begriffs der Übergang vom Zweidimensionalen (quadratische Grundfläche) hin zum Dreidimensionalen (Pyramide) sprachlich überhaupt erst möglich ist. Das Fallbeispiel zeigt demnach Besonderheiten der Interaktion der gemeinsamen Lernsituation mit Blick auf die fachliche Strukturierung (Forschungsfrage 2). Zunächst zeigen sich Wechsel in der Interaktion zwischen struktur- und prozessbezogenen Beschreibungsweisen geometrischer Körper. Dabei geht der Schüler Adam auf den von Ben präferierten Zugang der prozessbezogenen Beschreibung ein, wechselt die Ebenen damit bewusst und wirkt über die hier dargestellten Situationen somit als Sprachvorbild. Diese Rolle scheint er insbesondere durch das Angebot der abschließenden Zusammenfassung der Beschreibung in T. 13 (Tab. 2) bewusst einzunehmen. Der Schüler Ben hingegen entwickelt im Verlauf der hier rekonstruierten Situationen ein sicheres Gespür für die Nutzung einer prozessbezogenen Darstellung im Sinne einer Bauanleitung, die dem Muster der Beschreibung von unten nach oben folgt. Dadurch werden die Zugänge selbst zum gemeinsamen Gegenstand des zugrunde liegenden Problemkontextes.

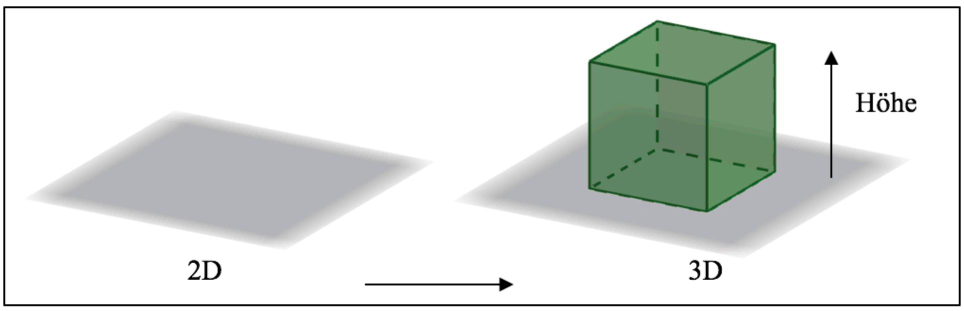
Vor dem Hintergrund der empirischen Ergebnisse lassen sich erste vorsichtige Deutungen auf Konsequenzen für die normative Strukturierung von Lerndesigns in inklusionsorientierter Perspektive erkennen. So wäre ein fachlicher Anspruch an Lernende, die in diesem Kontext große fachliche Schwierigkeiten haben, überhaupt eine der beiden Perspektiven bewusst einzunehmen. Demgegenüber wäre ein Anspruch an Lernende ohne Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung, den Perspektivwechsel zwischen prozess- und strukturbezogenen Beschreibungen nachzuvollziehen und in Lernsituationen explizit anzuwenden. Gleichzeitig wird hier die wichtige Rolle von Sprachvorbildern in gemeinsamen Lernsituationen verdeutlicht. Dabei wird im vorliegenden Beitrag darauf verzichtet, eine der beiden Perspektiven zu priorisieren oder fachliche Unterschiede im Schwierigkeitsgrad der unterschiedlichen Perspektiven zu benennen. Es ist aus unserer Sicht eine der Grenzen des vorliegenden Kontexts, dass durch die Lernsituation die Wahl einer (eher prozesshaften) Bauanleitung tendenziell naheliegend ist. Insofern wäre der Schluss, dass Ben die prozessbezogene Sicht deswegen wählt, weil sie aus fachlicher Perspektive leichter wäre, zwar möglich und mit Blick auf einschlägige Literatur auch begründbar (Sfard, 1991), aber vor dem Hintergrund des vorliegenden Lerndesigns ebenfalls eine vorschnelle Schlussfolgerung. Hier zeigt sich daher weiterer Forschungsbedarf.

Restrukturierung des mathematischen Gegenstands und Rekonstruktion des gemeinsamen Gegenstands

Notwendigkeit der Restrukturierung des mathematischen Gegenstands

Vor dem Hintergrund der empirischen Untersuchung soll hier begründet werden, dass die Anknüpfung an Erfahrungen der ebenen Geometrie bei der Thematisierung von dreidimensionalen Konfigurationen mit vielfältigen Hürden verknüpft ist (siehe Abschnitt Hürden beim Übergang Ebene – Raum) und dass vor dem Hintergrund eine alternative Strukturierung des mathematischen Gegenstands notwendig erscheint. Eine zentrale Rolle spielt in diesem Zusammenhang das Konzept der Höhe. Aus umgangssprachlicher Sicht spielt die Höhe die entscheidende Rolle beim Übergang von zweidimensionalen zu dreidimensionalen Konfigurationen. Beispielhaft lässt sich das etwa an Maßangaben dreidimensionaler Objekte belegen: Die ebene Fläche etwa eines Quaders ergibt sich aus Maßangaben zu Breite und Länge/Tiefe, ein vollständiges dreidimensionales Bild ergibt sich erst durch Angabe der Höhe. Im umgangssprachlichen Gebrauch ist demnach die Höhe die Eigenschaft, die zwei- von dreidimensionalen Objekten unterscheidet (Abb. 7).

Abb. 7: Umgangssprachlich ist der Höhenbegriff das zentrale Konzept beim Übergang von 2D → 3D



In Tabelle 3 konnte bereits gezeigt werden, inwiefern das Konzept der Höhe einen kognitiven Konflikt erzeugt hat. Adam hat die Kanten des Würfels so konstruiert, dass sie senkrecht zur Grundfläche „in die Höhe" gehen. Das Höhenkonzept wird hier demnach mit der Eigenschaft

Tab. 4: Was ist die Höhe einer Pyramide?

T	P	Inhalt
1	I	Was ist denn die Höhe von einer Pyramide?
2	B	(---) die Schiefe, also die Schiefe ((zeigt eine Seitenkante einer vierseitigen Pyramide an)).
3	I	(...) Was meint ihr? Was ist die Höhe bei einer Pyramide?
4	A	Ähm (---), die (---), die (---) ((zeigt eine Seitenkante einer Pyramide an)) wie heißt das jetzt noch?
5	B	Vielleicht auch, Kanten sind das.
6	I	Das wäre zum Beispiel eine Seitenkante.
7	B	Seitenhöhe. [Seiten.
8	A	Wegen] Wegen der Seiten die, dass sie schräg nach oben geht, also die Höhe.

senkrecht in Verbindung gebracht. Das folgende Transkript zeigt einen Interviewausschnitt mit den beiden Lernenden, in dem sie noch einmal mit diesem Widerspruch konfrontiert werden.

Hier wird deutlich, dass die Schüler eine ganze Reihe von Assoziationen zur Höhe in einer Pyramide äußern: Die Höhe entspricht der „[…] Schiefe […]" (T. 2, Tab. 4, entspricht einer Seitenkante); der Kante selbst (dargestellt durch deiktische Verweise in T. 4, Tab. 4); der „Seitenhöhe" (T. 7, Tab. 4) und sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie „[…] schräg nach oben geht […]" (T. 8, Tab. 4).

Auch hier zeigen sich unterschiedliche (im Wesentlichen mathematisch nicht tragfähige) Auffassungen der Höhe im Spannungsfeld von eher struktur- (Höhe als Schiefe) und prozessbezogenen (Höhe geht schräg nach oben) Begriffsauffassungen. Außerdem wird deutlich, wie vielfältig die Assoziationen und Deutungen sein können, die die Lernenden hier vornehmen. Für die Schüler ist es in der obigen Situation überhaupt nicht naheliegend, die Höhe in einer Pyramide als die Länge der Strecke zu deuten, die durch Fällen des Lots von der Pyramidenspitze auf die gegenüberliegende Grundfläche entsteht. Ein solcher (abstrakter) Transfer ist zudem auch aus inhaltlichen Gründen schwierig (siehe Abschnitt Hürden beim Übergang Ebene – Raum). Sowohl die empirischen Beispiele als auch die fachinhaltlichen Betrachtungen machen daher deutlich, dass bei der Thematisierung raumgeometrischer Begriffe in diesem Kontext nicht ohne Weiteres an die Vorerfahrungen der Lernenden aus der ebenen Geometrie angeknüpft werden kann und dass vor dem Hintergrund eine alternative Strukturierung der geometrischen Inhalte notwendig erscheint. Dies geschieht im folgenden Abschnitt auf der Grundlage der empirischen Rekonstruktion des gemeinsamen Gegenstands.

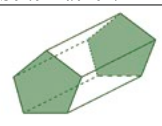
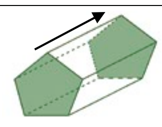
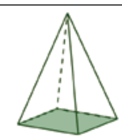
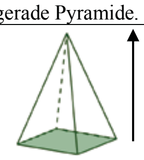
Rekonstruktion des gemeinsamen Gegenstands

Die Tabelle 5 zeigt jeweils zwei Definitionen einer geraden Pyramide und eines geraden Prismas sowohl aus prozess- als auch aus strukturbezogener Perspektive.

Die Definitionen sind jeweils wechselseitig mathematisch äquivalent. Hier wird deutlich, dass es aus mathematischer Sicht keinen Unterschied macht, ob ein Prisma über eine senkrechte Verschiebung eines n-Ecks erzeugt wird (prozessbezogene Ebene) oder über die Betrachtung zweier n-Ecken in parallelen Ebenen (strukturbezogene Ebene).

Auch wenn die empirischen Beispiele der beiden Schüler zum Teil nicht den vollständigen begrifflichen Umfang der hier dargestellten Definitionen abdecken und damit z. T. unvollständig bzw. falsch sind, so lassen sie sich auf der Grundlage der Analysen zum Zusammenspiel struktur- und prozessbezogener geometrischer Begriffe sehr genau den jeweiligen Ebenen zuordnen. Insbesondere muss hier hervorgehoben werden, dass Bens schriftliche Beschrei-

Tab. 5: Mathematisch äquivalente Definitionen geometrischer Körper auf prozess- und strukturbezogener Ebene

Beschreibungsebene	Prisma		Pyramide	
	strukturbezogene Ebene	*prozessbezogene Ebene*	*strukturbezogene Ebene*	*prozessbezogene Ebene*
Definition eines n-seitigen Prismas bzw. einer Pyramide	Ein (gerades) Prisma ist ein ebenflächig begrenzter Körper mit zwei kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden, **n**-Ecken als Grund- und Deckfläche sowie **n** Rechtecken als Seitenflächen.	Verschiebt man ein beliebiges ebenes n-Eck senkrecht zur Ebene des n-Ecks, so entsteht ein n-seitiges gerades Prisma.	Ein Körper, der von einem ebenen n-Eck und von n Dreiecken begrenzt wird, heißt n-seitige Pyramide.	Verschiebt man den Mittelpunkt P eines ebenen n-Ecks senkrecht zur Ebene des n-Ecks (Pyramidenspitze P*) und verbindet P* mit den Eckpunkten des n-Ecks, so entsteht eine gerade Pyramide.
Beispiel einer Abbildung eines fünfseitigen Prismas und einer quadratischen Pyramide				
Beschreibung der Eigenschaften der Definition	In der strukturbezogenen Definition wird das Prisma über die Betrachtung zweier kongruenter n-Ecken in parallelen Ebenen definiert.	In der prozessbezogenen Definition wird das Prisma über die Abbildung (senkrechte Verschiebung) eines n-Ecks definiert.	In der strukturbezogenen Definition wird die Pyramide über die Grundfläche und die Anzahl der Seitenflächen definiert.	In der prozessbezogenen Definition wird die Pyramide über die Abbildung (senkrechte Verschiebung) des Mittelpunkts der Grundfläche definiert.
Exemplarische Schüleräußerungen	Adam: „Eine Grundfläche und drei Seitenfläche und eine Deckfläche." (T. 5, Tab. 2)	Ben: „die Anzahl der Ecken, Kannten sind 5 ecken und 5 Kanten er geht in die Höhe und Hat da Auch noch mall 5 Kanten und 5 ecken" (Abb. 6)	Ben: „(...) insgesamt hat es fünft Ecken und es hat eine Grundfläche (...) und vier Seitenflächen." (T. 7, Tab. 3)	Ben: „(...) vier Kanten unten (...) dann geht's jeweils bei den vier Ecken hoch" (T. 3 & 5, Tab. 3)

bung des fünfseitigen Prismas einer (nahezu) korrekten und vollständigen mathematischen Beschreibung entspricht (Abb. 6).

Vor dem Hintergrund dieser Gegenüberstellung und der empirischen Analyse ergeben sich wichtige Konsequenzen für die Rekonstruktion des gemeinsamen Lerngegenstands. So sind in den beiden beschriebenen Situationen nicht das Prisma bzw. die Pyramide selbst mit ihren jeweiligen mathematischen Eigenschaften die gemeinsamen Gegenstände, sondern vielmehr die jeweiligen prozess- bzw. strukturbezogenen Perspektiven auf die geometrischen Körper. Dies entspricht der Auffassung Feusers (1989), dass nicht die materiell fassbaren Gegenstände (in diesem Falle Prisma bzw. Pyramide) die gemeinsamen Gegenstände sind, sondern der „zentrale Prozess, der hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen steht und sie hervorbringt“ (Feuser, 1989, 32). Die empirische Rekonstruktion der Interaktionsprozesse und die fachdidaktische Analyse zeigen, dass die von den beiden Schülern bearbeiteten gemeinsamen Gegenstände die unterschiedlichen Beschreibungsweisen selbst sind, die zunächst reflektiert, weiterentwickelt und im Verlauf der Interaktion zunehmend konsolidiert werden.

Fazit und Ausblick

Inwiefern können empirische Analysen zum gemeinsamen Lernen zur normativen Spezifizierung des gemeinsamen Gegenstands beitragen? Diese Frage wurde im vorliegenden Beitrag konstruktiv für ein Beispiel aus dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I im Rahmen der Betrachtung eines Fallbeispiels bearbeitet. Hinsichtlich der empirischen Frage, wie sich gemeinsame Lernprozesse vollziehen, konnte für die beiden beteiligten Schüler herausgearbeitet werden, inwiefern sich jeweils spezifische (prozess- und strukturbezogene) Zugänge zu den mathematischen Objekten im Verlauf des Arbeitsprozesses herausgebildet haben. Die individuellen Zugänge sind dabei maßgeblich durch die soziale Situation beeinflusst und die spezifischen sozialen Rollen (etwa als Sprachvorbild) und die interaktionsbezogenen Charakteristika (etwa durch die bewusste Trennung der beiden Ebenen durch die Schüler) machen deutlich, inwiefern sich die kooperative Arbeitssituation auf die individuellen mathematischen Begriffsbildungen auswirken. Durch die genaue empirische Betrachtung konnte auch gezeigt werden, dass der gemeinsame Gegenstand nicht die geometrischen Objekte selbst (Prisma, Pyramide) sind. Vielmehr zeigt die empirische Betrachtung, dass die prozess- und strukturbezogenen Perspektiven auf diese Objekte den gemeinsamen Gegenstand ausmachen, an dem die Lernenden hier arbeiten.

Schließlich zeigen sowohl die fachlichen Betrachtungen als auch die empirischen Ergebnisse, dass ein Anknüpfen an zweidimensionale geometrische Vorerfahrungen bei der Beschäftigung mit dreidimensionalen Objekten mit begrifflichen Hürden verbunden sein kann. Hier kann die (empirische) Klärung des gemeinsamen Gegenstands für die (normative) fachliche Restrukturierung einen entscheidenden Beitrag leisten: Passender als eine Übertragung bekannter Konzepte (etwa des Höhenkonzepts) von zwei- auf dreidimensionale Konfigurationen erweist sich vor dem Hintergrund der vorliegenden Daten eher die Gegenüberstellung von struktur- und prozessbezogenen Aspekten der geometrischen Begriffe selbst.

Hier verorten wir einen der wesentlichen Beiträge der fachdidaktischen Perspektive bei der Beforschung des gemeinsamen Lernens am gemeinsamen Gegenstand: Die fachliche (Re-)Strukturierung der Inhalte (Was ist der gemeinsame Gegenstand?) erfolgt auf empirischer Grundlage (Wie vollzieht sich gemeinsames Lernen?) und liefert zugleich Erkenntnisse über die Mathematik selbst.

Schlüsselwörter

gemeinsames Lernen, gemeinsamer Gegenstand, Geometrieunterricht, Interaktionsprozesse, Inklusive Fachdidaktik, Wechselspiel zwischen strukturell- und bedeutungsbezogenen Konzepten

Abstract

The article discusses the impact of didactical analysis on the research on joint tuition on a common object. A case study about joint geometry lessons in secondary level tuition shows the normative issue of characterising the common object in relation to the empirical task of reconstructing the joint learning process. The empiric data indicate that the common topic in this study is hardly characterised by the present objects. Rather, the perspectives the learners take on the object itself represent the common tuition topic.

Keywords

joint lessons, common object, geometry, processes of interaction, inclusive teaching methodology

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.). (2012). *mathewerkstatt.* Berlin: Cornelsen.

Beck, C. & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14(2), 147-179.*

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Feuser, G. (1989). Allgemeine integrative Pädagogik und entwicklungslogische Didaktik. In *Behindertenpädagogik 28, 4-48.*

Feuser, G. (1998). *Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand: Didaktisches Fundamentum einer Allgemeinen (integrativen) Pädagogik.* In A. Hildenschmidt & I. Schnell (Hrsg.), Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle (S. 19-35). Weinheim: Juventa.

Feuser, G. (2013). *Inklusive Bildung – ein pädagogisches Paradoxon. Manuskript zu einem Vortrag auf der Jahrestagung 2013 der Leibniz-Sozietät.* Potsdam. URL: http://www.georg-feuser.com/conpresso/_data/Feuser_G_-_Inklusive_Bildung_-_ein_p_dagogisches_Paradoxon_17_07_2013.pdf [08.03.17].

Freudenthal, H. (1974). Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8(6), 122-124.*

Hattermann, M. (2015). *Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie.* In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (S. 75-86). Wiesbaden: Springer.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Mathematiklernen im Spiegel von Heterogenität und Inklusion. *Mathematik differenziert, 4(2), 6-8.*

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2015). *Aufgabenformate für einen inklusiven Arithmetikunterricht.* In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. Lüken (Hrsg.), Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule (S. 58-74). Offenburg: Mildenberger.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and structuring mathematical topics – a four-level approach for combining formal, semantic, concrete, and empirical levels exemplified for exponential growth. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37(Suppl. 1), 33-67.*

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* Beschlüsse der Kultusministerkonferenz vom 4. Dezember 2003. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [21.12.16].

Kniffka, G. M. & Neuer, B. S. (2008). *„Wo geht's hier nach ALDI?" – Fachsprachen lernen im kulturell heterogenen Klassenzimmer.* In A. Budke (Hrsg.), Interkulturelles Lernen im Geographieunterricht (S. 121-135). Potsdam: Universitätsverlag Potsdam.

Krähnemann, H., Labhart, D., Schnepel, S., Stöckli, M. & Moser Opitz, E. (2015). *Gemeinsam lernen – individuell fördern: Differenzierung im inklusiven Mathematikunterricht.* In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. Lüken (Hrsg.), Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule (S.43-57). Offenburg: Mildenberger.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Moser Opitz, E. (2014). Inklusive Didaktik im Spannungsfeld von gemeinsamem Lernen und effektiver Förderung. Ein Forschungsüberblick und eine Analyse von didaktischen Konzeptionen für inklusiven Unterricht. *Jahrbuch für allgemeine Didaktik, 4(3), 52-68.*

Prediger, S. (2016). *Inklusion im Mathematikunterricht: Forschung und Entwicklung zur fokussierten Förderung statt rein unterrichtsmethodischer Bewältigung.* In J. Menthe, D. Höttecke, T. Zabka, M. Hammann & M. Rothgangel (Hrsg.). Befähigung zu gesellschaftlicher Teilhabe. Beiträge der fachdidaktischen Forschung. Münster: Waxmann, 361-372.

Rottmann, T. & Peter-Koop, A. (2015). *Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand als Ziel inklusiven Mathematikunterrichts.* In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. Lüken (Hrsg.), Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule (S. 5-9). Offenburg: Mildenberger.

Scherer, P. (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht der Grundschule – Anforderungen und Möglichkeiten aus fachdidaktischer Perspektive.* In T. Häcker & M. Walm (Hrsg.), Inklusion als Entwicklung – Konsequenzen für Schule und Lehrerbildung (S. 267-284). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.*
Steinbring, H. (1999). Epistemologische Analyse mathematischer Kommunikation. In *Beiträge zum Mathematikunterricht, 515-518.*
UNESCO (2005). Guidelines for Inclusion: Ensuring Access to Education for All. URL: http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001402/140224e.pdf [16.12.2016].
Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen-Förderbaustein: Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren, (ML) 166, 8-14.*
Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik 3, 175-204.*
Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29(4), 355-374.*
Wocken, H. (1998). Gemeinsame Lernsituationen. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), Integrationspädagogik (S. 37-52). Weinheim, München: Juventa.
Wollring, B. (2012). Raumvorstellung entwickeln. *Fördermagazin 2, 8-12.*

Prof. Dr. Florian Schacht
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
Tel.: 0201 183-3837
florian.schacht@uni-due.de

Ruth Bebernik
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
Tel.: 0201 183-7495
ruth.bebernik@uni-due.de