Mathematische Analyse multiplikativer Viskoplastizität

Vom
Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation
von

Dipl. Math. Patrizio Neff
aus Mosbach/Baden

Referent:	Prof. Dr. H.D. Alber
Korreferent:	Prof. Dr. E. Meister
Tag der Einreichung:	22.Oktober 1999
Tag der mündlichen Prüfung:	4. Februar 2000

Fachbereich Mathematik

Technische Universität
Darmstadt
D 17

Vorwort

Diese Arbeit ist der Ertrag meiner jetzt 4 jährigen Beschäftigung mit mathematischen Problemen aus dem Gebiet der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie. Allen denjenigen, die mir in der einen oder anderen Weise während der Entstehung der Arbeit halfen, sei hier gedankt.

An erster Stelle möchte ich Prof. Alber herzlich für die mir eröffnete Möglichkeit danken, bei Ihm auf diesem Gebiet zu forschen. Er hat mir jederzeit volles Vertrauen geschenkt und mir die Freiheit gelassen, tatsächlich ausgetretene Pfade zu verlassen und mathematisches Neuland zu betreten. Dies um so mehr dann, als sich die dabei nicht ausbleibenden Mißerfolge und Rückschläge einstellten.

Herrn Prof. Meister danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Meinen Kollegen Dr.Christoph Chelminski und Dr. Stefan Ebenfeld sage ich ein Dankeschön für die mir gewährte wertvolle Unterstützung und die andauernde Bereitschaft, meine mathematischen Probleme mitzudurchdenken. Stefan Ebenfeld steuerte manch ein Gegenbeispiel bei und half mir beim physikalischen Verständnis. Christoph Chelminski nahm die Mühe auf sich und las eine Vorversion Korrektur.

Bei den übrigen Mitgliedern der Arbeitsgruppe: I. Jäpel, M.Franzke, R.Baalean, A. Fröhlich, I. Zahn und W. Pompe bedanke ich mich für das produktive Arbeitsklima und das ein oder andere aufmunternde Wort und die rege Anteilnahme am Fortschritt der Arbeit. Genauso schließe ich in meinen Dank auch die Sekretärinnen der Arbeitsgruppe: Frau Schlaf, Frau Röder und Frau Tabbert ein.

Frau Dr. S. Reese danke ich für die Zeit, die sie sich nahm, um einem Mathematiker die ingenieurmäßige Modellierung zu erläutern. Derselbe Dank gebührt den Prof. Haupt, Kollmann, Tsakmatis und Dr. Sansour.

Während der Arbeit an dieser Dissertation wurde ich erst durch ein Stipendium des Hessischen Staates unterstützt; danach war ich Mitarbeiter am SFB 298: Deformation und Versagen bei metallischen und granularen Strukturen. Zurzeit bin ich Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt. Den genannten Organisationen gilt ebenfalls mein Dank.

Meiner Mutter gilt ein besonderes Dankeschön: erst Sie gab mir die Möglichkeit, in der gebotenen Ruhe an meiner wissenschaftlichen Qualifikation zu arbeiten.

Danke sage ich nicht zuletzt meiner Frau Florence, die während der Entstehung der Arbeit auf manch ein gemeinsames Wochenende oder gemeinsamen Urlaub verzichtete und mich immer wieder neu anspornte.

Reims, den 11. August 1999, dem Tag der Sonnenfinsternis in Mitteleuropa,

Patrizio Neff

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Heutzutage werden sichere Aussagen zur Belastbarkeit von Strukturen und Materialien, sowie zu deren Langzeitverhalten unter dauerhafter Beanspruchung, immer wichtiger. Unsere Technik stellt dabei immer höhere Anforderungen an die verwendeten Bauteile und Materialien.

Viele damit zusammenhängende Probleme sind nur eingeschränkt dem Experiment zugänglich. Sei es, daß gewisse Größen, wenn überhaupt, nur ungenügend zu beobachten sind, sei es, daß man Mangels ausreichender Zeit das Langzeitverhalten nicht experimentell überprüfen kann.

Es ist deshalb notwendig, durch eine geeignete Modellbildung und anschließender Simulation am Rechner, qualitative Einsichten über die je beteiligten Prozesse zu erlangen.

In dem hier betrachteten Kontext findet diese Modellbildung im Rahmen der Ingenieurwissenschaften unter den Rubriken: Bruch- und Rißmechanik, Plastizität, Elastizität, Verformung, Deformation etc. statt und sie wird z.Bsp. im Sonderforschungsbereich 298 (Deformation und Versagen bei metallischen und granularen Strukturen) intensiv untersucht.

In jüngster Zeit ist die Einsicht gewachsen, daß es für ein vertieftes Verständnis der zugrundeliegenden Prozesse nicht ausreicht, lineare oder linearisierte Modelle zu betrachten; vielmehr zeigen erst voll nichtlineare Modelle qualitativ ähnliches Verhalten wie reale Systeme oder Materialien.

Damit Hand in Hand einhergehend konnte die Leistungsfähigkeit der numerischen Berechnungen derart gesteigert werden, daß jetzt erstmals volle 3-dimensionale nichtlineare Strukturen auf dem Computer aufgelöst werden können.

Bei den hier zu betrachtenden Modellen werden wir uns auf den rein phänomenologischen Zugang beschränken, das heißt, die Modelle sollen das beobachtbare Verhalten wiederspiegeln, ohne eine vollgültige Erklärung der beteiligten Mechanismen auf der Mikroebene geben zu wollen.

Solche Modelle beschreiben deshalb üblicherweise das beobachtbare Materialverhalten mithilfe zusätzlicher, sogenannter innerer Variablen, so daß unterstellt wird, eine Kenntnis dieser inneren Variablen bestimme das Materialverhalten zur Gänze. Diese inneren Variablen werden zur Beschreibung des Prozessablaufes gewöhnlich einer Evolutionsgleichung unterworfen.

In dieser Arbeit möchten wir Eigenschaften von solchen aktuell benutzten Modellen aus der Theorie der finiten Elasto-Plastizität mathematisch untersuchen. Dabei hoffen wir, daß mathematische Konsequenzen selbst wieder in die Formulierung der Ingenieurmodelle eingehen.

Aus dem Geschilderten wird klar, daß die Arbeit im Spannungsfeld zwischen angewandter Mathematik und den Ingenieurwissenschaften anzusiedeln ist. Sie ist notwendig interdisziplinär, woraus sich erhellt, daß Teilgebiete der Arbeit Bereiche umfassen, die einerseits dem Mathematiker geläufig sind, dem Ingenieur aber nicht und andererseits Prinzipien der Ingenieurmodellierung wiederholt werden, die ihrerseits dem Mathematiker unbekannt sind. So wird sichergestellt, daß die Arbeit als Ganzes von angewandten Mathematikern sowie von auf diesem Gebiet tätigen Ingenieuren prinzipiell verstanden werden kann. Jedweder Leser mag die entsprechenden Teile übergehen.

1.2 Blick auf den Forschungstand in der Plastizität

Wir beschreiben hier, wie der Stand der Forschung auf dem Gebiet der Beschreibung großer plastischer Deformationen aus dem Blickwinkel eines Mathematikers aussieht.

In der Ingenieur-Literatur geht man etwa beginnend mit [Lee69] von einem lokalen multiplikativen Split des Deformationsgradienten F in einen elastischen Anteil F_e und einen plastischen Anteil F_p aus, so daß in jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt

$$F(x) = F_e(x) \cdot F_p(x)$$

Dieser Split wird heutzutage weitgehend akzeptiert, wobei es noch unterschiedliche Interpretationsvarianten gibt, siehe auch [BdG94]. Konkrete Modellformulierungen sowie numerische Rechnungen finden sich z.Bsp. in [Mie92, Mie95, SK96, SO85, Sim88a, Sim88b, Sim98, SH98, Sve98, Hau85, LHH97]. Der beschriebene Split ist nicht nur phänomenologisch brauchbar, sondern kann auch aus mikromechanischen Prinzipien für Kristallgitterstrukturen motiviert werden.
[Kon55, Krö63, Krö92]. In diesem Zusammenhang ist auch klar, daß F_e, F_p i.A inkompatibel sein müssen, also nicht als Gradienten darstellbar sind.

Zusammen mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik (sei es in der Form Müller/Liu oder Coleman/Noll) und dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation [Dru51] werden im einfachsten Fall (reine Plastizität ohne Verfestigung und ohne Temperaturabhängigkeit) Fließregeln (Evolutionsgleichungen) für gewisse plastische Variablen aufgestellt. Da die obige multiplikative Zerlegung formal nicht eindeutig bestimmt ist [Hau85] (es können lokal beliebige Drehungen zwischengeschaltet werden) gibt es einerseits Formulierungen, die diese Unbestimmtheit auch auf die Fließregel übertragen und daher Evolutionsgleichungen aufstellen, die auch nur Größen bis auf beliebige Drehungen bestimmen, was im Wesentlichen darauf hinausläuft $C_p = F_p^T F_p$ einer Evolutionsgleichung zu unterwerfen. Solche Formulierungen finden sich z.Bsp. bei [Hau85, Mie92, Sim88b]. Man spricht dann auch von der Invarianz der sogenannten plastischen Zwischenkonfiguration.

Andere sehen F_p selbst als materielle Größe an die eindeutig bestimmt ist und schreiben dafür eine Evolutionsgleichung vor, wie z.Bsp. in [SK96]. Daß beide Formulierungen Prinzipien der materiellen Objektivität/Kovarianz nicht verletzen dürfen, versteht sich von selbst und wird durch Verwendung von kovarianten Lie-Ableitungen [MH83, AMR83] auf den passenden Mannigfaltigkeiten sichergestellt. Die entstehende Evolutionsgleichung hat dann prinzipiell eine Form der Art

$$\dot{P} \cdot P^{-1} = f(\nabla u, P)$$

wobei P hier für die plastische Variable steht.

Standardimplementationen gehen der Einfachheit halber zusätzlich noch davon aus, daß das gesamte Modell isotrop ist. Einige Modellformulierungen sind auch nur unter dieser Annahme statthaft. Tatsächlich ist die konsistente Formulierung anisotropen Materialverhaltens (Anisotropie in der Fließregel oder/und in der elastischen Energie) noch Gegenstand aktueller Forschung [TH97].

Zusammen mit den Gleichgewichtsgleichungen hat man ein gekoppeltes System von partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen. Dieses System wird in den konkreten Rechnungen noch dahingehend vereinfacht, daß man den Einfluß der Beschleunigung vernachlässigt und nur den sogenannten quasistatischen Fall betrachtet.

Während die Ingenieurwissenschaft großen Wert auf die Identifizierung der plastischen Variablen und nachfolgend deren Evolutionsgesetzen legt, werden der Auswahl des konstitutiven Gesetzes, welches Spannungen und Dehnungen verknüpft (im hyperelastischen Fall also der Auswahl der Energie) weniger Beachtung geschenkt. Üblicherweise wird nur sichergestellt, daß die elastische Energie materiell objektiv und isotrop ist und daß die Identität $\mathbb{1}$ eine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen zu homogenen Dirichlet-Randdaten ist. Dies erklärt sich zum einen damit, daß in konkreten numerischen Rechnungen doch wieder vollständig linearisiert wird und zu einem anderen Teil damit, daß gewisse Energien (z.Bsp. def. in $\ln C$) bei der numerischen Implementation formal leichter handhabbar sind [Mie92, SK96], beispielsweise bei Formulierungen im Hauptspannungsraum.

Viele der genannten Arbeiten beschränken sich bei der numerischen Behandlung auf kleine elastische Deformationen, wie sie üblicherweise in der Metallplastizität auftreten. Es gibt jedoch auch Arbeiten zu großen elastischen (und großen plastischen) Deformationen [RW97, Ree97] wie sie z.Bsp. bei der Modellierung von Gummireifen auftreten können.

Der weitverbreitete Return-Mapping Algorithmus soll in Verbindung mit effizienten FEM-Verfahren geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten, wie es gerade in der Metallplastizität auftritt, numerisch auflösen. Für das volle geometrisch und physikalisch nichtlineare Problem des ideal-plastischen Materialverhaltens steht ein Existenzbeweis allerdings noch aus. Die Ergebnisse des Return-Mapping Algorithmus sind jedoch qualitativ konsistent mit den Beobachtungen. Ein Hauptanliegen der Numerik ist die effiziente Berechnung 3-dimensionaler elasto-plastischer Strukturen. Aufgrund der Komplexität des zugehörigen Systems von partiellen Differentialgleichungen und gewöhnlichen Differentialgleichungen gestalten sich konkrete Rechnungen noch als sehr aufwendig [Fri97]. Mathematisch einfacher sind visko-plastische Regularisierungen des ideal- plastischen Materialverhaltens zu behandeln.

1.3 Blick auf den Forschungstand in der Elastizitätstheorie

Die Formulierung der Elastizitätstheorie für große Deformationen kann als abgeschlossen gelten. [MH83, Cia88, Ogd83, Han85] Die bahnbrechenden Arbeiten von Ball [Bal77b, Bal77a] öffneten den Weg zu direkten Existenzbeweisen von Minima zu sogenannten polykonvexen Energien. Beispielsweise sind Energien vom Ogden-Typ [Ogd72a, Ogd72b] polykonvex. Solche Energien beschreiben ideal-gummiartiges Material auch für große elastische Deformationen hinreichend gut. Die direkten Methoden der Variationsrechnung (Idee: Lösung der Gleichgewichtsgleichung als Minimum eines zugehörigen Variationsfunktionals über einem passenden Funktionenraum identifizieren) sichern jedoch nur die Existenz eines Minimums; zu Fragen der Stabilität und Regularität von Lösungen geben sie keine Antwort, genausowenig zur Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen. Die Frage nach der Regularität der Lösungen von strikt elliptischen nichtlinearen Systemen ist dahingehend beantwortet, daß im Allgemeinen Lösungen nicht glatt sind. Selbst in einfachsten Fällen (quadratische Energie) existieren Gegenbeispiele [GM68, Gia93]. Wie weit diese negativen Resultate Systeme der Elastizitätstheorie berühren, ist dem Autor noch unklar. Es kann jedoch für eine große Klasse von Variationsproblemen gezeigt werden, daß Lösungen regulär (glatt) bis auf eine Nullmenge sind (Partial Regularity [Eva86, CE86, Gia93]). Jedoch reicht diese Art von Regularität nicht aus, um zum Beispiel das Variationsproblem mit einer Evolutionsgleichung zu koppeln. Volle Regularität kann jedoch mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen für kleine Randdaten und kleine Körperkrafte gezeigt werden [Val88, Cia88]. In dieselbe Richtung geht eine Arbeit von [Zha91] die zeigt, daß für kleine Daten das Minimum des Variationsproblems mit der Lösung der Euler-Lagrange Gleichung, gefunden mit dem Satz über implizite Funktionen, übereinstimmt. Erwähnt werden soll hier auch die Schwierigkeit zu zeigen, daß Minima des Variationsproblems überhaupt schwache Lösungen der zugehorigen Euler-Lagrange Gleichungen sind [BM84b]. Nur mit restriktiven Wachstumsbedingungen an die elastische Energie konnte bis jetzt gezeigt werden, daß das Variationsfunktional differenzierbar ist. Diese Wachstumsvoraussetzungen schließen aber das gewünschte singuläre Verhalten der Energie in $\det \nabla u$ aus, nämlich $W(F) \to \infty$ wenn $\det F \to 0$.

Ein aktuell untersuchtes Gebiet ist die Frage der Minimierung von solchen Energien, die nicht schwach unterhalbstetig sind, die aber oszillierende Minimalfolgen zulassen, welche zu einer sogenannten Mikrostruktur führen [Li96]. Insbesondere ist die St.Venant-Kirchhoff Energie nicht schwach unterhalb-stetig. Trotzdem konnte die Existenz eines Minimums gezeigt werden, allerdings um den Preis einer einschränkenden Bedingung an die Randdaten [BT97]. Noch weitgehend offen ist der Zusammenhang zwischen der so entstehenden Mikrostruktur und dem Einsetzen und der Modellierung der Plastizität. Der Autor hofft, seine Untersuchungen später darauf auszudehnen. Davon zu trennen ist der Begriff Mikrostruktur, wie er oft im Ingenieurskontext verstanden wird und welche Mittels Homogenisierung behandelt werden kann [Alb99].

Es erweist sich hier, daß Existenzresultate der Variationsrechnung zu polykonvexen Energien gut zu ideal-elastischen Materialien passen; eben idealem Gummi (denn diese Formulierung garantiert für alle! Randdaten die Existenz eines Energieminimums). Solche Materialien sollten daher auch unbedingt mit polykonvexen Energien modelliert werden. Anders sieht die Frage nach der „richtigen“ elastischen Energie für Metalle und Stahl aus: hier erwartet man nicht, daß Stahl zu allen Randbedingungen elastisch reagiert, vielmehr wird Plastizität eintreten oder Rißbildung einsetzen. Welche Energie hier für insgesamt große Deformationen passend ist, muß noch offen bleiben. Mathematisch fast noch überhaupt nicht untersucht ist die Kopplung von finiter Elastizität und finiter Plastizität auf der Basis der multiplikativen Zerlegung $F = F_e \cdot F_p$ [Tal94]. Diese Arbeit soll einen Beitrag gerade dazu liefern.

1.4 Blick auf den Forschungsstand für Modelle mit kleinen elastischen und kleinen plastischen Deformationen

Es existiert eine Vielzahl von Modellen für die geometrisch lineare aber physikalisch nichtlineare Theorie, damit meinen wir eine lineare Gleichgewichtsgleichung in $\epsilon - \epsilon_p$, aber eine nichtlineare Evolutionsgleichung für ϵ_p. Hier liegt das Hauptaugenmerk der Untersuchungen von mathematischer Seite auf globalen Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit des vollen dynamischen Problems. Wesentliche Forschungsbeiträge dazu wurden von Alber [Alb94, Alb95, Alb98] und Chelminski [Che95, Che96, Che97, Che98, Che99] geleistet. Deren Arbeiten stützen sich auf die Monotonie des zugrundeliegenden gekoppelten Systems in gewissen Funktionenräumen. Solche Methoden haben aber eine eingeschränkte Anwendbarkeit, denn die allermeisten Modelle die hier betrachtet werden, sind Aufgrund der zusätzlichen Kopplung mit anderen inneren Variablen nicht monoton. Allerdings konnte gezeigt werden, daß gewisse Klassen von Modellen auf diese monotone Form transformiert werden können [Alb98] und sie deshalb mit den erwähnten Methoden behandelbar sind. Chelminski konnte die globalen Resultate sogar auf Lipschitz-gestörte monotone Probleme ausdehnen [Che99].

Das quasistatische Problem ist entgegen aller Vermutung nicht einfacher als das dynamische Problem zu behandeln, ja es hat den Anschein, als sei das dynamische Problem eine Regularisierung des quasistatischen Problems [Suq80]. Existenzresultate finden sich z.Bsp. in [Suq80, Suq81, Suq84, IS93]. In [IS93] wird unter der Voraussetzung der Existenz einer globalen Lipschitz-Konstante in der rechten Seite der Evolutionsgleichung globale Existenz bewiesen. Dies ist jedoch i.A. eine zu starke Voraussetzung. Insbesondere das ratenunabhängige ideal-plastische Verhalten kann damit nicht erfasst werden. Ausserdem ist nicht klar, wie sich die Lösungen in Abhängigkeit von der Lipschitz-Konstante benehmen.

Eine davon verschiedene Methode zur Behandlung der geometrisch linearen Probleme liegt darin, das gekoppelte System als Variationsungleichung aufzufassen. In [HRS97, HR99] wird dieser Weg beschritten und führt prinzipiell zu ähnlichen Resultaten wie die beschriebene Monotoniemethode.

Allen Methoden gemeinsam ist jedoch, daß sie wesentlichen Gebrauch von der linearen Struktur der Gleichgewichtsgleichungen machen und es unklar ist, wie sich diese Methoden auf den vollen nichtlinearen Fall übertragen. In diesem Fall ist es dann höchst zweifelhaft, ob man überhaupt ein monotones Modell formulieren könnte.

1.5 Art und Umfang der Arbeit

Obwohl keine gesonderte Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik, noch in die Grundlagen der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie erfolgt, werden für die Arbeit relevante Prinzipien und Überlegungen dargestellt, derart, daß Leser mit Kenntnissen der Theorie kleiner Deformationen leicht einen Einstieg finden können.Für Leser ohne Vorkenntnisse sei auf [LC85, CS82, Gur81] verwiesen.

Von einer Darstellung der Grundlagen der Tensoranalysis auf Mannigfaltigkeiten sahen wir grundsätzlich ab, der interessierte Leser sei auf [MH83, AMR83] verwiesen. Darüberhinaus war es vorteilhaft, konsequent in der Referenzkonfiguration zu arbeiten und den 1.Piola-Kirchhoff Spannungstensor zu verwenden.

Ein gewisser Aufwand wurde getrieben, um die Darstellung möglichst indexfrei zu halten.

Nach der Festlegung der Notation in Kapitel 2 beginnen wir mit derFormulierung des vollen dynamischen Problems in Kapitel 3 und leiten über zu den in dieser Arbeit untersuchten Gleichungssystemen. Für eilige Leser formulieren wir schon hier unseren Hauptsatz über die Existenz einer lokalen Lösung und führen den Beweis, der sich dann auf in folgenden Kapiteln bereitgestellte Mittel bezieht. Der lokale Existenzsatz ist für den allgemeinen Fall großer elastischer und großer plastischer Deformationen formuliert. Deshalb mussten zum Teil sehr starke Voraussetzungen gemacht werden.

Das Kapitel 4 stellt wiederholt benötigte bekannte Eigenschaften aus der linearen Algebra bereit. Das folgende Kapitel 5 behandelt schon erste einfache Konzepte der Plastizität und deren Konsequenzen.

Das Kapitel 6 widmet sich dem multiplikativen Split $F = F_e\ F_p$ näher und untersucht verschiedene Linearisierungskonzepte, die damit in Zusammenhang stehen.

Kapitel 7 beschreibt das Konzept des Spannungstensors sowie der Dissipationsungleichung.

Kapitel 8 schließlich motiviert die verwendeten Evolutionsgleichungen für den geometrisch nichtlinearen Fall, die vom Hauptsatz abgedeckt werden. Im großen und ganzen kann jede visko-plastische Regularisierung behandelt werden.

Ziel des Kapitels 9 ist es, einen abstrakten Rahmen bereitzustellen, in dem der lokale Existenzsatz bewiesen werden kann. Die lokale Lösung wird als Fixpunkt mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes bestimmt. Dabei ist dieser Fixpunktsatz nach Wissen des Autors die allgemeinste Methode, um lokale Existenzsätze zu Evolutionsgleichungen in unendlichdimensionalen Banachräumen zu zeigen, sofern die Evolutionsgleichung keine zusätzliche Struktur besitzt, wie sie z.Bsp. die Monotonie darstellen würde.

Kapitel 10 stellt nur bekannte Eigenschaften der Faltung/Mittelwertbildung bereit.

Das Kapitel 11 ist ganz der formalen Differentialrechnung für auf Matrizen definierten Funktionen gewidmet: es werden 1. und 2. Ableitungen zu einem ganzen Satz von Funktionen bestimmt.

Kapitel 12 untersucht die verschiedenen Eigenschaften des Elastizitätstensors und betrachtet deren Kopplung mit der multiplikativen Aufspaltung.

Die Kapitel 13,14,15 kreisen um die Frage der Stabilität von Lösungen zu Minimierungsproblemen, sowie deren Abhängigkeit von Parametern und Randbedingungen.

In Kapitel 13 untersuchen wir das Stabilitätskonzept von [Koi65, Koi76, Koi80], welches vereinfacht ausgedrückt besagt, daß Energieminima stabil sind. Bis jetzt konnte aber nur gezeigt werden [BM84a, BKM77], daß strikte Energieminima stabil sind. Für gewisse Klassen von Energien wird in Kapitel 13 gezeigt, daß Energieminima wenigstens richtungsstrikt sind. Die gestellte Hauptfrage bleibt allerdings weiterhin offen: kann es sein, daß ein Energieminimum zu einer strikt polykonvexen Energie unter geigneten Wachstumsvoraussetzungen doch nicht strikt ist?

In Kapitel 15 zeigen wir einen Spezialfall einer verallgemeinerten Kornschen Ungleichung, welche im Zusammenhang mit einer Linearisierung der Gleichgewichtsgleichungen in F_e bzw. der Quadratifizierung der freien Energie in F_e von Nutzen sein könnte.

Kapitel 16 untersucht die Differenzierbarkeit des Variationsfunktionals in gewissen Funktionenräumen.

In Kapitel 17 präsentieren wir eine Standardanwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung erweitert auf Probleme mit multiplikativem Split.

Das Kapitel 18 stellt verschiedene Energien vor und untersucht sie auf Elliptizität und Polykonvexität. Das ist von großer Wichtigkeit, denn zu nicht elliptischen Problemen gibt es überhaupt keine allgemeine Lösungsstrategie.

Leitende Idee dieser Arbeit ist der Begriff der Polykonvexität. [Bal77b, Bal77a] Sie garantiert die Existenz von Lösungen zu bestimmten nichtlinearen Minimierungsproblemen. Da der multiplikative Split, wie wir zeigen, die Polykonvexität nicht zerstört, lag es nahe, polykonvexe Variationsprobleme mit einer Evolutionsgleichung für F_p bzw. C_p zu koppeln, wobei das Variationsproblem über die Energie noch vom Parameter F_p bzw. C_p abhängt. Daher musste die Stabilität der Lösungen zu Variationsproblemen studiert werden, die noch von einem Parameter abhängen. Dies geschieht gerade in den Kapiteln 13,14,15. Außerdem musste sichergestellt werden, daß die Energie auch für große elastische Deformationen bei eingefrorener Plastizität auf ein korrekt gestelltes elastisches Problem führt. Da, wie schon bemerkt, Lösungen des nichtlinearen Variationsproblems nicht glatt sein müssen, (In besonderen Fällen doch:[Kos95]) war es notwendig, die Rückkopplung über den Deformationsgradienten F oder den Spannungstensor $S(F)$ in die Evolutionsgleichung künstlich zu glätten (nichtlokale Abhängigkeit:[Eri78]). Genauso kann mit den verwendeteten Methoden nur eine visko-plastische Formulierung behandelt werden, ratenunabhängiges Verhalten scheidet aus. Desweiteren müssen wir auch ein singuläres Verhalten der Energie für $\det F \to 0$ ausschließen.

Die hier vorgestellte Betrachtung schließt nicht aus, daß eine Lokalisierung in sogenannten Scheerbändern eintreten könnte, denn die Deformation selbst liegt nur in $W_1^p(\Omega)$ mit $p > 3$, womit Sprünge im Deformationsgradient erlaubt bleiben. Hingegen sind Slip-lines, das sind Sprünge in der Deformation selbst, aus demselben Grund ausgeschlossen.

1.6 Ausblick und offene Fragen

Mit derselben Herangehensweise sollten sich auch weitere innere Variablen, wie z.Bsp. Verfestigungsvariablen, dem Modell beifügen lassen. Es ist dann nur darauf zu achten, daß die Rückkopplung der Deformation auch in den zusätzlichen Evolutionsgleichungen geglättet wird und diese Variablen nicht direkt in das Variationsfunktional eingehen oder additiv entkoppeln,d.h $W(F_e, z) = W_1(F_e) + W_2(z)$.

Wie man Temperatureffekte mit dieser Methode behandeln sollte, ist völlig offen, denn durch eine Diffussionsgleichung wird die Struktur des Problems tiefgreifend verändert.

Daß man Probleme mit dead-load Körperkräften auch behandeln kann, versteht sich von selbst.

Interessant wird das Studium des Langzeitverhaltens des gekoppelten Problems bei festgehaltenen Randbedingungen sein. Ergebnisse daraus könnten für den ratenunabhängigen, ideal-plastischen Fall relevant werden. Ähnlich wie im eindimensionalen Fall sollte man erwarten, daß das gekoppelte Problem dann auf einen asymptotischen Zustand hin relaxiert.

Weiterer Klärungsbedarf besteht über die Form der sinnvoll zu verwendenden Energien. Damit steht auch die Kopplung der plastischen Variable in der Energie zur Diskussion: oft wird ein additiver Split im Sinne von $E_e = E - E_p$ verwendet [GN65, Nag90] , der sich aber nicht in das vorgestellte Schema einpasst, denn für große elastische Deformationen kann in dieser Form die Polykonvexität zerstört werden.

Eine weitere offene Frage betrifft die Metallplastizität. Das Problem aus 6.4 sollte eingehender betrachtet werden; ist es möglich, die Energie in F_e zu quadratifizieren und gleichzeitig eine invariante Evolutionsgleichung für C_p zu verwenden? Wäre das so entstehende Problem global koerziv und strikt konvex? Gibt es eine andere Möglichkeit, den in der Metallplastizität beobachteten Tatbestand kleiner elastischer Deformationen in die Gleichungen a priori einzubauen, so daß die mathematische Behandlung des zugehörigen Gleichungssystems signifikant einfacher ist, als im vollen nichtlinearen Fall, ohne auf das Modell für kleine elastische und kleine plastische Deformationen hinauszulaufen?

Die Beantwortung dieser Fragen würde unzweifelhaft zu einem vertieften Verständnis in der Modellbildung und der numerischen Implementation beitragen.

Kapitel 2

Notation

2.1 Lineare Algebra

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$p, q, r, s \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3$ dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, der mit seinem Dual identifiziert wird.

$\mathbb{M}^{3\times 3}$ Menge aller reellen 3×3 Matrizen

$\mathbb{S}ym(3)$ Menge aller reellen symmetrischen 3×3 Matrizen

$P\mathbb{S}ym(3)$ Menge aller reellen positiv definiten symmetrischen 3×3 Matrizen

$P\mathbb{S}ym_0(3)$ Menge aller reellen positiv semi-definiten symmetrischen 3×3 Matrizen

$O(3)$ Menge aller reellen orthogonalen 3×3 Matrizen

$Gl(3, \mathbb{R})$ Menge aller reellen invertierbaren 3×3 Matrizen

$1\!\!1$ Einheitsmatrix auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$

Id identische Abbildung zwischen Vektorräumen

η, ξ Vektoren in $\mathbb{R}^3$

A, B, C, H reelle 3×3 Matrizen

R, Q reelle orthogonale 3×3 Matrizen

$A.h$ lineare Abbildung A angewandt auf h

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ zugeordnete euklidische Vektornorm

$\otimes$ Tensorprodukt für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$

$\eta \otimes \xi$ rank-one Matrix

A^T transponierte Matrix

A^{-1} inverse Matrix

I_1, I_2, I_3 drei skalare Invarianten einer 3×3 Matrix

$\lambda = \lambda(A)$ Eigenwert der Matrix A

$\lambda_{min,\bar{\Omega}}(A(x))$ kleinster Eigenwert der Matrix $A(x)$ auf $\bar{\Omega}$

$tr(A)$ Spur der Matrix A

$\det A$ Determinante der Matrix A

$Cof(A) = \det(A) \cdot A^{-T}$ Kofaktor für invertierbare Matrizen

$\mathrm{Adj}(A) = Cof(A)^T$ Adjunkte einer invertierbaren 3×3 Matrix

$dev(A) = A - \frac{1}{3}tr(A) \cdot 1\!\!1$ deviatorischer Anteil der Matrix A

$\sqrt{F^TF}$ Wurzel einer positiv definiten symmetrischen Matrix.

$\ln C$ Matrix-Logarithmus (Hencky-Tensor)

$\langle A,B \rangle = tr(A \cdot B^T)$ euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$

$\|A\|$ zugeordnete euklidische Matrixnorm, auch $\|A\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}$

$|\cdot|$ absoluter Betrag oder Maß einer Menge

$Lin(K)$ lineare Hülle der Menge K

2.2 Differentialrechnung

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$

$\partial\Omega$ glatter Rand von Ω

$u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$\nabla u(x,t), Du(x,t)$ Matrix der ersten partiellen Ableitungen bzgl. x, so angeordnet,dass gilt $u(x+h) = u(x) + \nabla u(x).h + \dots$ damit also $\nabla u = J_u(x)$, wobei J_u die Jacobi-Matrix bezeichnet.

$\epsilon(\nabla u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u)$ symmetrischer Gradient

$\operatorname{div} u = tr(\nabla u) \in \mathbb{R}$ Divergenz für Vektorfelder

$\operatorname{div} A(x) \in \mathbb{R}^3$ Divergenz für Matrizenfelder, so dass gilt

$$\operatorname{div}\,(A(x)^T.h(x)) = \langle A(x), \nabla h(x)\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \langle h(x), \operatorname{div} A(x)\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$\dot{u}(x,t) = \frac{d}{dt}u(x,t) = u_t(x,t) = u'(x,t)$ Ableitung nach der Zeit

$\partial_\alpha, D_\alpha$ partielle Ableitung nach Argument α

$D_F W(F),\ D_F^k W(F)$ erste bzw. k.te Ableitung einer Funktion $W(F)$ nach F

$\partial_F W(F),\ \partial_F^k W(F)$ idem

$D^2 W(F).(H,H)$ Bilinearform der zweiten Ableitung von W an der Stelle F

$L^k(X,Y)$ Menge aller k-linearen Abbildungen von X nach Y

$O(h), o(h)$ Landausche Symbole

2.3 Funktionenräume

$C_0^\infty(\Omega)$ Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω

$L^p(\Omega), L^\infty(\Omega)$ Standard Lebesgue-Räume

$\|u\|_{p,\Omega}$ Norm auf $L^p(\Omega)$

$W_m^p(\Omega)$ Standard-Sobolev Raum: m.te schwache Ableitungen sind in $L^p(\Omega)$. (entsprechend auf Komponenten erweitert.)

$\|u\|_{m,p,\Omega}$ Norm auf $W_m^p(\Omega)$

$\mathring{W}_1^p(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_1^p(\Omega)}}$

$C^k(\bar{\Omega}, X)$ Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\bar{\Omega}$ nach X versehen mit der zugehörigen Topologie.

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, X)$ Hölderraum zum Exponenten α

$\|f\|_X$ Norm auf dem Raum X

$\rightharpoonup$ schwache Konvergenz

$\to$ starke Konvergenz

$B_\epsilon(x)$ Ball mit Radius ϵ um x

M_ϵ Mittelungsoperator (Faltung)

$\mathcal{D}$ spezieller Operator

χ_M Indikatorfunktion einer Menge

C^+, c^+ beliebige positive Konstanten die keine festen Werte besitzen

2.4 Mechanik

$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ zeitabhängige Deformation

$F = \nabla_x \phi$ Deformationsgradient

$u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ Verschiebung

∇u Verschiebungsgradient: $F = \nabla\phi = \mathbb{1} + \nabla u$

$F = F_e \cdot F_p$ lokale multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in elastischen und plastischen Anteil

$$T \begin{cases} T > 0 & \text{Zeit} \\ T & \text{abstrakter Lösungsoperator des Variationsploblems} \\ T & \text{Cauchyscher Spannungstensor} \end{cases}$$

$C = F^T F$ rechter Cauchy-Green Tensor

$C_p = F_p^T F_p$ plastische Metrik bzw. rechter plastischer Cauchy-Green Tensor

$C_e = F_e^T F_e$ rechter elastischer Cauchy-Green Tensor

S_1 1.Piola-Kirchhoff Tensor

S_2 2.Piola-Kirchhoff Tensor

$\Sigma = C \cdot DW(CC_p^{-1}) \cdot C_p^{-1}$ der Mandelsche Spannungstensor

$\sigma = T$ Cauchyscher Spannungstensor

$E = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbb{1})$ materieller Verzerrungstensor

$E_e = \frac{1}{2}(F_e^T F_e - \mathbb{1})$

$E_p = \frac{1}{2}(F_p^T F_p - \mathbb{1})$

$\hat{E}_e = \frac{1}{2}(E - E_p)$

$\epsilon, \epsilon_e, \epsilon_p$ Linearisierungen von E, E_e, E_p resp., so dass $\epsilon_e = \epsilon - \epsilon_p$ gilt

$W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R},\ W = W(F)$ Energiedichte, elastisches Potential, freie Energie

I Variationsfunktional $I(u) = \int\limits_{\Omega} W(\nabla u)\, dx$

λ, μ Lamé-Konstanten

Kapitel 3

Hamiltonsche Formulierung

3.1 Das volle dynamische viskoplastische Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Der Rand $\partial\Omega$ besitze eine disjunkte Darstellung $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Auf Γ_1 seien Dirichlet-Randbedingungen, auf Γ_2 seien Neumann-Randbedingungen gestellt. Die Deformation des Körpers finde der Einfachheit halber ohne äußere Kräfte statt, d.h quasi in der Schwerelosigkeit. Außerdem sei die Massendichte ρ in der Referenzkonfiguration konstant ($\rho = 1$). Wir betrachten außerdem nur den Fall konstanter Temperatur. Es sei eine glatte potentielle Energie W gegeben, welche von einem Parameter z abhängt:

$$\begin{aligned} &W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \\ &W(x, \nabla u, z) \end{aligned}$$

Ausserdem gebe es eine Evolutionsgleichung für diesen Parameter, den wir ab jetzt als **Innere Variable** z bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} z :&\quad \bar{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^N \quad \text{(Vektor der Inneren Variablen)} \\ h :&\quad \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N \\ z_t &= h(\nabla u, z) \end{aligned}$$

Die Problemstellung läßt sich so formulieren: Gesucht sind Funktionen:

$$\begin{aligned} u :&\quad \bar{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{Deformation} \\ z :&\quad \bar{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^N \quad \text{Vektor der Inneren Variablen} \end{aligned}$$

so dass das folgende gekoppelte System partieller und gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \operatorname{div} D_{\nabla u} W(x, \nabla u(x, t),\ z(x, t)) \\ z_t(x, t) &= h(\nabla u(x, t),\ z(x, t)) \end{aligned}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \\ u_t(x,0) &= v_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \\ z(x,0) &= z_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T] \\ D_{\nabla u} W(x, \nabla u, z).\vec{n} &= S(x,t) \in \mathbb{R}^3 \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times [0,T] \end{aligned}$$

erfüllt wird.

Dabei entsteht die Gleichgewichtsgleichung

$$u_{tt}(x,t) = \operatorname{div} D_{\nabla u} W(x, \nabla u(x,t),\ z(x,t))$$

formal als **Euler-Lagrange Gleichung**, das heisst als notwendige Bedingung der Stationarität des zugehörigen **Lagrange-Funktionals**

$$\int_T \int_\Omega \frac{1}{2} u_t^2 - W(x, \nabla u, z)\ dx\ dt \mapsto \text{stat. }, \text{ variieren nur bzgl. } u$$

bei gegebenen Randbedingungen

$$u(x,0) = u_0 \quad , u(x,T) = u_T$$

und festgehaltener Innerer Variable z.

3.2 Die Evolutionsgleichung

Wenn $\nabla u(x,t)$ bekannt ist, dann ist

$$\begin{aligned} z_t(x,t) &= h(\nabla u(x,t),\ z(x,t)) \\ &= \tilde{h}(x,t,\ z(x,t)) \end{aligned}$$

für ein festes $\hat{x} \in \bar{\Omega}$ eine gewöhnliche endlichdimensionale Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(t) &= \hat{h}(t,\ \hat{z}(t)) \\ \hat{z}(0) &= \hat{z}_0 \end{aligned}$$

für die Funktion $\hat{z}(t) := z(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}^N$. Dies ist auch die vorherrschende Sichtweise vom Standpunkt der Ingenieurwissenschaften aus.

Trotzdem liegt mathematisch eine gewöhnliche Differentialgleichung in einem **unendlichdimensionalen** Banachraum vor, wobei die gesuchte Funktion $t \mapsto z = z(\cdot, t)$ eben Werte in diesem Banachraum annimt. Diese Tatsache erschwert erheblich die mathematische Behandlung der Differentialgleichung, denn um die Existenz einer lokalen Lösung zu gewährleisten, reicht die Stetigkeit der rechten Seite nicht mehr aus! (Satz v. Peano gilt nur **endlichdimensional!**). Hinreichend für die Existenz einer lokalen Lösung wäre, dass die rechte Seite Lipschitz-stetig von z abhängt, was sie auch tut, solange man sich ∇u als gegeben vorstellt. Sobald man aber $u = T(z)$ annimt, d.h das gekoppelte System betrachtet, entscheidet über die Eigenschaften der rechten Seite der Evolutionsgleichung nicht mehr die bekannte gutartige Funktion h, sondern der (Lösungs-)Operator T. Für das nichtlineare Problem konnte bisher nicht gezeigt werden, dass T in geeigneten Banachräumen Lipschitz ist! Und wir müssen uns damit begnügen, dass T stetig ist.

3.3 Das quasistatische viskoplastische Problem

Wenn man in den **Euler-Lagrange Gleichungen** des dynamischen Problems den Beschleunigungsterm u_{tt} vernachlässigt, erhält man das sogenannte **quasistatische** Problem:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} D_{\nabla u}\Psi(x, \nabla u(x,t),\ z(x,t)) \\ z_t(x,t) &= h(\nabla u(x,t),\ z(x,t)) \end{aligned}$$

zusammen mit denselben Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T] \\ D_{\nabla u}\Psi(x, \nabla u, z).\vec{n} &= S(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times [0,T] \end{aligned}$$

aber nur einer Anfangsbedingung für die Evolutionsgleichung

$$z(x,0) = z_0(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

Wir interpretieren die Lösungen dieses System so, daß in jedem Zeitpunkt eine Deformation u gefunden wird, so dass der Körper mit sich im Gleichgewicht ist unter den Randbedingungen und einem gegebenen Parameter z. Der Parameter z ist darüberhinaus einer Evolutionsgleichung unterworfen, die von der gegebenen Deformation u und dem Parameterwert z selbst abhängt.

Bemerkung 1 (Quasisatisch versus Dynamisch)
Hinter dem quasistatischen Modell steckt die Annahme, dass bei genügend „langsam“ ablaufenden Prozessen die Lösungen des dynamischen Problems in der „Nähe“ der Lösungen des quasistatischen Problems liegen. Diese Annahme kann

bis jetzt nicht in voller Allgemeinheit mathematisch exakt bewiesen werden. Tatsächlich scheint das dynamische Problem in gewissem Sinne eine Regularisierung des quasistatischen Problems zu sein, siehe [Suq80]. Wir wollen aber im quasistatischen Problem ein Problem in eigenem Recht, unabhängig vom dynamischen Problem, sehen.

3.4 Parameterabhängiges Variationsproblem

Unter gewissen Voraussetzungen an die Energie W erhält man Lösungen des quasistatischen Problems aus folgendem Variationsproblem:

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad \int\limits_{\Omega} W(x, \nabla u(x,t), z(x,t))\, dx \mapsto \text{Min. bzgl. } u \text{ bei gegebenem } z.$$
$$z_t(x,t) = h(\nabla u(x,t),\ z(x,t))$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T] \\ D_{\nabla u} W(x, \nabla u, z).\vec{n} &= S(x,t) \in \mathbb{R}^3 \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times [0,T] \end{aligned}$$

und der Anfangsbedingung für die Evolutionsgleichung

$$z(x,0) = z_0(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

Wir interpretieren dieses Problem als parameterabhängiges Variationsproblem, wobei der Parameter selbst einer Evolutionsgleichung unterworfen ist. Für alles weitere sei Γ_1 eine nichtleere Menge mit nichtverschwindendem Randmaß und wir schreiben auf Γ_2 keine Randbedingung vor, womit sich dort automatisch die **natürliche Randbedingung**

$$D_{\nabla u} W(x, \nabla u, z).\vec{n} = 0 \quad x \in \Gamma_2 \quad \text{(Normalspannungsfreier Rand } \Gamma_2\text{)}$$

einstellt. Wir untersuchen also nur Probleme mit Dirichlet-Randbedingungen. Desweiteren spezifizieren wir die Art der Inneren Variablen z und die rechte Seite der Evolutionsgleichung: Es sei $z(x,t) \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ ein **plastischer Parameter** und

$$\begin{aligned} &h : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3} \\ &f : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3} \\ &\forall\, A, B \in \mathbb{M}^{3\times 3}: \quad h(A,B) := f(A,B) \cdot B \end{aligned}$$

Dabei wurde diese spezielle Form der Funktion h im Hinblick auf die konkreten Evolutionsgleichungen gewählt, die wir später behandeln.

3.5 Alternative inkrementelle Interpretation

Dieses Minimierungsproblem erlaubt insbesondere auch eine inkrementelle Interpretation, welche bei einer numerischen Implementierung naheliegt: Man berechne in einem typischen Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$ bei gegebener Deformation $\nabla u(t_n)$ einen globalen Update der Inneren Variable z über die Evolutionsgleichung, so dass $z(t_{n+1})$ in jedem $x \in \Omega$ vorliegt (zum Bsp. ein Schritt eines expliziten Euler-Verfahrens) und bestimme dann die neue Deformation $\nabla u(t_{n+1})$ als das Minimum von

$$\int_\Omega W(x, \nabla u(x),\ z(t_{n+1}))\, dx \mapsto \text{min. bzgl. } u$$

$$u_{\partial\Omega}(t_{n+1}) = g(t_{n+1})$$

Damit wird dadurch die Arbeit minimiert, die beim Übergang von einem Zeitschritt zum nächsten geleistet werden muss, denn

$$\int_\Omega W(x, \nabla u(x, t_{n+1}),\ z(t_{n+1}))\, dx \mapsto \text{min.}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_\Omega W(x, \nabla u(x, t_{n+1}),\ z(t_{n+1}))\, dx - \overbrace{W(x, \nabla u(x, t_n),\ z(t_n))}^{\text{bekannt}}\, dx \mapsto \text{min.}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_\Omega \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt} W(x, \nabla u(x,t),\ z(x,t))\, dt\, dx \mapsto \text{min.}$$

Ähnlich wird zum Bsp. in [OR93] argumentiert.

3.6 Approximiertes parameterabhängiges Variationsproblem

Sei $\mathcal{D}_\epsilon$ ein Glättungs- oder Mittelungsoperator im Ort. Das könnte zum Beispiel die Faltung im Ort mit einer Dirac-Familie ϕ_ϵ sein. Wir approximieren damit das originale Variationsproblem durch folgendes Problem:

$$\forall\, t \in [0, T]: \quad \int_\Omega W(x, \nabla u(x,t), z(x,t))\, dx \mapsto \text{Min. bzgl. } u \text{ bei gegebenem } z.$$

$$z_t(x,t) = f(\mathcal{D}_\epsilon.\nabla u(x,t),\ \mathcal{D}_\epsilon.z(x,t)) \cdot z(x,t)$$

mit der Randbedingung

$$u(x,t) = g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T]$$

und der Anfangsbedingung für die Evolutionsgleichung

$$z(x,0) = z_0(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

Diese Glättung in der Evolutionsgleichung läuft in den zu betrachtenden konkreten Anwendungsfällen im Wesentlichen darauf hinaus, den Spannungstensor nicht auf den Deformationsgradienten ∇u selbst, sondern auf einen lokal gemittelten Deformationsgradienten zu beziehen.Wie wir noch sehen werden, bleibt bei dieser Glättung die sogenannte **plastische Inkompressibilität** erhalten. Im Sinne einer kontinuumsmechanischen Modellierung der Plastizität scheint es nicht unplausibel zu sein, an gewissen Stellen in den Gleichungen gemittelte Größen zu betrachten. Allerdings ist unklar, wie die Mittelung in der Evolutionsgleichung den 2. Hauptsatz der Thermodynamik tangiert. Wir werden keinen Versuch unternehmen, einen Grenzübergang $\epsilon \to 0$ durchzuführen, statt dessen werden wir das Problem für festes $\epsilon > 0$ lösen.
Damit haben wir in dem Problem eine besonders ausgezeichnete Längenskala ϵ eingeführt: Lösungen sind von nun an abhängig von $\epsilon > 0$ (internal length scale). Da aber $\epsilon > 0$ beliebig klein sein darf, kann auf jedem gegebenen Gitter einer FEM-Implementierung die Mittelung so ausgeführt werden, dass sie um Größenordnungen unterhalb des Gitterabstandes angesiedelt ist.

3.7 Glättung

In der obigen allgemeinen Formulierung wird die Evolutionsgleichung für die plastische Variable im Wesentlichen im Deformationsgradienten geglättet. In der konkreten Anwendung könnte es jedoch vorteilhaft sein, die Rückkopplung über den Spannungstensor oder dessen deviatorischen Anteil zu glätten. Nach Meinung des Autors übertragen sich die in dieser Arbeit erzielten Resultate auch auf diese Situation.

3.8 Iterativer Prozess

Um eine lokale Lösung u, z des approximierten Problems zu finden, definieren wir eine Iteration: Es sei $z^n \in C^0([0,T], C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ gegeben. Dann sei $u^{n+1}(t,x)$ Lösung des Minimumproblems

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad \int_\Omega W(\nabla u^{n+1}(x,t),\, z^n(x,t))\, dx \to \min$$

$$u^{n+1}(x,t) = g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T]$$

bei gegebenem z^n und z^{n+1} sei Lösung der ODE im Banachraum:

$$\frac{d}{dt}z^{n+1} = f(\mathcal{D}_\epsilon.\nabla u^{n+1}(x,t),\ \mathcal{D}_\epsilon.z^n(x,t)) \cdot z^{n+1}(x,t)$$
$$z^{n+1}(x,0) = z_0(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

Wenn dieses Iterationsverfahren konvergiert, hoffen wir als Grenzwert davon eine Lösung des approximierten Problems zu erhalten. Wir werden zu untersuchen haben, in welchen Funktionenräumen und unter welchen Voraussetzungen an W, f, g dieser formale Ansatz tatsächlich funktioniert.

3.9 Resultate

Wir werden am Ende dieser Arbeit alle notwendigen Hilfsmittel bereitgestellt haben, um unter anderem folgenden Satz beweisen können: (Hier formuliert für F_p, für C_p analog)

Satz 1 (Hauptsatz)

1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes offenes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$.*
2. *Sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine strikt polykonvexe Caratheodory-Funktion.*
3. *Sei $p > 3$, $\frac{p}{p-1} \le q \le \frac{p}{2}$, $1 < r \le \frac{p}{3}$ und*
$$\exists\, c^+ > 0 : \quad W(F) \ge c^+ \left[\|F\|^p + \|\mathrm{Adj}F\|^q + |\det F|^r\right]$$
4. *Sei $I(u) = \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$ $L^p(\Omega)$-koerziv.*
5. *Sei $G_0 \subset W_1^\infty(\Omega)$ eine beschränkte Menge und $g \in C^1([0,\infty), G_0)$.*
6. *Sei $E \subset \{A \in C(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R})) \mid \forall\, x \in \bar{\Omega} :\ \det A(x) = 1\}$ eine beschränkte Menge.*
7. *Sei $X_g = \{u \mid u = g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega), g \in G_0\}$ und $\Gamma_1 = \partial\Omega$*
8. *W erfülle eine **Wachstumsbedingung**, genauer: es gebe eine Konstante $C^+ > 0$ so dass gilt:*
$$\forall\, F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad |W(F)| \le C^+\ (1 + \|F\|^p)$$
9. *W sei **lokal Lipschitz**, genauer: es gebe eine Konstante $C^+ > 0$ so dass gilt:*
$$\forall\, F_1, F_2 \in \mathbb{M}^{3\times 3} :$$
$$|W(F_1) - W(F_2)| \le C^+ \cdot \left(1 + \|F_1\|^{p-1} + \|F_2\|^{p-1}\right)\ \|F_1 - F_2\|$$

10. *Sei* $f : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times3}$ *hinreichend glatt und es gebe eine Funktion* $L_2^+ : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}^+$, *welche beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet und es gelte*

$$\begin{aligned} \forall\, A_1, A_2, B \in \mathbb{M}^{3\times3} : &\quad \|f(A_1,B) - f(A_2,B)\| \leq L_2^+(B) \cdot \|A_1 - A_2\| \\ \forall\, B_1, B_2, A \in \mathbb{M}^{3\times3} : &\quad \|f(A,B_1) - f(A,B_2)\| \leq L_2^+(A) \cdot \|B_1 - B_2\| \end{aligned}$$

11. ***Plastische Inkompressibilität:*** *Die Funktion* f *habe die spezielle Form:*

$$f(A,B) = \alpha(A,B) \cdot dev[\Sigma(A,B)]$$

mit $\alpha : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ *und* $\Sigma : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times3}$.

12. *Sei* $M_\epsilon : L^p(\Omega, \mathbb{M}^{3\times3}) \mapsto C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times3})$ *der in Lemma 36 eingeführte Mittelungssoperator.*

13. *Sei* $\hat{F}_p^{-1} \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times3})$ *mit* $\det \hat{F}_p(x) = 1$

14. ***Stabilität:*** *Zu jedem Paar* $(F_p^{-1}, g) \in E \times G_0$ *sei die Lösung des Minimumproblems*

$$\inf_{u \in X_g} \int_\Omega W(\nabla u(x) \cdot F_p^{-1})\, dx$$

eindeutig. *Diese Forderung schließt gerade Stabilitätsprobleme aus.*

Dann gibt es eine Zeit $T > 0$, *so dass das gekoppelte Problem*

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,T] : &\quad \int_\Omega W(\nabla u(x,t) \cdot F_p^{-1})\, dx \mapsto \text{Min. bzgl. } u \text{ bei gegebenem } F_p. \\ &\quad \frac{d}{dt} F_p^{-1}(x,t) = f(M_\epsilon.\nabla u(x,t),\ M_\epsilon.F_p^{-1}(x,t)) \cdot F_p^{-1}(x,t) \end{aligned}$$

mit der Randbedingung

$$u(x,t) = g(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T], \quad g(t) \in G_0$$

und der Anfangsbedingung für die Evolutionsgleichung

$$F_p^{-1}(x,0) = \hat{F}_p^{-1}(x) \quad x \in \bar{\Omega}$$

mindestens eine Lösung $F_p^{-1} \in C^1([0,T]; E)$ *und* $u \in C([0,T]; W_1^p(\Omega))$ *besitzt.* ■

Beweis. Mit den Voraussetzungen aus dem Hauptsatz an das Variationsfunktional garantieren wir die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimums zu gegebenen Inneren Variablen und Dirichlet-Randdaten.

Weil $F \mapsto W(F \cdot F_p^{-1})W$ für $F_p^{-1} \in E$ strikt polykonvex ist (Invarianz der Polykonvexität), schließen wir mit Satz 24, daß das strikte Minimum in einem Potential-Well liegt. Zusammen mit Satz 31 folgt die Existenz eines stetigen Lösungsoperators

$$T : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \times W_1^\infty(\Omega) \mapsto W_1^p(\Omega, \mathbb{M}^{3\times 3})$$

so daß wegen $u = T(F_p^{-1}(t), g(t))$

$$\inf_{u \in g(t) + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1}(t))\, dx = \int_\Omega W(\nabla T(F_p^{-1}(t), g(t)) \cdot F_p^{-1}(t))\, dx$$

gilt. Mit Korollar 28 zeigen wir, daß T beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

Diesen Lösungsoperator setzen wir nun in die Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_p^{-1}(x,t) &= f(M_\epsilon.\nabla u(x,t),\ M_\epsilon.F_p^{-1}(x,t)) \cdot F_p^{-1}(x,t) \\ F_p^{-1}(x,0) &= \hat{F}_p^{-1}(x) \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

ein, womit sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_p^{-1}(x,t) &= f(M_\epsilon.[\nabla T(F_p^{-1}(t), g(t))],\ M_\epsilon.F_p^{-1}(x,t)) \cdot F_p^{-1}(x,t) \\ F_p^{-1}(x,0) &= \hat{F}_p^{-1}(x) \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

ergibt. Diese Evolutionsgleichung erfüllt nun wegen Korollar 17 alle Voraussetzungen von Satz 20. Deshalb gibt es eine Zeit $T > 0$, so daß die Evolutionsgleichung **mindestens** eine Lösung $F_p^{-1} \in C^1([0,T], C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ hat. Da diese Evolutionsgleichung wegen der speziellen Form von f und Folgerung 2 die plastische Inkompressibilität erhält, gilt sogar $F_p^{-1} \in C^1([0,T], C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R}))$. Weil der Lösungsoperator T stetig ist, können wir diese Lösung F_p^{-1} in T einsetzen und erhalten $u \in C([0,T], W_1^p(\Omega))$. ■

Bemerkung 2
Direkt passt dieser Satz auf die in (18.4) vorgestellte Energie: Alle Wachstums- und Stetigkeitsvoraussetzungen sind erfüllt, insbesondere folgt aus der strikten Konvexität die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems.

Bemerkung 3
Die Voraussetzung, dass das Minimumproblem eine eindeutige globale Lösung haben soll, wird man abschwächen können zur Forderung, dass ein globales Minimum jeweils schon strikt ist. Auf jedenfall muss man sicherstellen, dass kein Stabilitätsverlust eintritt.

Kapitel 4

Lineare Algebra auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$

4.1 Spur, Skalarprodukt und Norm

Sei $1\!\!1$ die Einheitsmatrix auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$. Wir erinnern an folgende Eigenschaft der Spur:

Lemma 1
Seien $A, B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$, dann gilt $trace(AB) = trace(BA)$

Beweis.

$$\begin{aligned}
trace(AB) &= trace(\sum_j A_{ij}B_{jk}) = \sum_k \left(\sum_j A_{kj}B_{jk}\right) \\
&= \sum_k \sum_j B_{kj}A_{jk} = trace(\sum_j B_{kj}A_{ji}) \\
&= trace(BA)
\end{aligned}$$

■

Wir definieren auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}$ indem wir setzen:

Definition 1 (Skalarprodukt auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$)

$$\langle A,B \rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} := trace(A \cdot B^T)$$

Lemma 2 ($\langle A,B \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$)

Beweis. Die Bilinearität von $\langle A,B \rangle$ ist klar. Die Symmetrie ergibt sich aus der Invarianz der Spur beim Transponieren:

$$\langle A,B \rangle = trace(AB^T) = trace((AB^T)^T) = trace(BA^T) = \langle B,A \rangle \tag{4.1}$$

und die Positivität von $\langle A,A\rangle$ sehen wir so:

$$\langle A,A\rangle = trace(AA^T) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\cdot A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^2 > 0$$

für $A \neq 0$. ■

Bemerkung 4 (Spur und Skalarprodukt)
Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt dann: $trace(A) = tr(A) = \langle A,\mathbb{1}\rangle$.

Diesem Skalarprodukt ordnen wir in kanonischer Weise eine Norm zu:

Definition 2 (Euklidische Norm auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$, dann ist

$$\|A\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}} := \sqrt{\langle A,A\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}}$$

eine Norm.

Beweis. Klar ■
Damit gilt dann für $Q \in O(3)$ $\quad \|Q\| = \sqrt{3}$.

Lemma 3 (Verträgliche Matrixnorm)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt $\|A.\eta\|_{\mathbb{R}^3} \leq \|A\|\cdot\|\eta\|_{\mathbb{R}^3}$

Beweis. Bekannte Eigenschaft. ■
Dieses Skalarprodukt hat bezüglich der Matrixmultiplikation eine nützliche Vertauschungseigenschaft. Es gilt nämlich das

Lemma 4 (Vertauschungseigenschaft)
Seien $A, B, C \in \mathbb{M}^{3\times 3}$, dann gilt:

$$\langle A,B\cdot C\rangle = \langle A\cdot C^T,B\rangle = \langle B^T\cdot A,C\rangle = \langle C,B^T\cdot A\rangle$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle A,BC\rangle &= trace(A(BC)^T) = trace(AC^TB^T) = trace((AC^T)B^T)\\
&= \langle AC^T,B\rangle = trace(AC^TB^T)\\
&\text{und mit (1) ergibt sich}\\
&= trace((AC^T)B^T) = trace(B^T(AC^T)) = trace((B^TA)C^T)\\
&= \langle B^TA,C\rangle\\
&\text{und wegen (4.1)}\\
&= \langle C,B^TA\rangle
\end{aligned}$$

■

Damit ergibt sich sofort das

Korollar 1

$$\langle A,B\rangle = \langle A^T,B^T\rangle$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle &= \langle A,B\cdot 1\!\!1\rangle\\ &\text{und mit (4)}\\ &= \langle AB^T,1\!\!1\rangle\\ &= \langle B^T,A^T\cdot 1\!\!1\rangle\\ &= \langle B^T,A^T\rangle\end{aligned}$$

■

Lemma 5 (Symmetrische Matrizen und Skalarprodukt)
Sei $S\in\mathbb{S}ym(3)$ und $T\in\mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\langle S,T\rangle = \langle S^T,T\rangle = \langle S,T^T\rangle = \langle S,\frac{1}{2}(T^T+T)\rangle\\ &\forall\ S\in\mathbb{S}ym(3):\quad \langle S,T\rangle = 0 \Rightarrow T = -T^T\end{aligned}$$

Beweis. Erster Teil ist klar, zweiter Teil einfaches Widerspruchsargument: testen mit $S = T^T + T \neq 0$. ■

Lemma 6 (Invarianz der Spur)
Sei $A\in\mathbb{M}^{3\times 3}$ und $S\in Gl(3,\mathbb{R})$. Dann gilt $trace(S^{-1}AS) = trace(A)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}trace(S^{-1}AS) &= \langle S^{-1}AS,1\!\!1\rangle = \langle AS,S^{-T}1\!\!1\rangle\\ &= \langle A,S^{-T}S^T\rangle = \langle A,1\!\!1\rangle = trace(A)\end{aligned}$$

■

Lemma 7 (Invarianz der Norm unter orthogonalen Abbildungen)
Sei $A\in\mathbb{M}^{3\times 3}$ und $Q\in O(3)$.Dann gilt $\|QA\| = \|A\|$ und $\|AQ\| = \|A\|$.

Beweis.

$$\|QA\|^2 = \langle QA,QA\rangle = \langle A,Q^TQA\rangle = \langle A,A\rangle = \|A\|^2$$

■

Korollar 2
Für $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $Q \in O(3)$ gilt $\|Q^T A Q\| = \|A\|$

Beweis. Klar ∎

4.2 Positive Definitheit verschiedener bilinearer Formen

Eine weitere nützliche Hilfe ist der

Satz 2
Sei $A \in P\mathbb{S}ym$ und B positiv semi-definit. Dann gilt

$$trace(AB) \geq 0$$

Obwohl i.A $A \cdot B \notin P\mathbb{S}ym(3)$.

Beweis. Weil $A \in P\mathbb{S}ym$ ist, gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in O(3)$ die A diagonalisiert, d.h $Q^T A Q = D_A$. In D_A stehen die positiven Eigenwerte von A, weil ja $A \in P\mathbb{S}ym$ ist. Die Matrix $\hat{B} := Q^T B Q$ ist immer noch positiv semi-definit, denn für ein beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle \xi, \hat{B}.\xi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \xi, Q^T B Q.\xi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle Q.\xi, BQ.\xi \rangle_{\mathbb{R}^3} \geq 0$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} trace(AB) &= trace(Q^T A B Q) = trace(Q^T A \mathbb{1} B Q) \\ &= trace(Q^T A Q Q^T B Q) = trace(D_A \hat{B}) \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} trace(D_A \hat{B}) &= trace\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} & \hat{b}_{13} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} & \hat{b}_{23} \\ \hat{b}_{31} & \hat{b}_{32} & \hat{b}_{33} \end{pmatrix} \right) \\ &= trace \begin{pmatrix} \lambda_1 \hat{b}_{11} & \lambda_1 \hat{b}_{12} & \lambda_1 \hat{b}_{13} \\ \lambda_2 \hat{b}_{21} & \lambda_2 \hat{b}_{22} & \lambda_2 \hat{b}_{23} \\ \lambda_3 \hat{b}_{31} & \lambda_3 \hat{b}_{32} & \lambda_3 \hat{b}_{33} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \hat{b}_{ii} \geq 0 \end{aligned}$$

weil $\hat{b}_{ii} \geq 0$ ist, denn $\hat{B}$ ist positiv semi-definit und hat daher auch nur nicht-negative Diagonaleinträge (testen mit e_i). ∎

Satz 3
Sei D eine positiv definite Diagonalmatrix und $B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\langle DB,BD\rangle \geq \lambda^2_{min}(D) \cdot \|B\|^2$$

Beweis. $\langle DB,BD\rangle = \langle DBD,B\rangle$ und es ist

$$\begin{aligned} DBD &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \lambda_1 b_{13} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_3 b_{31} & \lambda_3 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1 b_{11} & \lambda_1\lambda_2 b_{12} & \lambda_1\lambda_3 b_{13} \\ \lambda_2\lambda_1 b_{21} & \lambda_2\lambda_2 b_{22} & \lambda_2\lambda_3 b_{23} \\ \lambda_3\lambda_1 b_{31} & \lambda_3\lambda_2 b_{32} & \lambda_3\lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle DBD,B\rangle &= \langle \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1 b_{11} & \lambda_1\lambda_2 b_{12} & \lambda_1\lambda_3 b_{13} \\ \lambda_2\lambda_1 b_{21} & \lambda_2\lambda_2 b_{22} & \lambda_2\lambda_3 b_{23} \\ \lambda_3\lambda_1 b_{31} & \lambda_3\lambda_2 b_{32} & \lambda_3\lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i\lambda_j b_{ij}^2 \geq \lambda^2_{min}(D) \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^2 = \lambda^2_{min}(D)\|B\|^2 \end{aligned}$$

Weil $\lambda_i \cdot \lambda_j \geq 0$ nach Voraussetzung. ∎

Korollar 3
Sei D eine positiv definite Diagonalmatrix und $B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\langle BD,B\rangle \geq \lambda_{min}(D)\|B\|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle BD,B\rangle &= \langle B\sqrt{D}\sqrt{D},B\rangle = \langle B\sqrt{D},B\sqrt{D}\rangle \\ &\geq \sqrt{\lambda^2_{min}(D)}\|B\|^2 \\ &= \lambda_{min}(D)\|B\|^2 \end{aligned}$$

∎

Korollar 4
Sei D eine positiv definite Diagonalmatrix und $B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\langle DB,B\rangle \geq \lambda_{min}(D)\|B\|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle DB,B\rangle &= \langle\sqrt{D}\sqrt{D}B,B\rangle = \langle\sqrt{D}B,\sqrt{D}B\rangle\\ &= \langle(\sqrt{D}B)^T,(\sqrt{D}B)^T\rangle\\ &= \langle B^T\sqrt{D},B^T\sqrt{D}\rangle\\ &\geq \lambda_{min}(D)\|B^T\|^2\\ &= \lambda_{min}(D)\;\|B\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 5
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $B \in P\mathbb{S}ym(3)$. Dann gilt $\langle AB,BA\rangle \geq \lambda^2_{min}(B)\|A\|^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle AB,BA\rangle &= \langle AQ^TDQ,Q^TDQA\rangle = \langle QAQ^TD,DQAQ^T\rangle\\ &\text{mit Satz 3 gilt aber}\\ &\geq \lambda^2_{min}(D)\|QAQ^T\|^2 = \lambda^2_{min}(D)\|A\|^2\\ &= \lambda^2_{min}(B)\cdot\|A\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 6
Seien $A, B \in P\mathbb{S}ym$. Dann gilt $\langle AB,BA\rangle \geq \lambda^2_{min}(A)\|B\|^2$ und $\langle AB,BA\rangle \geq \lambda^2_{min}(B)\|A\|^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle AB,BA\rangle &= \langle Q^TDQB,BQ^TDQ\rangle = \langle DQB,QBQ^TDQ\rangle\\ &= \langle DQBQ^T,QBQ^TD\rangle\\ &\geq \lambda^2_{min}(D)\|QBQ^T\|^2 = \lambda^2_{min}(D)\|B\|^2\\ &= \lambda^2_{min}(A)\|B\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 7
Sei $F \in Gl(3,\mathbb{R})$ und $H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\|F^T HF\|^2 \geq \lambda_{min}^2(FF^T) \cdot \|H\|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|F^T HF\|^2 &= \langle F^T HF, F^T HF\rangle = \langle FF^T H, HFF^T\rangle \\ &\geq \lambda_{min}^2(FF^T)\|H\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 8
Sei $F \in Gl(3,\mathbb{R})$ und $H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\|F^T H + H^T F\|^2 \geq \lambda_{min}^2(FF^T) \cdot \|HF^{-1} + (HF^{-1})^T\|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|F^T H + H^T F\|^2 &= \|F^T(HF^{-1} + F^{-T}H^T)F\| \\ &\geq \lambda_{min}^2(FF^T) \cdot \|HF^{-1} + (HF^{-1})^T\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 9
Seien $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt $\|FH\|^2 \geq \lambda_{min}(F^T F)\|H\|^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\|FH\|^2 &= \langle FH, FH\rangle \\ &= \langle H, F^T FH\rangle = \langle HH^T, F^T F\rangle \\ &= \langle HH^T, Q^T D_F Q\rangle = \langle QHH^T Q^T, D\rangle \\ &= \langle (QH)(QH)^T, D\rangle = \langle (QH), D(QH)\rangle \\ &\geq \lambda_{min}(D)\|QH\|^2 \\ &= \lambda_{min}(D)\langle QH, QH\rangle \\ &= \lambda_{min}(D)\langle H, Q^T QH\rangle \\ &= \lambda_{min}(D)\langle H, H\rangle \\ &= \lambda_{min}(D)\|H\|^2 \\ &= \lambda_{min}(F^T F)\|H\|^2\end{aligned}$$

■

Korollar 10
Seien $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $\det F^T F = 1$. Dann gilt $\|FH\|^2 \geq \frac{1}{\|F^T F\|^2} \cdot \|H\|^2$.

Beweis. Mit dem vorigen Lemma müssen wir nur $\lambda_{min}(F^T F)$ abschätzen. Es ist ja

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_{min}(F^T F) \cdot \lambda_2(F^T F) \cdot \lambda_{max}(F^T F) \\
\lambda_{min}(F^T F) &= \frac{1}{\lambda_2(F^T F) \cdot \lambda_{max}(F^T F)} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_{max}(F^T F) \cdot \lambda_{max}(F^T F)} \\
&= \frac{1}{\lambda_{max}(F^T F)^2}
\end{aligned}$$

und sei η ein zu λ_{max} gehöriger Eigenvektor, dann ist

$$\lambda_{max} = \frac{\langle F^T F.\eta, \eta\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|\eta\|^2} \leq \|F^T F\|$$

also gilt für λ_{min}:

$$\lambda_{min}(F^T F) \geq \frac{1}{\|F^T F\|^2}$$

■

Korollar 11
Seien $A, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt $\langle A^T A H^T H, H^T H A^T A\rangle \geq 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle A^T A H^T H, H^T H A^T A\rangle &= \langle Q^T D Q H^T H, H^T H Q^T D Q\rangle \\
&= \langle D Q H^T H Q^T, Q H^T H Q^T D\rangle \\
&\geq \lambda_{min}^2(D)\|Q H^T H Q^T\|^2 \\
&= \lambda_{min}^2(D)\|H^T H\|^2 \\
&= \lambda_{min}^2(A^T A)\|H^T H\|^2
\end{aligned}$$

■

Korollar 12
Seien $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt $\langle F^T F, H^T H\rangle \geq \lambda_{min}(F^T F) \cdot \|H\|^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle F^T F, H^T H\rangle &= \langle Q^T D Q, H^T H\rangle \\
&= \langle D, Q H^T H Q^T\rangle = \langle D, (HQ^T)^T (HQ^T)\rangle \\
&= \langle (HQ^T) D, HQ^T\rangle \\
&\geq \lambda_{min}(D) \|HQ^T\|^2 \\
&= \lambda_{min}(D) \|H\|^2 \\
&= \lambda_{min}(F^T F) \cdot \|H\|^2
\end{aligned}$$

■

4.3 Tensorprodukt

Wir erinnern auch an das **Tensorprodukt** (direktes Podukt, Kronecker Produkt): Seien $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$, dann ist $\eta \otimes \xi \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $(\eta \otimes \xi)_{ij} = \eta_i\ \xi_j$. Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften des Tensorprodukts:

Lemma 8 (Eigenschaften des Tensorprodukts)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$, $v \in \mathbb{R}^3$ und $\eta \otimes \xi \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ dann gilt

1. $(\eta \otimes \xi).v = \eta\ \langle \xi, v\rangle_{\mathbb{R}^3}$
2. $(\eta \otimes \xi)^T = \xi \otimes \eta$
3. $trace(\eta \otimes \xi) = \langle \eta, \xi\rangle_{\mathbb{R}^3}$
4. $trace(\eta \otimes \eta) = \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$
5. $\|\eta \otimes \xi\|^2 = \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$
6. $\langle \eta \otimes \xi, (\eta \otimes \xi)^T\rangle = \langle \eta \otimes \xi, (\xi \otimes \eta)\rangle = \langle \eta, \xi\rangle^2_{\mathbb{R}^3} \geq 0$
7. $trace((\eta \otimes \xi)^2)) = (trace(\eta \otimes \xi))^2$
8. $\|(\eta \otimes \xi)^T + (\eta \otimes \xi)\|^2 \geq 2\|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$
9. $A \cdot (\eta \otimes \xi) = A.\eta \otimes \xi$
10. $(\eta \otimes \xi) \cdot A = \eta \otimes A^T.\xi$
11. $A \cdot (\eta \otimes \xi) \cdot A^T = A.\eta \otimes A.\xi$
12. $rang(\eta \otimes \xi) = 1$

13. *zu jeder Matrix $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit $rang(A) = 1$ gibt es Vektoren $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$ so dass $A = \eta \otimes \xi$ ist.*

14. *die Matrix A habe den Rang $k, k = 1, 2, 3$, dann gibt es Vektoren $\eta_i, \xi_i, i = 1, \ldots, k$ mit der Eigenschaft, dass $A = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \otimes \xi_i$ ist.*

15. $(\eta \otimes \xi)^T \cdot (\eta \otimes \xi) = \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \cdot \xi \otimes \xi$

16. $\|A^T(\eta \otimes \xi) + (\eta \otimes \xi)^T A\|^2 \geq 2\lambda_{min}^2(AA^T) \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \, \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$

Beweis.

1. Klar.

2. Klar.

3. $trace(\eta \otimes \xi) = \langle \eta \otimes \xi, 1\!\!1 \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} \eta_i \cdot \xi_j \cdot \delta_{ij} = \sum_i \eta_i \cdot \xi_j = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathbb{R}^3}$

4. mit der vorherigen Zeile dann klar

5. $\|\eta \otimes \xi\|^2 = \sum_i \sum_j (\eta_i \; \xi_j)^2 = \sum_i \sum_j \eta_i^2 \xi_j^2 = (\sum_i \eta_i^2) \cdot \left(\sum_j \xi_j^2\right) = \|\eta\|^2 \|\xi\|^2$

6. $\langle \eta \otimes \xi, (\xi \otimes \eta) \rangle = \sum_{i,j} (\eta \otimes \xi)_{ij} (\xi \otimes \eta)_{ij} = \sum_{i,j} \eta_i \; \xi_j \quad \xi_i \; \eta_j = \sum_{i,j} (\eta_i \; \xi_i) \quad (\xi_j \; \eta_j) = \sum_i (\eta_i \; \xi_i) \quad \sum_j (\xi_j \; \eta_j) = (\sum_i (\eta_i \; \xi_i))^2 = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathbb{R}^3}^2 \geq 0$

7. $trace((\eta \otimes \xi)^2)) = \langle (\eta \otimes \xi)^2, 1\!\!1 \rangle == \langle \eta, \xi \rangle_{\mathbb{R}^3}^2 = (trace(\eta \otimes \xi))^2$

8. $\|(\eta \otimes \xi)^T + (\eta \otimes \xi)\|^2 = 2\|\eta \otimes \xi\|^2 + 2\langle \eta \otimes \xi, (\xi \otimes \eta) \rangle \geq 2\|\eta\|^2 \|\xi\|^2$

9. $A \cdot (\eta \otimes \xi).v = A.\eta \; \langle \xi, v \rangle_{\mathbb{R}^3} = (A.\eta \otimes \xi).v$

10. $(\eta \otimes \xi) \cdot A.v = \eta \; \langle \xi, A.v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \eta \; \langle A^T.\xi, v \rangle_{\mathbb{R}^3} = (\eta \otimes A^T.\xi)v$

11. ist dann klar.

12. $\eta \in \mathbb{R}^3$ ist Basis des Bildes von $\eta \otimes \xi$.

13. Sei $rang(A) = 1$,dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^3 : \; A.\xi \neq 0$. $(\xi \in bild(A^T))$ Wir setzen $\eta = \frac{A.\xi}{\|\xi\|^2}$ dann ist $A = \eta \otimes \xi$ denn $(\eta \otimes \xi).\xi = A.\xi$ und sei $\zeta \in kern(A)$ dann ist $(\eta \otimes \xi).\zeta = \eta \cdot \langle \xi, \zeta \rangle_{\mathbb{R}^3} = \eta \cdot \langle A^T.\mu, \zeta \rangle_{\mathbb{R}^3} = \eta \cdot \langle \mu, A.\zeta \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$.

14. Verweis [HJ91]

15. direkt ausrechnen.

16. $\|A^T(\eta\otimes\xi)+(\eta\otimes\xi)^T A\|^2 = 2\langle A^T(\eta\otimes\xi), A^T(\eta\otimes\xi)\rangle + 2\langle A^T(\eta\otimes\xi), (\eta\otimes\xi)^T A\rangle$
$= 2\langle AA^T(\eta\otimes\xi), (\eta\otimes\xi)\rangle + 2\langle A^T.\eta\otimes\xi, \xi\otimes A^T.\eta\rangle$
$\geq 2\lambda_{min}^2(AA^T)\cdot\|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 + 2\langle A^T.\eta\otimes\xi, A^T.\eta\otimes\xi\rangle$
$= 2\lambda_{min}^2(AA^T)\cdot\|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 + \langle A^T.\eta, \xi\rangle^2$
$\geq 2\lambda_{min}^2(AA^T)\cdot\|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$ ■

Lemma 9 (Darstellung für rank-one Matrizen)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit $rang(A) = 1$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix T, so dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Verweis [Dac89] ■

Satz 4 (Darstellungssatz für lineare Abbildungen von $\mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$.)
Zu jeder linearen Abbildung $L : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $M_L \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit

$$\forall X \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad L.X := L(X) = \langle M_L, X\rangle$$

Beweis. Die Matrix M_L kann man sehr einfach konstruktiv angeben. ■

Bemerkung 5
Wir identifizieren deshalb nach belieben $\mathbb{M}^{3\times 3}$ und $L(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{R})$.

Bemerkung 6
Für eine lineare Abbildung L zwischen beliebigen topologischen Vektorräumen bezeichne $L.X$ durchgehend $L(X)$. Desgleichen setzen wir für eine bilineare Abbildung B : $B.(H,H) = B(H,H)$. Und genauso verfahren wir für multilineare Abbildungen.

4.4 Adjunkte und Determinante

Definition 3 (Projektor $P : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{2\times 2}$)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist

$$P_{ij}.A := \text{Matrix die aus } A \text{ entsteht durch Streichen von Zeile } j \text{ und Spalte } i \tag{4.2}$$

Bemerkung 7
P ist linear und es ist $(CofA)_{ij}) = \det P_{ji}.A$.

Definition 4 (Adjunkte einer Matrix)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Wir definieren die Adjunkte $\mathrm{Adj}A$ folgendermaßen:

$$\mathrm{Adj}A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det (P_{ij}.A)$$

Wenn A invertierbar ist, dann gilt

$$\mathrm{Adj}A = \det A \cdot A^{-1}$$

den Ausdruck $\det (P_{ij}.A)$ nennt man auch Minore.

Für die Bequemlichkeit des Lesers geben wir die Darstellung in Komponenten an

$$\begin{aligned}
\mathrm{Adj}H = Adj &\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} H_{21} & H_{23} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H_{11} & H_{13} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{31} & H_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{22} & H_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} H_{11} & H_{13} \\ H_{21} & H_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} H_{22}H_{33} - H_{32}H_{23} & H_{31}H_{23} - H_{21}H_{33} & H_{21}H_{32} - H_{31}H_{22} \\ H_{32}H_{13} - H_{12}H_{33} & H_{11}H_{33} - H_{31}H_{13} & H_{31}H_{12} - H_{11}H_{33} \\ H_{12}H_{23} - H_{22}H_{13} & H_{21}H_{13} - H_{11}H_{23} & H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $H \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det (\mathbb{1} + H) &= \begin{vmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & 1 + H_{22} \end{vmatrix} \\
&= 1 + H_{11} + H_{22} + H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12} \\
&= 1 + tr(H) + \det H
\end{aligned}$$

Somit folgt für invertierbares $F \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ auch

$$\begin{aligned}
\det (F + H) = \det ((\mathbb{1} + HF^{-1})F) &= \det (\mathbb{1} + HF^{-1}) \ \det F \\
&= \det F \ (1 + tr(HF^{-1}) + \det (HF^{-1})) \\
&= \det F + \det F \ tr(HF^{-1}) + \det H \\
&= \det F + tr(H \ \mathrm{Adj}F) + \det H
\end{aligned}$$

Diese Darstellung gilt tatsächlich auch für nicht invertierbare $F \in \mathbb{M}^{2\times 2}$. Damit können wir auch die Adjunkte entwickeln. Für $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ gilt in Komponenten

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Adj}(F+H))_{ij} &= (-1)^{i+j} \ \det(P_{ij}.(F+H)) \\
&= (-1)^{i+j} \ \det(P_{ij}.F + P_{ij}.H) \\
&= (-1)^{i+j} \ \big(\det(P_{ij}.F) + \det(P_{ij}.F) \ tr(P_{ij}.H \ (P_{ij}.F)^{-1}) + \det(P_{ij}.H)\big) \\
&= (-1)^{i+j} \det(P_{ij}.F) + (-1)^{i+j} \ \det(P_{ij}.F) \ tr(P_{ij}.H \ (P_{ij}.F)^{-1}) + \\
&\quad (-1)^{i+j} \det(P_{ij}.H)
\end{aligned}$$

Das heisst

$$\mathrm{Adj}(F+H) = \mathrm{Adj}F + \cdots + \mathrm{Adj}H$$

Wir geben hier auch noch die Entwicklung der Determinante an. Für $H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1}+H) &= \begin{vmatrix} 1+H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1+H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1+H_{33} \end{vmatrix} \\
&= (1+H_{11}) \begin{vmatrix} 1+H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & 1+H_{33} \end{vmatrix} - H_{21} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & 1+H_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + H_{31} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ 1+H_{22} & H_{23} \end{vmatrix} \\
&= (1+H_{11}) \ (1 + H_{33} + H_{22} + H_{22}H_{33} - H_{32}H_{23}) \\
&\quad - H_{21} \ (H_{12} + H_{12}H_{33} - H_{13}H_{32}) + \\
&\quad H_{31} \ (H_{12}H_{23} - H_{13} - H_{13}H_{22}) \\
&= 1 + H_{33} + H_{22} + H_{22}H_{33} - H_{32}H_{23} + H_{11} + H_{11}H_{33} \\
&\quad + H_{11}H_{22} + H_{11}H_{22}H_{33} - H_{11}H_{32}H_{23} - H_{21}H_{12} \\
&\quad - H_{21}H_{12}H_{33} + H_{21}H_{13}H_{32} + H_{31}H_{12}H_{23} - H_{31}H_{13} - H_{31}H_{13}H_{22} \\
&= 1 + (H_{33} + H_{22} + H_{11}) \\
&\quad + H_{22}H_{33} - H_{32}H_{23} + H_{11}H_{33} + H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12} - H_{31}H_{13} \\
&\quad + H_{11}H_{22}H_{33} - H_{11}H_{32}H_{23} \\
&\quad - H_{21}H_{12}H_{33} + H_{21}H_{13}H_{32} + H_{31}H_{12}H_{23} - H_{31}H_{13}H_{22} \\
&= 1 + tr(H) + tr(\mathrm{Adj}H) + \det H
\end{aligned}$$

Lemma 10 (Eigenschaften der Adjunkten)
Seien $A, B, P \in Gl(3,\mathbb{R})$ und $Q \in O(3)$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Adj}A = Cof(A)^T$
2. $\mathrm{Adj}(\xi \otimes \eta) = 0$

3. $\mathrm{Adj}(AB) = \mathrm{Adj}B\ \mathrm{Adj}A$
4. $\mathrm{Adj}A^T = (\mathrm{Adj}A)^T$
5. $\mathrm{Adj}A \cdot A = \det A \cdot 1\!\!1$
6. $\mathrm{Adj}(P^{-1}AP) = P^{-1}\mathrm{Adj}AP$, *also ist Adj eine isotrope Tensorfunktion.*
7. $\mathrm{Adj}(A^{-1}) = (\mathrm{Adj}A)^{-1}$
8. *Sei D eine Diagonalmatrix, dann gilt* $\mathrm{Adj}D = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$
9. $trace(\mathrm{Adj}D) = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2$
10. $trace(\mathrm{Adj}(P^{-1}AP)) = trace(\mathrm{Adj}A)$
11. $\|\mathrm{Adj}(Q^{-1}AQ)\|^2 = \|\mathrm{Adj}A\|^2$
12. $\langle \mathrm{Adj}F^T F, 1\!\!1\rangle = \|\mathrm{Adj}F\|^2$
13. *Sei* $Q \in O(3):\ \mathrm{Adj}(QF) = (\mathrm{Adj}F)\ Q^T$ *und* $\|\mathrm{Adj}(QF)\| = \|\mathrm{Adj}F\|$

Bemerkung 8
Diese Eigenschaften übertragen sich genauso auf nicht-invertierbare Matrizen.

Beweis.

1. Klar:Definition.
2. Klar: $\xi \otimes \eta$ hat Rang 1, also gibt es keine nichtverschwindende 2-stufige Untermatrix
3. Klar:Definition.
4. Klar:Definition.
5. Klar:Definition.
6. $\mathrm{Adj}(P^{-1}AP) = \det P^{-1}AP \cdot (P^{-1}AP)^{-1} = \det A \cdot P^{-1}A^{-1}P$
   $= P^{-1} \det A \cdot A^{-1}P = P^{-1}\mathrm{Adj}AP$
7. Klar:Definition.
8. Klar:Definition.
9. Klar: direkt ablesen.
10. $\|\mathrm{Adj}(Q^{-1}AQ)\|^2 = \|Q^{-1}\mathrm{Adj}AQ\|^2 = \|\mathrm{Adj}A\|^2$

11. $\langle \mathrm{Adj}F^T F, 1\!\!1 \rangle = \langle \mathrm{Adj}F\ \mathrm{Adj}F^T, 1\!\!1 \rangle = \langle \mathrm{Adj}F\ \mathrm{Adj}F^T, 1\!\!1 \rangle = \langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}F \rangle = \|\mathrm{Adj}F\|^2$

12. Klar: Definition und Isotropie.

$\blacksquare$

Lemma 11
Sei $F_p \in GL(3,\mathbb{R})$ mit $\det F_p = 1$. Dann gilt

$$\|\mathrm{Adj}(F\ F_p^{-1})\|^2 \geq \lambda_{min}(C_p) \cdot \|\mathrm{Adj}F\|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Adj}(F\ F_p^{-1})\|^2 &= \|\mathrm{Adj}F_p^{-1} \cdot \mathrm{Adj}F\|^2 \\
&= \|(\det F_p^{-1})\ F_p \cdot \mathrm{Adj}F\|^2 \\
&= \|F_p \cdot \mathrm{Adj}F\|^2 \\
&\geq \lambda_{min}(F_p^T F_p) \cdot \|\mathrm{Adj}F\|^2 \\
&= \lambda_{min}(C_p) \cdot \|\mathrm{Adj}F\|^2
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4.5 Polarzerlegung

Wir erinnern an den

Satz 5 (Polarzerlegung von invertierbaren Matrizen)
Sei $F \in Gl(3,\mathbb{R})$. Dann gibt es eindeutige orthogonale Matrizen R, Q und eindeutige positiv definite symmetrische Matrizen U, V mit der Eigenschaft, dass

$$F = R \cdot U \quad \text{und} \quad F = V \cdot Q$$

Ausserdem ist dann $U = (F^T F)^{\frac{1}{2}}$, $\quad V = (F F^T)^{\frac{1}{2}}$ und $R = Q = FU^{-1} = V^{-1}F$.

Beweis. Verweis [Cia88] Seite 95. $\blacksquare$

Bemerkung 9
Wenn F nicht invertierbar ist, existiert zwar immer noch die obige Zerlegung, aber sie ist nicht mehr eindeutig.(siehe [Cia88] S. 133)

Lemma 12 (Polarzerlegung)
Sei $Gl^+ := \{F \in Gl(3,\mathbb{R}) |\ \det F > 0\}$. Die Abbildung $polar : Gl^+(3,\mathbb{R}) \mapsto SO(3)$

$$polar(F) = F \cdot U^{-1} = R$$

mit $U = (F^TF)^{\frac{1}{2}}$ ist beliebig oft differenzierbar. Darüberhinaus ist $polar(F)$ glatt, wenn nur F schon glatt ist.

Beweis. Mit Hilfe des Satz 7 kann man U^{-1} als Polynom $\alpha\ 1\!\!1 + \beta\ C + \gamma\ C^2$ darstellen. Die Koeffizienten α, β, γ sind rationale Funktionen der drei Invarianten von C. Vergleiche [HC84]. ■

Definition 5 (Simultan diagonalisierbar)
*Wenn $A, B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ in derselben Basis diagonalisiert werden können, sagen wir, dass A, B simultan diagonalisiert werden können oder dass A, B **koaxial** sind.*

Es gilt der

Satz 6 (Simultane Diagonalisierbarkeit von Matrizen)
$A, B \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ sind simultan diagonalisierbar. $\Leftrightarrow\ AB = BA$

Beweis. Verweis [HJ85] ■

Lemma 13 (Darstellung in Hauptachsen)
Sei $T \in \mathbb{S}ym(3)$. Dann hat T eine Darstellung der Art:

$$T = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot (v_i \otimes v_i)$$

wobei v_i die Eigenvektoren von T bezeichne. Ist $T \in P\mathbb{S}ym(3)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{2}} &:= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \cdot (v_i \otimes v_i) \\ T^{-1} &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1} \cdot (v_i \otimes v_i) \end{aligned}$$

Satz 7 (Cayley-Hamilton)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist A selbst Lösung seines eigenen charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda \cdot 1\!\!1) \\ &= \lambda^3 - trace(A) \cdot \lambda^2 + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot \lambda - \det A \cdot \lambda^0 \\ &\textit{das heisst} \\ 0 &= A^3 - trace(A) \cdot A^2 + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot A - \det A \cdot A^0 \\ &= A^3 - trace(A) \cdot A^2 + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot A - \det A \cdot 1\!\!1 \end{aligned}$$

Beweis. [HJ85] ■

Bemerkung 10
Die algebraische Identität aus Satz 7 kann vorteilhaft benutzt werden, um weitere unerwartete Identitäten zu produzieren: Sei $A \in Gl(3, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= A^3 - trace(A) \cdot A^2 + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot A - \det A \cdot 1\!\!1 \Leftrightarrow \\
0 &= A^2 - trace(A) \cdot A + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot 1\!\!1 - \det A \cdot A^{-1} \Leftrightarrow \\
\mathrm{Adj}A &= trace(\mathrm{Adj}A) \cdot 1\!\!1 + A^2 - trace(A) \cdot A \Rightarrow \\
\langle \mathrm{Adj}A, 1\!\!1 \rangle &= 3 \cdot trace(\mathrm{Adj}A) - trace(A)^2 + trace(A^2) \Rightarrow \\
2 \cdot trace(\mathrm{Adj}A) &= trace(A)^2 - trace(A^2)
\end{aligned}$$

Genauso kann jede höhere Potenz einer invertierbaren Matrix A durch Linearkombination von Termen der Art: $1\!\!1$, A, A^2 erzeugt werden, ebenso jede Potenz von A^{-1}.

Korollar 13
Sei $C = F^T F$. Dann gilt

$$0 = C^3 - \|F\|^2 \cdot C^2 + \|\mathrm{Adj}F\|^2 \cdot C - \det F^2 \cdot 1\!\!1$$

Beweis. Klar. ■

4.6 Invarianten und Isotropie

Definition 6 (Skalare Invarianten einer Matrix)
Sei $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und sei $I : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ so, dass

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3): \quad I(Q^T \cdot F \cdot Q) = I(F)$$

gilt, dann heisst der Wert $I(F)$ skalare ***Invariante*** *von F.*

Dieser Begriff hat eine natürliche Verallgemeinerung in der

Definition 7 (Isotropie für skalarwertige Funktionen)
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Wir sagen dass Ψ isotrop ist, wenn

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3): \quad \Psi(Q^T \cdot F \cdot Q) = \Psi(F)$$

dass also Ψ invariant ist unter der Abbildung $F \mapsto Q^T \cdot F \cdot Q$.

Bemerkung 11
Diese Definition der Isotropie einer skalarwertigen Funktion deckt sich mit dem Verständnis einer isotropen Funktion bei Zeidler. Andere Autoren bezeichnen einen materiellen Körper als isotrop, wenn die zugehörige Energie $\Psi = \Psi(F)$ ***invariant*** *unter* ***Drehungen der Referenzkonfiguration*** *ist, d.h*

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3): \quad \Psi(F \cdot Q) = \Psi(F)$$

Wir bezeichnen diese Eigenschaft als ***materielle Isotropie****. Wir werden noch sehen, welche Beziehung zwischen beiden Eigenschaften besteht.*

Beispiel 1
Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind skalare Invarianten, denn sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda \cdot 1\!\!1) \\
&= \lambda^3 - trace(A) \cdot \lambda^2 + trace(\mathrm{Adj}A) \cdot \lambda - \det A \cdot \lambda^0 \\
&\text{aber für } Q \in O(3) \text{ gilt} \\
0 &= \det\left[Q^T (A - \lambda \cdot 1\!\!1) Q\right] \\
&= \det\left(Q^T A Q - \lambda \cdot 1\!\!1\right) \\
&= \lambda^3 - trace(Q^T A Q) \cdot \lambda^2 + trace(\mathrm{Adj}(Q^T A Q)) \cdot \lambda - \det Q^T A Q \cdot \lambda^0
\end{aligned}$$

und mit Koeffizientenvergleich sieht man sofort die Invarianz der 3 Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $trace(A)$, $trace(\mathrm{Adj}A)$, $\det A$.

Lemma 14 (Invarianten)
Für reell diagonalisierbare Matrizen $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
I_1(A) &:= tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
I_2(A) &:= tr(\mathrm{Adj}A) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\
I_3(A) &:= \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 10 gilt nun

$$\begin{aligned}
tr(F)^2 &= tr(F^2) + 2tr(\mathrm{Adj}F) \\
(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\,(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)
\end{aligned}$$

Bemerkung 12
In den Ingenieurwissenschaften trifft man auch auf folgende Invarianten:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1(A) &:= tr(A) \\
\hat{I}_2(A) &:= \frac{1}{2} tr(A^2) \\
\hat{I}_3(A) &:= \frac{1}{3} tr(A^3)
\end{aligned}$$

Wenn man hier statt A den Deviator $dev(A)$ einsetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
J_1(A) &:= tr(dev(A)) = 0 \\
J_2(A) &:= \frac{1}{2} tr(dev(A)^2) \\
J_3(A) &:= \frac{1}{3} tr(dev(A)^3)
\end{aligned}$$

und für $\sigma = \sigma^T$ gilt dann

$$J_2(\sigma) = \frac{1}{2}\|dev(\sigma)\|^2$$

Lemma 15 (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms)
Sei A reell diagonalisierbar und $\det A \geq 0$. Dann gilt:

$$I_1^2(A) \geq 3 \cdot I_2(A)$$
$$I_2^2(A) \geq 3I_1(A)\, I_3(A)$$

Beweis. Wegen $\lambda_i \cdot \lambda_j \leq \frac{1}{2}\lambda_i^2 + \frac{1}{2}\lambda_j^2$ gilt $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \geq \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3$. Deshalb ist

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 &= \left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right) + 2\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)\\ &\geq 3\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)\end{aligned}$$

also $I_1(A)^2 \geq 3 \cdot I_2(A)$. Um den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen, bemerken wir, dass o.B.d.A $\lambda_i(A) \neq 0$ angenommen werden kann, weil für $\lambda_i = 0$ die Behauptung sofort gilt. Sei also $\det A \neq 0$. Dann existiert $A^{-1} \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und es ist doch dann $I_1(A^{-1})^2 \geq 3 \cdot I_2(A^{-1})$ und $\hat{\lambda}(A^{-1})_i = \frac{1}{\lambda(A)_i}$. Daher ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}\right)^2 &\geq 3\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_3\lambda_1}\right)\\ \left(\frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right)^2 &\geq 3\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right)\\ (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)^2 &\geq 3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\cdot(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\end{aligned}$$

und das ist gerade $I(A)_2^2 \geq 3I_1(A)\, I_3(A)$. ∎

Korollar 14 (Abschätzungen zwischen $\|F\|$, $\|\mathrm{Adj}F\|$, $\det F$)
Sei $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. dann gilt:

$$\begin{aligned}\|F\|^3 &\geq 3\sqrt{3}\det F\\ \|F\|^2 &\geq \sqrt{3}\|\mathrm{Adj}F\|\\ \|\mathrm{Adj}F\|^3 &\geq 3\sqrt{3}(\det F)^2\\ \|F\|^2 &= \langle F^TF, 1\!\!1\rangle \leq \sqrt{3}\,\|F^TF\|\end{aligned}$$

Beweis. Sei $A = F^TF$. Wir wenden auf A das vorherige Lemma an. Es ist

$$\begin{aligned}I_1(A) &= I_1(F^TF) = tr(F^TF) = \|F\|^2\\ I_2(A) &= I_2(F^TF) = tr(\mathrm{Adj}(F^TF)) = tr(\mathrm{Adj}F \cdot \mathrm{Adj}F^T) = \|\mathrm{Adj}F\|^2\\ I_3(A) &= I_3(F^TF) = \det F^TF = (\det F)^2\end{aligned}$$

deshalb auch

$$\begin{aligned} I_1^2(A) \geq& 3I_2(A) \Leftrightarrow \|F\|^2 \geq \sqrt{3}\|\mathrm{Adj}F\| \\ I_2(A) \geq& 3I_1(A)\cdot I_3(A) \Leftrightarrow \|\mathrm{Adj}F\|^2 \geq \sqrt{3}\|F\| \,\det F \end{aligned}$$

Die beiden letzten Zeilen führen sofort auf die Behauptung. Die letzte Behauptung ist klar. ■

Lemma 16 (Invarianten von $F_e^T F_e$ und CC_p^{-1})
Sei $F_p \in Gl(3,\mathbb{R})$ und $F_e = F\cdot F_p^{-1}$, $C = F^T F$, $C_p = F_p^T F_p$. Dann gilt: $F_e^T F_e$ und CC_p^{-1} haben dieselben Invarianten.

Beweis. Wir betrachten das charakteristische Polynom von $F_e^T F_e$. Sei $R \in Gl(3,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \det(F_e^T F_e - \lambda 1\!\!1) &= \det(R^{-1}(F_e^T F_e - \lambda 1\!\!1)R) \\ \det(R^{-1}F_e^T F_e R - \lambda 1\!\!1) &= \det(R^{-1}F_p^{-T}F^T F F_p^{-1}R - \lambda 1\!\!1) \\ \text{wähle } R &= F_p^{-T} \\ \det(F^T F F_p^{-1}F_p^{-T} - \lambda 1\!\!1) &= \det(CC_p^{-1} - \lambda 1\!\!1) \end{aligned}$$

Also haben $F_e^T F_e$ und CC_p^{-1} dasselbe charakteristische Polynom. ■

Definition 8 (Isotropie für tensorwertige Funktionen)
Sei $T : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$. Wir sagen, dass T isotrop ist, wenn

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3): \quad T(Q^T\cdot F\cdot Q) = Q^T\cdot T(F)\cdot Q$$

Beispiel 2 ($F \mapsto \exp F$)
Wir betrachten die Matrix-Exponentialfunktion

$$\exp F := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}F^k$$

Sei $Q \in O(3)$, dann folgt

$$\begin{aligned} \exp(Q^T F Q) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Q^T F Q)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Q^T F^k Q \\ &= Q^T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^k\right)Q \\ &= Q^T(\exp F)Q \end{aligned}$$

Ausserdem hat jede Potenz F^k nach (7) eine Darstellung der Art $F^k = \phi_0 \cdot 1\!\!1 + \phi_1 \cdot F + \phi_2 \cdot F^2$ wobei die ϕ_i skalarwertige Funktionen der Invarianten von F sind. Also gilt

$$\begin{aligned} \exp F &= \alpha_0 \cdot 1\!\!1 + \alpha_1 \cdot F + \alpha_2 \cdot F^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \\ F \cdot \exp F &= F \cdot \left(\alpha_0 \cdot 1\!\!1 + \alpha_1 \cdot F + \alpha_2 \cdot F^2\right) \\ &= \alpha_0 \cdot F + \alpha_1 \cdot F^2 + \alpha_2 \cdot F^3 \\ &= \left(\alpha_0 \cdot 1\!\!1 + \alpha_1 \cdot F + \alpha_2 \cdot F^2\right) \cdot F \\ &= \exp F \cdot F \end{aligned}$$

Beispiel 3 ($\ln : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{S}ym(3)$)
Wir betrachten den Matrix-Logarithmus: Sei $C \in P\mathbb{S}ym(3)$. Dann kann C orthogonal diagonalisiert werden: $C = Q^T D_C Q$, und D_C hat nur positive Eigenwerte λ_i. Wir definieren den Logarithmus von C:

$$\ln C = \ln Q^T D_C Q := Q^T \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & \\ 0 & \ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln\lambda_3 \end{pmatrix} Q$$

Daran sehen wir, dass $\ln C$ für alle $C \in P\mathbb{S}ym(3)$ definiert ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass der Matrix-Logarithmus eine isotrope tensorwertige Funktion ist.

Bemerkung 13
Wir bemerken hier, dass für $\det F > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} trace(\ln F^T F) &= \langle \ln F^T F, 1\!\!1 \rangle = \langle \ln Q^T D_{(F^T F)} Q, 1\!\!1 \rangle \\ &= \langle Q^T \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln\lambda_3 \end{pmatrix} Q, 1\!\!1 \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln\lambda_3 \end{pmatrix}, Q \cdot Q^T \rangle \\ &= \ln\lambda_1 + \ln\lambda_2 + \ln\lambda_3 = \ln\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= \ln\det\left(F^T F\right) = 2\ln\det F \end{aligned}$$

4.7 Materielle Objektivität

Definition 9 (Materielle Objektivität für skalarwertige Funktionen)
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Wir sagen, dass Ψ materiell objektiv ist, wenn

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3) : \quad \Psi(Q \cdot F) = \Psi(F)$$

Definition 10 (Materielle Kovarianz für skalarwertige Funktionen)
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Wir sagen, dass Ψ materiell kovariant ist, wenn

$$\forall F \in C([0,T], \mathbb{M}^{3\times 3})\ \forall Q \in C([0,T], O(3)): \quad \Psi(Q(t)\cdot F(t)) = \Psi(F(t))$$

Das beinhaltet natürlich die Forderung nach materieller Objektivität.

Definition 11 (Materielle Objektivität für tensorwertige Funktionen)
Sei $T : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ Wir sagen dass T materiell objektiv ist, wenn

$$\forall F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ \forall Q \in O(3): \quad T(Q\cdot F) = Q\cdot T(F)$$

Lemma 17
$\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ ist materiell objektiv $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Funktion $\hat{\Psi} : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{R}$, so dass $\Psi(F) = \hat{\Psi}(F^TF)$.

Beweis. Wenn $\Psi(F) = \hat{\Psi}(F^TF)$ ist, dann gilt ja

$$\Psi(QF) = \hat{\Psi}((QF)^TQF) = \hat{\Psi}(F^TQ^TQF) = \hat{\Psi}(F^TF) = \Psi(F)$$

also ist Ψ materiell objektiv.
Sei umgekehrt Ψ materiell objektiv. Wir benutzen den Satz 40 und schreiben $F = RU$. Es ist aber

$$\forall Q \in O(3): \quad \Psi(F) = \Psi(QF) = \Psi(QRU)$$

und wenn wir $Q = R^T$ wählen, folgt

$$\Psi(QRU) = \Psi(U) = \Psi((F^TF)^{\frac{1}{2}})$$

also $\hat{\Psi}(F^TF) := \Psi((F^TF)^{\frac{1}{2}})$. ■

Lemma 18 (Isotropie und materielle Objektivität für skalare Funktionen)
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$.

1. *Ψ ist materiell objektiv*
2. *Ψ ist isotrop*
3. *Ψ ist invariant unter Drehungen der Referenzkonfiguration, d.h*
   $\forall Q \in O(3): \quad \Psi(FQ) = \Psi(F)$

Es gilt: je Zwei erzwingen das Dritte.

Beweis.
(1) + (2) $\to$ (3).
Weil Ψ materiell objektiv ist, gilt

$$\Psi(F) = \hat{\Psi}(F^TF) = \hat{\Psi}(Q^TF^TFQ) = \hat{\Psi}((FQ)^TFQ) = \Psi(FQ)$$

$(2) + (3) \to (1)$

$$\begin{aligned}\Psi(Q^T F Q) = \Psi(F) &= \Psi(FQ) \\ \text{setze } \hat{F} &= FQ \\ \Psi(Q^T \hat{F}) &= \Psi(\hat{F})\end{aligned}$$

$(1) + (3) \to (2)$

$$\hat{\Psi}(F^T F) = \Psi(F) = \Psi(FQ) = \hat{\Psi}((FQ)^T FQ) = \hat{\Psi}(Q^T F^T F Q)$$

also ist $\hat{\Psi}$ isotrop, dann ist aber auch Ψ isotrop. ■

Lemma 19 (Isotropie und Invarianten)
Sei $W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine isotrope und materiell objektive skalarwertige Funktion. Dann gibt es eine Funktion $\hat{W} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\forall\, F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad W(x, F) &= \hat{W}(x, I_1(F^T F), I_2(F^T F), I_3(F^T F)) \\ &= \hat{W}(x, \|F\|^2, \|\mathrm{Adj} F\|^2, (\det F)^2)\end{aligned}$$

Beweis. [Cia88], Theorem 4.4.1, Seite 152. ■

Folgerung 1 (Freie Energie in F_e)
Sei $F_p \in Gl(3, \mathbb{R})$ und $F_e = F F_p^{-1}$. Sei $W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine isotrope und materiell objektive skalarwertige Funktion in F_e. Dann gibt es eine Funktion $\hat{W} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ so dass

$$W(x, F_e) = \hat{W}(x, C C_p^{-1})$$

Beweis. Da W isotrop und materiell objektiv in F_e ist, gibt es nach dem vorangehenden Lemma eine Funktion $\tilde{W}$, so dass

$$W(x, F_e) = \tilde{W}(x, I_1(F_e^T F_e), I_2(F_e^T F_e), I_3(F_e^T F_e))$$

Wegen Lemma 16 gilt für die Invarianten $I_j(F_e^T F_e) = I_j(C C_p^{-1}),\ j = 1, 2, 3$. Wir definieren eine Funktion $\hat{W}$:

$$\hat{W}(x, A) = \tilde{W}(x, I_1(A), I_2(A), I_3(A))$$

Damit gilt dann

$$W(x, F_e) = \hat{W}(x, C C_p^{-1})$$

■

Beispiel 4
Sei $W(F_e) = \|F_e\|^2$. *Dann ist* W *isotrop und materiell objektiv in* F_e. *Es ist* $W(F_e) = W(FF_p^{-1}) = \|FF_p^{-1}\|^2 = \langle FF_p^{-1}, FF_p^{-1}\rangle = \langle F^TF, F_p^{-1}F_p^{-T}\rangle = \langle C, C_p^{-1}\rangle = \langle CC_p^{-1}, 1\!\!1\rangle$.
Genauso betrachten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned}
W(F_e) &= \mu\|F_e^TF_e - 1\!\!1\|^2 + \mu\langle F_e^TF_e - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 \\
&= \mu\|F_p^{-T}F^TFF_p^{-1} - 1\!\!1\|^2 + \lambda\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1} - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 \\
&= \mu\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1} - 1\!\!1, F_p^{-T}F^TFF_p^{-1} - 1\!\!1\rangle + \lambda\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1} - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 \\
&= \mu(\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1}, F_p^{-T}F^TFF_p^{-1}\rangle - 2\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1}, 1\!\!1\rangle + 3) + \\
&\quad \lambda(\langle F_p^{-T}F^TFF_p^{-1}, 1\!\!1\rangle - 3)^2 \\
&= \mu(\langle F^TFF_p^{-1}F_p^{-T}, F_p^{-1}F_p^{-T}F^TF\rangle - 2\langle F^TF, F_p^{-1}F_p^{-T}\rangle + 3) + \\
&\quad \lambda(\langle F^TF, F_p^{-1}F_p^{-T}\rangle - 3)^2 \\
&= \mu(\langle CC_p^{-1}, C_p^{-1}C\rangle - 2\langle C, C_p^{-1}\rangle + 3) + \lambda(\langle C, C_p^{-1}\rangle - 3)^2 \\
&= \mu(\langle CC_p^{-1}, (CC_p^{-1})^T\rangle - 2\langle CC_p^{-1}, 1\!\!1\rangle + 3) + \lambda(\langle CC_p^{-1}, 1\!\!1\rangle - 3)^2 \\
&= \mu(\langle CC_p^{-1} - 1\!\!1, (CC_p^{-1} - 1\!\!1)^T\rangle + \lambda\langle CC_p^{-1} - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2
\end{aligned}$$

■

Lemma 20 (Isotropie und materielle Objektivität für tensorwertige Funktionen)
Sei $T : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$

1. T *ist materiell objektiv*
2. T *ist isotrop*
3. $\forall Q \in O(3) : \quad T(F \cdot Q) = T(F) \cdot Q$

Es gilt: je Zwei erzwingen das Dritte.

Beweis. Selbes Vorgehen wie im skalaren Fall. ■

Lemma 21
Sei $T : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ *eine isotrope Tensorfunktion, dann gilt*

$$\forall S \in P\mathbb{S}ym(3) : \quad T(S) \cdot S = S \cdot T(S)$$

Beweis. [Ogd83], Satz 4.2.4, Seite 193 ■

Satz 8 (Rivlin-Ericksen Darstellung)
Sei $T : Gl(3,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{S}ym(3)$ eine materiell objektive und isotrope tensorwertige Funktion, dann hat T die Darstellung:

$$T(F) = \phi_0 \cdot \mathbb{1} + \phi_1 \cdot FF^T + \phi_2 \cdot (FF^T)^2$$

wobei $\phi_i = \phi_i(FF^T), i = 0,1,2$ reellwertige skalare Funktionen der 3 Invarianten von FF^T sind.

Beweis. [Cia88] Seite 110. ■

Satz 9 (Vertauschungssatz)
Sei $T : Gl(3\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{S}ym(3)$ eine materiell objektive und isotrope tensorwertige Funktion, dann gilt

$$\forall F \in Gl(3\mathbb{R}) : \quad T(F) \cdot FF^T = FF^T \cdot T(F)$$

Wenn $T : Psym(3) \mapsto \mathbb{S}ym(3)$ eine materiell objektive und isotrope tensorwertige Funktion ist, dann gilt darüberhinaus

$$\forall S \in P\mathbb{S}ym(3) : \quad T(S) \cdot S = S \cdot T(S)$$

das heisst, dass $T(F)$ und FF^T koaxial sind genauso wie $T(S)$ und S.

Beweis. Wir benutzen den Satz 8. Es gilt dann ja

$$\begin{aligned} T(F) \cdot FF^T &= \left(\phi_0 \cdot \mathbb{1} + \phi_1 \cdot FF^T + \phi_2 \cdot (FF^T)^2\right) \cdot FF^T \\ &= \phi_0 \cdot FF^T + \phi_1 \cdot FF^T FF^T + \phi_2 \cdot (FF^T)^2 FF^T \\ &= FF^T \cdot \phi_0 \cdot \mathbb{1} + FF^T \cdot \phi_1 \cdot FF^T + FF^T \cdot \phi_2 \cdot (FF^T)^2 \\ &= FF^T \cdot T(F) \end{aligned}$$

Genauso verfahren wir für $S \in P\mathbb{S}ym(3)$. ■

Kapitel 5

Deviator und Fließfunktion

5.1 Deviator

Definition 12 (Deviator)
Der (lineare) Deviator einer Matrix $S \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ ist so definiert:

$$dev(S) = S - \frac{1}{3}tr(S) \cdot 1\!\!1$$

Wir versammeln nachfolgend einige Eigenschaften des Deviators. Es gilt

1. $dev : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ ist linear
2. $dev : \mathbb{S}ym \mapsto \mathbb{S}ym$ linear
3. $tr(dev(S)) = 0$
4. $dev(A) = proj_{\{tr(F)=0\}}(A)$ d.h dev ist die orthogonale Projektion auf spurlose Matrizen.
5. Für die Ableitung gilt: $D(dev(S)).H = dev(H)$
6. $\|dev(S)\|^2 = \|S\|^2 - \frac{1}{3}tr(S)^2$
7. $\langle A, dev(S)\rangle = \langle dev(A), S\rangle$
8. $\langle S, dev(S)\rangle = \|dev(S)\|^2$
9. $\langle dev(A), dev(B)\rangle = \langle A, dev(B)\rangle = \langle B, dev(A)\rangle$
10. $dev(A)^T = dev(A) \Leftrightarrow A = A^T$
11. $dev(dev(A)) = dev(A)$
12. $A \in Gl(3, \mathbb{R}) \Rightarrow dev(A^{-1}SA) = A^{-1}dev(S)A$

13. $Q \in O(3) \Rightarrow dev(Q^T SQ) = Q^T dev(S)Q$ und deswegen ist dev eine isotrope Tensorfunktion

14. $D(\|dev(S)\|^2).H = 2\langle dev(S), H\rangle$

15. $dev(A) = 0 \Leftrightarrow A = p \cdot 1\!\!1$ und $p \in \mathbb{R}$ nennt man den **hydrostatischen Druck**

Die Beweise der obigen bekannten Eigenschaften bestehen in einfachem Nachrechnen. ■

Definition 13 (Nichtlinearer Deviator)
Sei $S \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit $\det S > 0$. Wir nennen

$$Dev(S) = \frac{S}{\det S^{\frac{1}{3}}} - 1\!\!1$$

*den **nichtlineare Deviator** $Dev(S)$.*

Wir versammeln einige Eigenschaften des nichtlinearen Deviators. Sei $S \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit $\det S > 0$. Es gilt

1. $Dev(S) = 0 \Rightarrow S = \det S^{\frac{1}{3}} \cdot 1\!\!1$

2. $Dev(A^{-1}SA) = A^{-1}Dev(S)A$, also ist Dev eine isotrope Tensorfunktion.

3. $S = p \cdot 1\!\!1 \Rightarrow Dev(S) = 0$

4. $\langle S, Dev(S)\rangle = \frac{\|S\|^2}{\det S^{\frac{1}{3}}} - tr(S)$

5. $D(Dev(S)).H = \left(\det S^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot H - \frac{S}{3\det S^{\frac{1}{3}}}\langle S^{-T}, H\rangle$

6. $D(Dev(S)_{S=1\!\!1}.H = dev(H)$

7. $Dev(S) = dev(S) + o(\|S - 1\!\!1\|)$

Hieran sehen wir, dass der so definierte nichtlineare Deviator eine sinnvolle Verallgemeinerung des linearen Deviators auf große Deformationen darstellt. Dort wo also in einer Modellierung der lineare Deviator auftritt, könnte man überlegen, ob man ihn gegebenenfalls durch den nichtlinearen Deviator ersetzt.

5.2 Fließfunktion

Sei $G : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(S) = G(dev(S))$$

Wir nennen Φ die **Fließfunktion**. Üblicherweise wählt man G strikt konvex, dann ist Φ konvex, aber nicht strikt konvex, denn der hydrostatische Druck wird ja nicht kontrolliert. Die im Ingenieurbereich meist verwendete **von Mises** Fließfunktion entsteht beispielsweise, wenn man $G(S) = \|S\|$ wählt. Für die Ableitung der Fließfunktion notieren wir:

$$\begin{aligned} D_S\Phi(S).H &= DG(dev(S)).(dev(H)) = \langle DG(dev(S)), dev(H)\rangle \\ &= \langle dev(DG(dev(S))), H\rangle \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für

$$\begin{aligned} G(A) = \frac{1}{2}\|A\|^2 \quad &\Rightarrow D_S\Phi(S).H = \langle dev(2dev(S)), H\rangle = \langle dev(S), H\rangle \\ G(A) = \|A\| \quad &\Rightarrow D_S\Phi(S).H = \langle dev(\frac{dev(S)}{\|dev(S)\|}), H\rangle = \frac{1}{\|dev(S)\|}\langle dev(S), H\rangle \end{aligned}$$

außerdem ist dann

$$\forall\ S \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad tr(D_S\Phi(S)) = tr(dev(DG(dev(S)))) = 0$$

5.3 Plastische Inkompressibilität und Deviator

Wenn $A(t)$ eine Lösung der ODE: $\frac{d}{dt}A(t) = dev(W(A(t))$ ist, dann gilt $tr(A(t)) = const.$ denn es ist $\frac{d}{dt}tr(A(t)) = tr(\frac{d}{dt}A(t)) = tr(dev(W(A(t))) = 0.$

Lemma 22
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$tr(A) = 0 \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad A = dev(X)$$

Beweis. Sei $A \neq 0$. Wir können $A = p\,\mathbb{1} + dev(X)$ schreiben. Wenn $tr(A) = 0$ ist, dann muss aber $p = 0$ sein. Also ist dann $A = dev(X)$. Die andere Richtung ist klar. ∎

Folgerung 2
Sei $C_p(t) \in C^1((0,T); Gl(3,\mathbb{R}))$ *und* $\det C_p(t) = 1$*, dann ist*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}[\det C_p(t)] = D(\det C_p(t)).(C_p'(t)) = \det C_p(t) \cdot tr(C_p'(t) \cdot C_p^{-1}(t)) \\ 0 &= 1 \cdot tr(C_p'(t) \cdot C_p^{-1}(t)) \end{aligned}$$

Also gilt dann $C_p'(t) \cdot C_p^{-1}(t) = dev(X(t))$ *oder* $C_p'(t) = dev(X(t)) \cdot C_p(t)$.

Folgerung 3
Sei $C_p(t) \in C^1((0,T); Gl(3,\mathbb{R}))$ *eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} C_p'(t) &= dev(X(t)) \cdot C_p(t) \\ C_p(0) &= C_p \end{aligned}$$

mit $\det C_p = 1$ *und* $X(t)$ *beliebig, dann ist* $\det C_p(t) = 1 = const$. *Diese Eigenschaft der Lösung nennt man im Kontext der Viskoplastizität auch* ***plastische Inkompressibilität****, sie wird also schon alleine durch die spezielle Form der Evolutionsgleichung garantiert.*

Satz 10 (Additiver Kommutator)
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. *Dann gilt*

$$tr(A) = 0 \Leftrightarrow \exists X, Y \in \mathbb{M}^{3\times 3}: \quad A = XY - YX$$

Beweis. [HJ91], Seite 288. ∎

Satz 11 (Multiplikativer Kommutator)
Sei $A \in Gl(3,\mathbb{R})$. *Dann gilt*

$$\det A = 1 \Leftrightarrow \exists X, Y \in Gl(3,\mathbb{R}): \quad A = XYX^{-1}Y^{-1}$$

Beweis. [HJ91], Seite 291. ∎

Kapitel 6

Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

6.1 Lokale Betrachtung zu $F = F_e \cdot F_p$

Während in der linearisierten Theorie der plastischen Verformung im wesentlichen ein allgemein akzeptiertes Modell existiert [LC85], welches auf einer additiven Zerlegung des symmetrischen Deformationsgradienten $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$ in einen symmetrischen elastischen und einen symmetrischen plastischen Teil basiert, gibt es für große plastische Verformungen noch kein allgemein akzeptiertes Modell.
Ein in der Ingenieurliteratur dennoch weit verbreitetes Modell [Mie92, Sim88b, Hau85] zur Beschreibung von großen plastischen Deformationen, welches auch den Untersuchungen im SFB 298 zugrunde liegt, geht lokal von einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten $F = \nabla u$ in einen elastischen und plastischen Anteil aus:

$$F = F_e \cdot F_p$$

Dabei sei $F_p \in Gl(3, \mathbb{R})$ und $\det F_p = 1$. Im allgemeinen sind F_e, F_p inkompatibel, das heisst, es sind keine Gradienten. Die Bedingung $\det F_p = 1$ nennt man **plastische Inkompressibilität**. Sie steht für die Vorstellung, dass lokale Volumenänderungen im Material rein elastisch verlaufen. Zusammen mit dem Ansatz, die Energie nur von dem elastischen Teil F_e abhängen zu lassen, wird die Existenz einer Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ postuliert (der freien Energie), mit der dann gilt :

$$W = W(F_e) = W(FF_p^{-1})$$

Hierbei noch unbestimmt ist die Art der Zerlegung in elastischen und plastischen Teil. Wir bemerken indessen, dass die obige Zerlegung nie eindeutig sein kann, denn für beliebiges $R \in O(3)$ gilt:

$$F = F_e\, F_p = F_e\, \mathbb{1}\, F_p = F_e\, RR^T\, F_p = (F_e R) \cdot (R^T F_p) = \hat{F}_e\, \hat{F}_p$$

Daher fordern wir, dass die Energie W invariant bzgl. solchen Drehungen ist, also

$$\forall\, R \in O(3): \quad W(F_e) = W(\hat{F}_e) = W(F_e\, R)$$

Außerdem soll die Energie, betrachtet als Funktion von F materiell objektiv sein, das heisst

$$\forall\, R \in O(3), \forall\, F_p \in Gl(3,\mathbb{R}): \quad W(F\, F_p^{-1}) = W(RF\, F_p^{-1})$$

Daraus folgt für die Darstellung der Energie W in F_e sofort

$$\forall\, R \in O(3): \quad W(F_e) = W(R\, F_e)$$

Das ist aber gerade die materielle Objektivität in F_e. Zusammen mit der Invarianzforderung aus der Nichteindeutigkeit der multiplikativen Zerlegung ergibt sich mit Lemma 18, dass W eine isotrope Funktion von $F_e^T F_e$ sein muss, also

$$W(F_e) = \hat{W}(F_e^T F_e)$$

wobei $\hat{W}$ eine skalarwertige isotrope Funktion ist. Mit Lemma 19 schließen wir, dass es eine Funktion $\bar{W}$ geben muss, so dass

$$W(F_e) = \bar{W}(I_1(F_e^T F_e), I_2(F_e^T F_e), I_3(F_e^T F_e))$$

und $I_k(F_e^T F_e)$ die Invarianten von $F_e^T F_e$ bezeichne. Wegen Lemma 16 gibt es eine isotrope Funktion, die wir wieder mit $\hat{W}$ bezeichnen, so dass

$$W(F_e) = \hat{W}(CC_p^{-1})$$

mit $C = F^T F$ und $C_p = F_p^T F_p$. Damit ist die mögliche Form der freien elastischen Energie im isotropen Fall bestimmt. Wir sehen hier gleichzeitig, dass die Forderung der Nichteindeutigkeit der multiplikativen Zerlegung zusammen mit der materiellen Objektivität die Isotropie der freien elastischen Energie erzwingt. Um anisotropes Materialverhalten zu beschreiben wird man also die Unbestimmtheit der Zwischenkonfiguration aufgeben müssen.

6.2 Interpretation von F_p als lokal entlastete plastische Zwischenkonfiguration

Mithilfe eines Gedankenexperimentes gelangt man zu einer möglichen Interpretation der inneren Variablen F_p aus der multiplikativen Zerlegung $F = F_e \cdot F_p$. Es sei eine Energie in der Form $W = W(\nabla u \cdot F_p^{-1})$ gegeben. Nach einem gewissen

Prozessverlauf habe sich der Wert F_p ergeben. Wenn F_p nun kompatibel wäre, das heisst, es gäbe eine Funktion $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$F_p(x) = \nabla\phi(x)$$

dann wäre $\nabla\phi$ gerade Lösung des Minimumproblems

$$\inf_{u \in W_1^p(\Omega)} \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1})\, dx$$

zu natürlichen Randbedingungen, wenn $\mathbb{1}$ ein globales Minimum von

$$\inf_{u \in W_1^p(\Omega)} \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

ist, was zum Bsp. immer der Fall ist, wenn $\forall\ F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\ W(F) \geq 0,\ W(\mathbb{1}) = 0$ ist. Damit wäre ϕ die zurückbleibende permanente plastische Deformation bei globaler Entlastung. Außerdem wäre der Körper in der bleibenden plastischen Deformation spannungsfrei, weil sich automatisch $DW(\nabla\phi\ F_p^{-1}) = DW(\mathbb{1}) = 0$ einstellt.
Ist nun aber F_p inkompatibel, so stellt sich als Lösung des Minimumproblems bei globaler Entlastung wieder eine zurückbleibende plastische Deformation $\hat{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ein, die in einem gewissen Sinne die Inkompatibilität von F_p bestmöglich kompensiert und zu einer minimalen elastischen Energie führt. Der Körper ist nun im entlasteten Zustand i.A nicht mehr spannungsfrei: die Inkompatibilität erzeugt vielmehr bleibende Eigenspannungen! Insofern könnte man die verbleibende elastische Energie bei totaler Entlastung als ein Maß für die Inkompatibilität von F_p ansehen.

Bemerkung 14
Darüberhinausgehend machen wir keine weiteren Aussagen zu der Motivation der multiplikativen Zerlegung. Es gibt gegen die obige Interpretation der Zerlegung auch prinzipielle Einwände, so zum Bsp. geäußert in [BdG94]. Dort wird nahegelegt, dass F_p prinzipiell im Material bestimmbar sein muss, diese Bemerkung richtet sich also gegen die Nichteindeutigkeit der Zerlegung.
Ausserdem kann diese Zerlegung zusammen mit anderen Invarianzprinzipien auch auf andere Formen der Energiefunktion W führen, insbesondere dann, wenn man als elastisches Maß, auf dem die Energie definiert sein soll, nicht F_e selbst, sondern zum Bsp. $\hat{E}_e := \frac{1}{2}(F^TF - F_p^TF_p)$ wählt.

6.3 Vollständige geometrische Linearisierungen

Jedes Modell für große plastische Verformungen sollte linearisiert in F und in F_p gerade wieder mit dem allgemein akzeptierten linearen Modell für kleine elastische und plastische Deformationen zusammenfallen. Das liefert jedoch kein

zusätzliches Auswahlkriterium, da, wie wir sehen werden, unterschiedliche nichtlineare Modelle diesselbe Linearisierung besitzen.
Wir betrachten hier drei verschiedene Ansätze für ein elastisches Maß ausgehend von der multiplikativen Zerlegung $F = F_e\, F_p$:

1. $F_e^T F_e - 1\!\!1$
2. $C C_p^{-1} - 1\!\!1$
3. $F^T F - F_p^T F_p$

Wir setzen $F = 1\!\!1 + \nabla\phi,\ F_p = 1\!\!1 + p,\ F_e = 1\!\!1 + e$. Dann ist

$$\begin{aligned} F^T F &= (1\!\!1 + \nabla\phi)^T (1\!\!1 + \nabla\phi) = 1\!\!1 + \nabla\phi^T + \nabla\phi + \nabla\phi^T \nabla\phi \\ F_p^T F_p &= (1\!\!1 + p)^T (1\!\!1 + p) = 1\!\!1 + p^T + p + p^T p \\ F &= F_e\, F_p = (1\!\!1 + e)\ (1\!\!1 + p) = 1\!\!1 + e + p + ep \\ F_e^T F_e &= (1\!\!1 + e)^T\ (1\!\!1 + e) = 1\!\!1 + e^T + e + e^T e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_p^{-1} &= [(1\!\!1 + p)^T\ (1\!\!1 + p)]^{-1} = [1\!\!1 + p^T + p + p^T p]^{-1} = 1\!\!1 - (p^T + p + p^T p) + \dots \\ F_e^T\ F_e &= F_p^{-T} F^T F F_p^{-1} = (1\!\!1 + p)^{-T} (1\!\!1 + \nabla\phi)^T (1\!\!1 + \nabla\phi)(1\!\!1 + p)^{-1} \\ &= (1\!\!1 - p^T + \dots)(1\!\!1 + \nabla\phi^T + \nabla\phi + \nabla\phi^T \nabla\phi)(1\!\!1 - p + \dots) \\ &= 1\!\!1 + \nabla\phi^T + \nabla\phi + \nabla\phi^T \nabla\phi) - (p^T + p) + \dots \\ &= 1\!\!1 + (\nabla\phi^T + \nabla\phi) - (p^T + p) + \dots \\ C C_p^{-1} &= (1\!\!1 + \nabla\phi^T + \nabla\phi + \nabla\phi^T \nabla\phi)\ (1\!\!1 - (p^T + p + p^T p) + \dots) \\ &= 1\!\!1 + \nabla\phi^T + \nabla\phi - (p^T + p) + \dots \end{aligned}$$

wobei ... für Terme höherer Ordnung steht. Daher gilt

$$\begin{aligned} F_e^T F_e - 1\!\!1 &= (\nabla\phi^T + \nabla\phi) - (p^T + p) + \dots = 2(\epsilon - \epsilon_p) + \dots \\ C C_p^{-1} - 1\!\!1 &= (\nabla\phi^T + \nabla\phi) - (p^T + p) + \dots = 2(\epsilon - \epsilon_p) + \dots \\ F^T F - F_p^T F_p &= (\nabla\phi^T + \nabla\phi) - (p^T + p) + \dots = 2(\epsilon - \epsilon_p) + \dots \end{aligned}$$

so dass die vollständigen geometrischen Linearisierungen jeweils zusammenfallen.

6.4 Linearisierung in F_e

In der Metallplastizität geht man üblicherweise davon aus, daß der Bereich, in dem das Material elastisch reagiert, sehr klein ist. Es scheint daher, bei Abwesenheit von Starrkörperrotationen, zunachst sinnvoll zu sein, die Annahme

$$\|F_e - 1\!\!1\| \quad \text{punktweise sehr klein}$$

direkt in der Formulierung der elastischen Energie zu berücksichtigen. Da für kleine Verformungen jede isotrope, materiell objektive elastische Energie als

$$W(F_e) = \mu \, \|F_e^T F_e - 1\!\!1\|^2 + \lambda \, tr(F_e^T F_e - 1\!\!1)^2$$

zu schreiben ist (Satz 33), kann man diesen Ausdruck nun in F_e selbst quadratifizieren. Dabei ergibt sich mit $F_e = 1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1)$

$$\begin{aligned} W(F_e) &= \mu \, \|(1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1))^T (1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1)) - 1\!\!1\|^2 \\ &\quad + \lambda \, tr((1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1))^T (1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1)) - 1\!\!1)^2 \\ &= \mu \, \|1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1)^T + (F_e - 1\!\!1) + (F_e - 1\!\!1)^T (F_e - 1\!\!1) - 1\!\!1\|^2 \\ &\quad + \lambda \, tr(1\!\!1 + (F_e - 1\!\!1)^T + (F_e - 1\!\!1) + (F_e - 1\!\!1)^T (F_e - 1\!\!1) - 1\!\!1)^2 \end{aligned}$$

Wir streichen den quadratischen Term $(F_e - 1\!\!1)^T (F_e - 1\!\!1)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \hat{W}(F_e) &= \mu \, \|(F_e - 1\!\!1)^T + (F_e - 1\!\!1)\|^2 + \lambda \, tr((F_e - 1\!\!1)^T + (F_e - 1\!\!1))^2 \\ &= 4\mu \, \|\frac{F_e^T + F_e}{2} - 1\!\!1\|^2 + 4\lambda \, tr(F_e - 1\!\!1)^2 \end{aligned}$$

Wenn wir nun wieder $F_e = F \, F_p^{-1}$ beachten, folgt

$$\hat{W}(FF_p) = 4\mu \, \|\frac{F_p^{-T} F^T + F F_p^{-1}}{2} - 1\!\!1\|^2 + 4\lambda \, tr(FF_p^{-1} - 1\!\!1)^2$$

Diese Energie führt in der Gleichgewichtsgleichung auf ein lineares Problem in der Deformation F, obwohl sowohl F als auch F_p groß sein dürfen. Die entstehenden Gleichungen sind bis jetzt (und auch in dieser Arbeit nicht) noch nicht untersucht worden. Man könnte in diesem Zusammenhang auch von einer Linearisierung bzgl. der plastischen Zwischenkonfiguration F_p sprechen. Wir bemerken noch, daß bei dieser Formulierung der elastischen Energie die Variablen F_p und C_p nicht gleichberechtigt sind. Natürliche Variable ist hier ausschließlich F_p, so daß eine Evolutionsgleichung für die plastische Variable sinnvollerweise in F_p formuliert sein müsste. Der Vollständigkeit halber geben wir auch noch die 2.Ableitung dieser Energie bzgl. F an. Es ist bis auf einen positiven Faktor

$$D_F^2 \hat{W}(FF_p^{-1}).(H,H) = 4\mu \, \|\frac{F_p^{-T} H^T + H F_p^{-1}}{2}\|^2 + 4\lambda \, tr(HF_p^{-1})^2$$

Daran sehen wir, daß dieses Problem für jedes F_p konvex in F ist. Ob es auch koerziv und strikt konvex ist, ist für beliebiges F_p nicht klar.

Bemerkung 15
In der Zwischenzeit ist dieses Problem vom Autor [Nef00] vollständig analysiert worden.

Kapitel 7

Spannungstensoren

7.1 Spannungstensoren

Definition 14 (Spannungstensoren)
Wir sagen, dass $S \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ ein Spannungstensor ist, falls die Komponenten von S die physikalische Einheit [Kraft]/[Fläche] besitzen.

Folgerung 4
Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ dimensionslos und $S \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ ein Spannungstensor. Dann sind $A \cdot S$ und $S \cdot A$ wieder Spannungstensoren.

In der Ingenieurliteratur werden oft aus gegebenen Spannungstensoren mit Hilfe von **Pull-Back** bzw. **Push-Forward** Transformationen [AMR83] auf diese Weise neue Spannungstensoren erzeugt, die für die ingenieurmäßige Modellierung und das Verständnis vorteilhaft sind. [SK96]
Allerdings ist es bisher nicht gelungen, daraus auch strikt mathematisch Gewinn zu ziehen. Die Schwierigkeiten einer mathematischen Existenztheorie für die nichtlinearen Gleichungen der Viskoplastizität scheinen invariant unter diesen diversen Transformationen zu sein.

Sei $u : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Deformation. Wir nennen $F(x) = \nabla u(x)$ den Deformationsgradienten. Der Deformationsgradient selbst ist dimensionslos, denn im Differentialquotienten in einer Komponenten kürzt sich die natürliche Einheit Länge. Es bezeichne

1. $C = F^T F$ den rechten Cauchy-Green Deformationsstensor.

2. $B = F F^T$ den linken Cauchy-Green Deformationsstensor.

3. $E = \frac{1}{2}\left(F^T F - \mathbb{1}\right)$ den Greenschen oder materiellen Verzerrungstensor.

4. T den Cauchyschen Spannungstensor.

5. S_1 den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

6. S_2 den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

Somit sind beispielsweise $C \cdot S_2, \quad F \cdot S_1$ wieder Spannungstensoren im obigen Sinne.

Bemerkung 16
In gewisser Weise misst C die Deformationen, aber prinzipiell ist jede invertierbare Tensorfunktion $C \mapsto E(C)$ genauso geeignet. In Frage kommen zum Bsp.:

$$
\begin{aligned}
E_1(C) &= C, & E_2(C) &= C^{\frac{1}{2}} \\
E_3(C) &= \frac{1}{2}\left(C - \mathbb{1}\right), & E_4(C) &= \ln C \\
E_5(B) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - B^{-1}\right), & E_6(B) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - B\right) \\
E_7(C) &= \frac{1}{2}\left(C^{-1} - \mathbb{1}\right)
\end{aligned}
$$

Eine Auswahl muss deshalb mit zusätzlichen Kriterien erfolgen, wie Übersichtlichkeit der Gleichungen u.s.w. . Wie sich in unseren Untersuchungen herausstellte, besitzt die Formulierung direkt in E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 gewisse Nachteile (das zugeordnete PDE-System ist in vielen Fällen nicht elliptisch, z.Bsp. bei quadratischen Ansätzen in diesen Variablen!) und die Formulierung in $E_2(C)$ bietet sich nur an, wenn konsequent in Hauptachsen gerechnet wird.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir nennen Ω auch die **Referenzkonfiguration**. Sei $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Familie von Abbildungen aus der Referenzkonfiguration in die **Momentankonfiguration** $\Omega_t = u(\Omega, t)$. Dann beschreibt $u(x_1, t)$ den Ort des materiellen Teilchens $x_1 \in \Omega$ zur Zeit $t > 0$. Wir bezeichnen mit $\dot{F}(t)$ den Deformationsgeschwindigkeitsgradienten,

$$\dot{F}(t) := \frac{d}{dt}\nabla u(x,t) = \nabla u_t(x,t) = \nabla \dot{u}(x,t)$$

Definition 15 (Spannungsleistung)
Sei $\bar{\Omega} \subset \Omega$. Die Spannungsleistung über das Gebiet $\bar{\Omega}$ ist so definiert:

$$P_{\bar{\Omega}}[S,F] := \int_{\bar{\Omega}} \langle S(F(t)), \dot{F}(t) \rangle \, dx = \langle S(F(t)), \dot{F}(t) \rangle_{\bar{\Omega}}$$

7.2 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Wir benutzen den 2. Hauptsatz der Thermodynamik in folgendender Form:

Satz 12 (2. Hauptsatz, Prinzip der positiven Dissipation)
Für jede Bewegung $u(x,t)$ eines elastischen Materials gibt es eine freie Energie E, so dass $\forall\ \bar{\Omega} \subset \Omega$ gilt:

$$P_{\bar{\Omega}}[S,F] - \frac{d}{dt}E(F_e(t)) \geq 0$$
$$\int_{\bar{\Omega}} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \frac{d}{dt}\int_{\bar{\Omega}} W(F_e(t)) \, dx \geq 0$$

Beweis. Standard A-Priori Setzung.

Korollar 15
Sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ die Dichte der freien Energie E und für jede Bewegung $u(x,t)$ des Materials und $\forall\ \bar{\Omega} \subset \Omega$ gelte:

$$\int_{\bar{\Omega}} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \frac{d}{dt}\int_{\bar{\Omega}} W(F_e(t)) \, dx \geq 0$$

und $F_e = F \cdot F_p^{-1}$. Dann gilt

$$S(F) = D_F W(F \cdot F_p^{-1}) \quad \textit{hyperelastisches Materialverhalten}$$
$$\frac{d}{dt}W(F(\tau)_{\tau=t} \cdot F_p^{-1}(t)) \leq 0 \quad \textit{reduzierte Dissipationsungleichung}$$

Beweis.

$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \frac{d}{dt}\int_{\Omega} W(F_e(t)) \, dx$$
$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \int_{\Omega} \frac{d}{dt}W(F(t) \cdot F_p^{-1}(t)) \, dx$$
$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \int_{\Omega} \langle D_{F_e}W(FF_p^{-1}), \dot{F}(t)F_p^{-1} + F\dot{F_p^{-1}}(t)\rangle \, dx$$
$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)), \dot{F}(t)\rangle \, dx - \int_{\Omega} \langle D_{F_e}W(FF_p^{-1})F_p^{-T}, \dot{F}(t)\rangle + \langle F^T D_{F_e}W(FF_p^{-1}), \dot{F_p^{-1}}(t)\rangle \, dx$$
$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)) - D_{F_e}W(FF_p^{-1})F_p^{-T}, \dot{F}(t)\rangle - \langle F^T D_{F_e}W(FF_p^{-1}), \dot{F_p^{-1}}(t)\rangle \, dx$$
$$0 \leq \int_{\Omega} \langle S(F(t)) - D_{F_e}W(FF_p^{-1})F_p^{-T}, \dot{F}(t)\rangle - \frac{d}{dt}W(F(\tau)_{\tau=t} \cdot F_p^{-1}(t)) \, dx$$

Da der erste Summand kein Vorzeichen hat, folgt daraus

$$\int_{\Omega} \langle S(F(t)) - D_{F_e}W(FF_p^{-1})F_p^{-T}, \dot{F}(t)\rangle \, dx = 0$$

und da Ω beliebig war können wir die Aussage unter geeigneten Glattheitsannahmen lokalisieren, erhalten also punktweise

$$\langle S(F(t)) - D_{F_e} W(FF_p^{-1})F_p^{-T}, \dot{F(t)}\rangle = 0$$
$$\langle S(F(t)) - D_F W(FF_p^{-1}), \dot{F(t)}\rangle = 0$$

und weil $F(t)$ beliebig gewählt werden kann, muss

$$S(F(t)) - D_F W(FF_p^{-1}) = 0$$

gelten. Die Bedingung für den zweiten Summanden in lokalisierter Form ist gerade die reduzierte Dissipationsungleichung. ■

7.3 Reduzierte Dissipationsungleichung

Definition 16 (Reduzierte Dissipationsungleichung)
Sei $W = W(F,z)$ und $S_1(F,z) = D_F W(F,z)$. Wir sagen, dass $z \in C^1([0,T], C(\Omega, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ der reduzierten Dissipationsungleichung genügt, falls

$$\forall\ F \in \mathbb{M}^{3\times 3}: \quad \langle D_z W(F, z(t)), \dot{z(t)}\rangle = \frac{d}{dt} W(F, z(t)) \leq 0$$

7.4 Energieungleichung: dynamischer Fall

Lemma 23 (Energieungleichung im dynamischen Fall)
Sei $E(t) = \int_\Omega W(F(t)F_p^{-1}(t)) + \frac{1}{2}u_t^2\ dx$ und $u_{tt} = div\ D_F W(FF_p^{-1})$. Ausserdem genüge $F_p^{-1} \in C^1([0,T]; C(\Omega, Gl(3,\mathbb{R})))$ der reduzierten Dissipationsungleichung. Dann gilt:

$$E(t) \leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{\partial\Omega} \langle u_t, D_F W(FF_p^{-1}).\vec{n}\rangle\ dS\ dt$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} W(F(t)F_p^{-1}(t)) + \frac{1}{2}u_t^2 \; dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \langle D_{F_e}W(FF_p^{-1}), \dot{F}F_p^{-1} + \underbrace{F\dot{\overline{F_p^{-1}}}}_{\text{red. Diss. Ungl.}} \rangle + \langle u_t, u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3} \; dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \langle D_{F_e}W(FF_p^{-1}), \dot{F}F_p^{-1}\rangle + \langle u_t, u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3} \; dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \langle D_F W(FF_p^{-1}), \dot{F}\rangle + \langle u_t, u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3} \; dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \langle D_F W(\nabla u \cdot F_p^{-1}), \dot{\overline{\nabla u}}\rangle + \langle u_t, u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3} \; dx
\end{aligned}
$$

Wir benutzen die Identität

$$
div \; (D_F W(\cdot)^T . u_t) = \langle D_F W(\cdot), \nabla u_t\rangle + \langle u_t, div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3}
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\leq \int\limits_{\Omega} div(D_F W(\cdot)^T . u_t) - \langle u_t, div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle u_t, div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3} \; dx \\
&= \int\limits_{\Omega} div(D_F W(\cdot)^T . u_t) \; dx \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \langle D_F W(FF_p^{-1})^T . u_t, \vec{n}\rangle \; dS \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \langle u_t, D_F W(FF_p^{-1}) . \vec{n}\rangle \; dS
\end{aligned}
$$

also integriert

$$
E(t) \leq E(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} \langle u_t, D_F W(FF_p^{-1}) . \vec{n}\rangle \; dS \; dt
$$

■

7.5 Energieungleichung: quasistatischer Fall

Lemma 24 (Energieungleichung im quasistatischen Fall)
Sei $E(t) = \int\limits_\Omega W(F(t)F_p^{-1}(t))\,dx$ *und* $0 = div\ D_F W(FF_p^{-1})$. *Ausserdem genüge* $F_p^{-1} \in C^1([0,T]; C(\Omega, Gl(3,\mathbb{R})))$ *der reduzierten Dissipationsungleichung. Dann gilt:*

$$E(t) \le E(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} \langle u_t D_F W(FF_p^{-1}).\vec{n}\rangle\, dS\, dt$$

Beweis. Genauso wie im dynamischen Fall. ∎

Korollar 16
Sei $E(t) = \int\limits_\Omega W(F(t)F_p^{-1}(t)) + \frac{1}{2}u_t^2\,dx$ *und* $u_{tt} = divD_F W(FF_p^{-1})$ *oder sei* $E(t) = \int\limits_\Omega W(F(t)F_p^{-1}(t))\,dx$ *und* $0 = div\ D_F W(FF_p^{-1})$. *Ausserdem genüge* $F_p^{-1}(t)$ *der reduzierten Dissipationsungleichung und es sei* $u(t)_{\partial\Omega} = const$ *für* $t \ge t_0$. *Dann gilt:* $E(t) \le E(t_0)$.

Beweis. In den beiden vorherigen Lemmata ist dann ja $\forall\ t \ge t_0 : \quad u_t = 0$ und damit ergibt sich die Aussage. ∎

Lemma 25 (Energieungleichung für CC_p^{-1} im dynamischen Fall)
Sei $E(t) = \int\limits_\Omega W(C(t)C_p^{-1}) + \frac{1}{2}u_t^2\,dx$ *und* $u_{tt} = divD_F W(CC_p^{-1})$. *Es sei* $\Sigma := C \cdot DW(CC_p^{-1}) \cdot C_p^{-1}$ *und* $\Sigma(t)$ *genüge der Ungleichung*

$$\langle \Sigma(t), \dot{C_p^{-1}} C_p \rangle \le 0$$

Dann gilt:

$$E(t) \le E(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} \langle (F\Sigma^T C^{-1}(t) + FC^{-1}\Sigma(t)).\vec{n}, u_t\rangle\, dS\, dt$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega W(C(t)C_p^{-1}(t)) + \frac{1}{2}u_t^2\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1} + C\dot{C_p^{-1}}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1}\rangle + \langle C\;DW(CC_p^{-1})\;1\!\!1,\dot{C_p^{-1}}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1}\rangle + \langle C\;DW(CC_p^{-1})C_p^{-1}C_p,\,\dot{C_p^{-1}}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1}\rangle + \langle\underbrace{C\;DW(CC_p^{-1})C_p^{-1}}_{\Sigma},\dot{C_p^{-1}}C_p\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1}\rangle + \underbrace{\langle\Sigma,\dot{C_p^{-1}}C_p\rangle}_{\leq 0} + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&\leq \int\limits_\Omega \langle 1\!\!1 DW(CC_p^{-1}),\dot{C}C_p^{-1}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle C^{-1}\underbrace{C\;DW(CC_p^{-1})C_p^{-1}}_{\Sigma},\dot{C}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle C^{-1}\Sigma,\dot{F^T}F + F^T\dot{F}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
&= \int\limits_\Omega \langle C^{-1}\Sigma F^T,\dot{F^T}\rangle + \langle FC^{-1}\Sigma,\dot{F}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx \\
\frac{d}{dt}E(t) &\leq \int\limits_\Omega \langle F\Sigma^T C^{-1},\dot{F}\rangle + \langle FC^{-1}\Sigma,\dot{F}\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx
\end{aligned}
$$

Wie formale Differentiation zeigt, ist aber $D_F W(F^TFC_p^{-1}) = F\Sigma^TC^{-1} + FC^{-1}\Sigma$. Deshalb folgt

$$
\frac{d}{dt}E(t) \leq \int\limits_\Omega \langle D_F W(F^TFC_p^{-1}),\nabla u_t\rangle + \langle u_t,u_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3}\,dx
$$

Wir benutzen wieder die Identität

$$
div\;(D_F W(\cdot)^T.u_t) = \langle D_F W(\cdot),\nabla u_t\rangle + \langle u_t,div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3}
$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\leq \int_\Omega div(D_F W(\cdot)^T.u_t) - \langle u_t, div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle u_t, div(D_F W(\cdot))\rangle_{\mathbb{R}^3}\, dx \\
&= \int_\Omega div(D_F W(\cdot)^T.u_t)\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle D_F W(F^T F C_p^{-1})^T.u_t, \vec{n}\rangle\, dS
\end{aligned}$$

also integriert

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{\partial\Omega} \langle D_F W(F^T F C_p^{-1})^T.u_t, \vec{n}\rangle\, dS\, dt \\
&\leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{\partial\Omega} \langle u_t, D_F W(F^T F C_p^{-1}).\vec{n}\rangle\, dS\, dt \\
&= E(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{\partial\Omega} \langle u_t, (C^{-1}\Sigma F^T + \Sigma^T C^{-1} F^T).\vec{n}\rangle\, dS\, dt
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 17
Es sei $W = W(FF_p^{-1})$, $\quad \tilde{\Sigma} := F^T \cdot DW(FF_p^{-1}) \cdot F_p^{-T} = F^T S_1$ *und* $\tilde{\Sigma}$ *genüge punktweise der Ungleichung:*

$$\langle \tilde{\Sigma}, \dot{F_p^{-1}} F_p\rangle \leq 0$$

Dann genügt F_p^{-1} *tatsächlich schon der reduzierten Dissipationsungleichung, denn es ist*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(F \cdot F_p^{-1}(t)) &= \langle DW(FF_p^{-1}), F\dot{F_p^{-1}}\rangle \\
&= \langle F^T\, DW(FF_p^{-1})F_p^{-T}F_p^T, \dot{F_p^{-1}}\rangle \\
&= \langle \tilde{\Sigma}, \dot{F_p^{-1}} F_p\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

Bemerkung 18
Es sei $W = W(CC_p^{-1})$, $\quad \Sigma := C \cdot DW(CC_p^{-1}) \cdot C_p^{-1}$ *und* Σ *genüge punktweise der Ungleichung:*

$$\langle \Sigma, \dot{C_p^{-1}} C_p\rangle \leq 0$$

Dann genügt C_p^{-1} tatsächlich schon der reduzierten Dissipationsungleichung, denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(F^TF\cdot C_p^{-1}(t)) &= \langle DW(F^TFC_p^{-1}),F^TF\dot{C_p^{-1}}\rangle\\ &= \langle C\ DW(F^TFC_p^{-1})C_p^{-1}C_p\dot{C_p^{-1}}\rangle\\ &= \langle\Sigma,\dot{C_p^{-1}}C_p\rangle \leq 0\end{aligned}$$

7.6 Hyperelastizität

Definition 17 (Hyperelastizität)
Wir sagen, dass ein Material ***hyperelastisch*** *oder* ***Green-Elastisch*** *ist, wenn die konstitutive Relation für den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor aus einem Potential ableitbar ist, das heisst es gibt eine Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ so dass*

$$S_1(F) = D_F W(F)$$

oder im Falle der Plastizität mit einem plastischen Parameter: Es gibt eine Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ so dass

$$S_1(F,F_p) = D_F W(F,F_p)$$

Wird hingegen direkt eine konstitutive Annahme für den Spannungstensor gemacht, so sprechen wir von ***Cauchy-Elastizität****.*

Lemma 26
Es gebe eine Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ so dass $S(F) = D_F W(F)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Die tensorwertige Funktion S ist materiell objektiv.*
2. *Die skalarwertige Funktion W ist materiell objektiv.*

Beweis. Sei $Q \in O(3)$ und $S(F)$ materiell objektiv. Wegen $D_F W(F) = Q^TQ\ S(F) = Q^T\ S(QF) = Q^T\ D_\xi W(QF) = D_F(W(QF))$ folgt $W(QF) = W(F) + K$. Wenn wir $Q = 1\!\!1$ wählen, folgt $K = 0$, also $W(QF) = W(F)$.
Sei umgekehrt $W(QF) = W(F)$. Wir differenzieren nach F und erhalten

$$\begin{aligned}\langle DW(QF),QH\rangle &= \langle DW(F),H\rangle\\ \langle Q^T\ DW(QF),H\rangle &= \langle DW(F),H\rangle\\ Q^T\ DW(QF) &= DW(F)\\ DW(QF) &= Q\ DW(F)\\ S(QF) &= Q\ S(F)\end{aligned}$$

■

Definition 18
Sei $W, \hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Mit $W(F) = \frac{1}{2}\hat{W}(F^T F)$ wegen der materiellen Objektivität und nennen $S_1(F) := D_F W(F) = \frac{1}{2} D_F \hat{W}(F^T F)$ den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor, $S_2(F) := \frac{1}{2}(D_C \hat{W}(F^T F) + D_C \hat{W}(F^T F)^T)$ den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor und $T := \frac{1}{\det F} F \cdot S_2 \cdot F^T$ den Cauchyschen Spannungstensor. Desweiteren bezeichne $\Sigma = C \cdot S_2$ den Mandelschen Spannungstensor.

Lemma 27
Es gilt für die diversen Spannungstensoren

1. $S_2 = F^{-1}\, S_1$
2. $S_1 = \det F \cdot T \cdot F^{-T}$
3. $S_2^T = S_2$
4. $T^T = T$
5. $\Sigma = C \cdot DW(CC_p^{-1}) \cdot C_p^{-1} = C \cdot S_2(CC_p^{-1}) = F^T \cdot S_1(F)$
6. $\Sigma = \det F\; F^T \cdot T \cdot F^{-T}$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\langle S_1, H\rangle &= \langle D_F W(F), H\rangle \\
&= \frac{1}{2} D_C \hat{W}(F^T F).(F^T H + H^T F) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle F\; D_C \hat{W}(F^T F), H\rangle + \langle D_C \hat{W}(F^T F)\; F^T, H^T\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle F\; D_C \hat{W}(F^T F), H\rangle + \langle F\; D_C \hat{W}(F^T F)^T, H\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\langle F\; \Big(D_C \hat{W}(F^T F) + D_C \hat{W}(F^T F)^T\Big), H\rangle \\
&= \langle F\; S_2(F), H\rangle
\end{aligned}
$$

Weil $S_2 \in \mathbb{S}ym(3)$ ist, ist dann auch nach Definition $T \in \mathbb{S}ym(3)$ und die Beziehung zwischen T und S_1 ergibt sich durch einfaches einsetzen.
$\Sigma = C \cdot S_2$ ist nur eine Anwendung der Kettenregel. ■

Lemma 28 (Materielle Objektivität für den Cauchyschen Spannungstensor)
Sei T der Cauchysche Spannungstensor eines materiell objektiven Materialgesetzes. Dann gilt

$$\forall\, F \in GL(3,\mathbb{R}) : \quad T(F) = R \cdot T((F^T F)^{\frac{1}{2}}) \cdot R^T$$

mit $F = R\cdot(F^T F)^{\frac{1}{2}}$ aus der Polarzerlegung. Das heisst, dass die zu F gehörenden Drehungen R unabhängig vom jeweiligen Materialgesetz immer in der gleichen Weise zu den auftretenden Spannungen beitragen.

Beweis. Eine direkte Rechnung mithilfe der Polarzerlegung. ∎

Bemerkung 19
Im hyperelastischen Fall werden mit der gegebenen Definition S_2 und T automatisch symmetrisch und man muss nicht auf das Cauchysche Theorem zurückgreifen, welches aus der Impuls- und Drehimpulsbilanz auf die Symmetrie von T und S_2 schließt.

Kapitel 8

Thermodynamisch konsistente Evolutionsgleichungen

8.1 Prinzip der maximalen Dissipation im geometrisch linearen Fall

Wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, dass der Leser mit der linearisierten Theorie elasto-plastischen Materialverhaltens vertraut ist. σ bezeichne den Cauchyschen Spannungstensor, es sei $\epsilon(\nabla u) := \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u)$. Man geht von einer additiven Zerlegung von ϵ in einen elastischen und plastischen Teil aus, also

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

Die Dichte der Spannungsleistung P_{lin} ist dann durch

$$\langle \sigma, \dot{\epsilon} \rangle = \langle \sigma, \dot{\epsilon_e} + \dot{\epsilon_p} \rangle$$

gegeben und wir sehen, dass man in diesem Fall $\langle \sigma, \dot{\epsilon_p} \rangle$, die sogenannte **interne plastische Dissipation** additiv von der **internen elastischen Dissipation** entkoppeln kann. Das ist ein wesentliches Merkmal der linearisierten Theorie und überträgt sich so nicht auf die geometrisch nichtlineare Theorie. Trotzdem siehe (18.1)
Desweiteren geht man von der Existenz eines elastischen Gebietes $\mathcal{E}$ im Spannungsraum aus, so dass lokal plastisches Fließen nur dann auftreten kann, wenn die aktuellen Spannungen auf dem Rand von $\mathcal{E}$ liegen. (Heuristisch: Plastizität tritt erst auf, wenn die Spannungen im Körper einen gewissen Wert überschreiten). Wobei als mögliche Spannungen im Körper nur Spannungen aus $\mathcal{E}$ zugelassen sind.(Ideale Plastizität)
Das Prinzip der **maximalen Dissipation** [Dru51] besagt nun: Bei fiktiv gegebener Rate $\dot{\epsilon_p}$ maximiert der tatsächliche Spannungszustand $\bar{\sigma} \in \mathcal{E}$ die interne plastische Dissipation bezüglich aller anderen möglichen Spannungszustände $\sigma \in \mathcal{E}$.

Das heisst

$$\begin{aligned}
&\forall\ \sigma \in \mathcal{E}: \quad \langle \bar{\sigma}, \dot{\epsilon_p} \rangle \geq \langle \sigma, \dot{\epsilon_p} \rangle \\
&\Leftrightarrow \\
&\forall\ \sigma \in \mathcal{E}: \quad \langle \sigma - \bar{\sigma}, \dot{\epsilon_p} \rangle \leq 0
\end{aligned}$$

Wenn nun $\mathcal{E}$ nicht konvex wäre, dann gäbe es Spannungen $\sigma \in \partial\mathcal{E}$, die bei gleichzeitiger Erfüllung des Prinzips der maximalen Dissipation nicht zu einer plastischen Evolution führen würden ($\dot{\epsilon_p}$ müsste verschwinden, damit das Prinzip der maximalen Dissipation gültig bliebe.)
Also ist üblicherweise der elastische Bereich $\mathcal{E}$ eine **konvexe** Menge auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$. Dieses Prinzip nutzt man nun umgedreht, um sich Evolutionsgleichungen für $\dot{\epsilon_p}$ zu verschaffen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\forall\ \sigma \in \mathcal{E}: \quad \langle \sigma - \bar{\sigma}, \dot{\epsilon_p} \rangle \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \\
&\dot{\epsilon_p}(\bar{\sigma}) \in \partial\chi_{\mathcal{E}}(\bar{\sigma})
\end{aligned}$$

wobei $\chi_{\mathcal{E}}$ die Indikatorfunktion der konvexen Menge $\mathcal{E}$ bezeichne und $\partial\chi_{\mathcal{E}}(\bar{\sigma})$ das **Subdifferential** der Indikatorfunktion sei. Damit läuft die plastische Evolution immer in Normalenrichtung zu $\partial\mathcal{E}$. Wenn man $\mathcal{E}$ über ein **plastisches Potential** Φ bestimmt (assoziierte Fließregel), das heisst

$$\mathcal{E} := \{\sigma \in \mathbb{M}^{3\times 3} \mid \Phi(\sigma) \leq 0\}$$

mit einer konvexen differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$, dann ergibt sich mit einfachen geometrischen Überlegungen die zugehörige Form des Subdifferentials

$$\partial\chi_{\mathcal{E}}(\bar{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma} \in int(\mathcal{E}) \\ \lambda^+ \cdot D\Phi(\bar{\sigma}) & \bar{\sigma} \in \partial\mathcal{E},\ \lambda^+ \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

und daraus die **ratenunabhängige** Evolutionsgleichung

$$\dot{\epsilon_p}(\bar{\sigma}) \in \begin{cases} 0 & \bar{\sigma} \in int(\mathcal{E}) \\ \lambda^+ \cdot D\Phi(\bar{\sigma}) & \bar{\sigma} \in \partial\mathcal{E},\ \lambda^+ \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

8.2 Isotrope und kinematische Verfestigung

Wenn sich im Laufe der Belastung eines Körpers der elastische Bereich für die Spannungen $\mathcal{E}$ **vergrößert**, spricht man von **Verfestigung** des Materials. Unter **isotroper Verfestigung** versteht man eine **Stauchung** des elastischen Bereiches. Wohingegen man unter **kinematischer Verfestigung** eine **Translation**

des elastischen Bereiches versteht.
Anisotrope Effekte kann man in die Entwicklung der Fließfläche zum Bsp. einbauen, indem man den elastischen Bereich in verschiedene Richtungen unterschiedlich staucht. Dann gibt es Richtungen, in denen das Material länger Spannungen aufnimmt, bevor es plastisch zu fließen beginnt. Die Bezeichnung Verfestigung wird erhellt, wenn man statt eines elastischen Gebietes für die Spannungen bei gegebener Spannungs/Dehnungsbeziehung ein zugehöriges elastisches Gebiet in den Deformationsgradienten(Dehnungen) betrachtet: Verfestigung **vergrößert** den elastischen Bereich in den Deformationsgradienten, also fängt das Material nach Verfestigung erst später an zu fließen bzw. reagiert länger elastisch.

8.3 Viskose Approximation des ideal-plastischen Verhaltens: der lineare Fall

Wir definieren die Klammer $[\cdot]_+ : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$

$$[a]_+ := \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ a & a > 0 \end{cases}$$

Die obige Evolutionsgleichung wird nun dahingehend abgeändert, dass Spannungszustände außerhalb des elastischen Bereiches $\mathcal{E} := \{\sigma \in \mathbb{M}^{3\times 3} \mid \Phi(\sigma) \leq 0\}$ zwar möglich sind, aber im Abstand $[\Phi(\bar{\sigma})]_+$ zum Rand des elastischen Bereiches bestraft werden. Es sei $\eta \in \mathbb{R}^+$ ein viskoser Parameter und $r \in \mathbb{R}^+,\ r \geq 1$. Dann lautet die **ratenabhängige** Evolutionsgleichung

$$\dot{\epsilon}_p(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\eta}\,[\Phi(\bar{\sigma})]_+^r \cdot D\Phi(\bar{\sigma})$$

Wobei man erwartet, dass die zugehörigen Lösungen für $\eta \to 0$ bzw. $r \to \infty$ gegen die Lösung des ideal-plastischen Problems konvergieren.

8.4 Verallgemeinertes Prinzip der maximalen Dissipation im geometrisch nichtlinearen Fall

Wir gehen formal genauso wie im linearen Fall vor. Dabei erweist es sich als vorteilhaft, mit einer Energie W zu beginnen, welche von der Deformation und einer plastischen Variablen abhängt. Wir werden das Vorgehen anhand von $W = W(CC_p^{-1})$ illustrieren. (plastische Variable $C_p = F_p^T F_p$)
Da eine mögliche Evolutionsgleichung für C_p den 2.Hauptsatz nicht verletzen darf, betrachten wir die sich aus der Energie $W(CC_p^{-1})$ ergebende reduzierte Dissipationsungleichung

$$\langle \Sigma, \dot{C}_p^{-1} C_p \rangle \leq 0$$

(vergl.Bemerkung 18), wobei $\Sigma := C \cdot DW(CC_p^{-1}) \cdot C_p^{-1}$ der i.A nicht-symmetrische Mandelsche Spannungstensor ist.
Der Ausdruck $\dot{C}_p^{-1} C_p$ nimmt nun den Platz von $\dot{\epsilon}_p$ in der linearen Theorie ein. Wenn wir nun $-\dot{C}_p^{-1} C_p = \lambda^+ \cdot D\Phi(\Sigma)$ wählen, ist die Dissipationsungleichung erfüllt, wenn nur Φ konvex ist. Daher verwenden wir als Fließregel wieder das Subdifferential der Indikatorfunktion eines elastischen Bereiches $\mathcal{E}$ im Spannungsraum, welcher passend zu Σ über ein konvexes plastisches Potential $\Phi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ als $\mathcal{E} := \{\Sigma \in \mathbb{M}^{3\times 3} \mid \Phi(\Sigma) \leq 0\}$ definiert ist. Damit ergibt sich die ratenunabhängige Evolutionsgleichung

$$-\dot{C}_p^{-1} C_p \in \partial \chi_{\mathcal{E}}(\Sigma)$$

woraus konkret folgt:

$$-\dot{C}_p^{-1} C_p \in \begin{cases} 0 & \Sigma \in int(\mathcal{E}) \\ \lambda^+ \cdot D\Phi(\Sigma) & \Sigma \in \partial\mathcal{E},\ \lambda^+ \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

8.5 Viskose Approximation des ideal-plastischen Verhaltens: der nichtlineare Fall

Genau wie im linearen Fall ergibt sich als viskose Approximation die ratenabhängige Evolutionsgleichung:

$$-\dot{C}_p^{-1} C_p = \frac{1}{\eta}\, [\Phi(\Sigma)]_+^r \cdot D\Phi(\Sigma)$$

bzw.

$$\dot{C}_p^{-1} = -\frac{1}{\eta}\, [\Phi(\Sigma)]_+^r \cdot D\Phi(\Sigma) \cdot C_p^{-1}$$

Damit haben wir beispielsweise für das übliche von Mises Fließkriterium
in der sogenannten J_2-Theorie

$$\Phi(\Sigma) = \|dev(\Sigma)\| - \kappa$$

den elastischen Bereich

$$\mathcal{E} := \{\Sigma \in \mathbb{M}^{3\times 3} \mid \|dev(\Sigma)\| \leq \kappa\}$$

und die Evolutionsgleichung

$$\dot{C}_p^{-1} = -\frac{1}{\eta}\, [\|dev(\Sigma)\| - \kappa]_+^r \cdot \frac{dev(\Sigma)}{\|dev(\Sigma)\|} \cdot C_p^{-1}$$

Sei $f : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times3}$ für feste $\kappa, \eta, r > 0$ die folgendermaßen definierte Funktion

$$f(\nabla u, C_p^{-1}) := -\frac{1}{\eta}\ \left[\|dev(\Sigma(\nabla u^T \nabla u, C_p^{-1}))\| - \kappa\right]_+^r \cdot \frac{dev(\Sigma(\nabla u^T \nabla u, C_p^{-1}))}{\|dev(\Sigma(\nabla u^T \nabla u, C_p^{-1}))\|}$$

Dann ist f bei geeigneter Wahl von $r > 1$ und glatter Energie $W = W(CC_p^{-1})$ glatt und jeweils lokal Lipschitz bzgl. ∇u und C_p^{-1}. Die Evolutionsgleichung für die innere Variable C_p sieht daher in diesem Fall so aus:

$$\dot{C}_p^{-1} = f(\nabla u, C_p^{-1}) \cdot C_p^{-1}$$

und hat deshalb die im Kapitel 9 betrachtete Struktur.

8.6 Invarianzeigenschaften der Evolutionsgleichung für C_p zur Energie $W = W(CC_p^{-1})$

Satz 13 (Materielle Objektivität der Evolutionsgleichung)
Die Evolutionsgleichung

$$-\dot{C}_p^{-1} C_p = \frac{1}{\eta}\ [\Phi(\Sigma)]_+^r \cdot D\Phi(\Sigma)$$

genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität.

Beweis. Klar, da alle auftretenden Variablen selbst materiell objektiv sind. ■

Satz 14 (Isotropie der Evolutionsgleichung)
Die Fließfunktion Φ sei eine isotrope skalarwertige Funktion. Dann ist die Evolutionsgleichung

$$-\dot{C}_p^{-1} C_p = \frac{1}{\eta}\ [\Phi(\Sigma)]_+^r \cdot D\Phi(\Sigma)$$

invariant unter $F \mapsto R^T\ F\ R$, also isotrop.

Beweis. Da die Evolutionsgleichung wegen Satz 13 materiell objektiv ist, genügt es, die Invarianz unter $F \mapsto F\ R$ zu zeigen. Wir verweisen auf die Arbeit von [Mie92]. ■

Bemerkung 20
Die rechte Seite der Evolutionsgleichung für $C_p^{-1} \in P\mathbb{S}ym(3)$ muss natürlich auch symmetrisch sein, sonst würde die Evolution die Symmetrie von C_p^{-1} zerstören. Diese Symmetrie der rechten Seite sieht man nicht sofort, sondern man muss wieder die Isotropie und materielle Objektivität heranziehen. Wir ersparen uns diese Rechnung und verweisen auf [Mie92, RW97].

8.7 Konsistente Evolutionsgleichung für F_p zur Energie $W = W(FF_p^{-1})$

Wir wiederholen das Vorgehen bezüglich C_p. Wiederum darf die Evolutionsgleichung für F_p den 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzen. Das können wir garantieren, indem wir die reduzierte Dissipationsungleichung für diesen Fall auswerten. Wegen Bemerkung 17 heisst das für einen Spannungstensor $\tilde{\Sigma} = F^T DW(FF_p^{-1})F_p^{-T}$ aber

$$\langle \tilde{\Sigma}, \dot{F}_p^{-1} F_p \rangle \leq 0$$

Dem Prinzip der maximalen Dissipation entsprechend verwenden wir als Fließregel wieder das Subdifferential der Indikatorfunktion eines elastischen Bereiches $\mathcal{E}$ im durch $\tilde{\Sigma}$ gegebenen Spannungsraum, welcher passend zu $\tilde{\Sigma}$ über ein konvexes plastisches Dissipations-Potential $\Phi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ als $\mathcal{E} := \{\tilde{\Sigma} \in \mathbb{M}^{3\times 3} \mid \Phi(\tilde{\Sigma}) \leq 0\}$ definiert ist. Damit ergibt sich die ratenunabhängige Evolutionsgleichung

$$-\dot{F}_p^{-1} F_p \in \partial \chi_{\mathcal{E}}(\tilde{\Sigma})$$

woraus konkret folgt:

$$-\dot{F}_p^{-1} F_p \in \begin{cases} 0 & \Sigma \in int(\mathcal{E}) \\ \lambda^+ \cdot D\Phi(\tilde{\Sigma}) & \Sigma \in \partial\mathcal{E},\ \lambda^+ \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Viskose Approximationen ergeben sich analog der Vorgehensweise für C_p.

8.8 Alternative Evolutionsgleichung ohne Fließfläche

In der Arbeit [SK96] wird im Rahmen einer Erweiterung des viskoplastischen Modells von Bodner/Partom auf große Deformationen eine thermodynamisch konsistente Evolutionsgleichung für F_p selbst in der Form

$$-F_p^{-1} \cdot \dot{F}_p = \hat{\Phi}(\Sigma) \cdot D\Phi(\Sigma)^T$$

angegeben, wobei Φ und Σ die schon eingeführten Grössen bezeichne und $\hat{\Phi}(\Sigma) \in \mathbb{R}^+$ sei.(Die anderen Evolutionsgleichungen für weitere innere Variablen des Modells werden hier vernachlässigt.) Auch diese Evolutionsgleichung passt in das im Kapitel Schauder definierte Schema, wenn man die Gleichung in die äquivalente Form

$$\dot{F}_p^T = -\hat{\Phi}(\Sigma) \cdot D\Phi(\Sigma) \cdot F_p^T$$

umschreibt.
Diesem Ansatz liegt zwar auch die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten

$$F = F_e \cdot F_p$$

zugrunde, die Autoren interpretieren aber F_p nicht als Zwischenkonfiguration, deren Drehlage a priori unbestimmt bleiben muss, sondern sehen durch F_p eine auf der Referenzkonfiguration induzierte Änderung der Metrik bewirkt. Damit entfallen gewisse Invarianzforderungen aus der Unbestimmtheit der Zwischenkonfiguration.

Kapitel 9

Schauder-Argument

9.1 Funktionenräume

Wir führen gewisse Funktionenräume ein und geben die zugehörigen Normen an: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand $\partial\Omega$.

1. Der Raum $C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ aller stetigen Funktionen von $\bar{\Omega}$ nach $\mathbb{M}^{3\times 3}$, versehen mit der Norm
$$\|u\|_{C(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3})} := \sup_{x\in\bar{\Omega}} \|u(x)\|$$
ist ein Banachraum.

2. Der Raum $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ aller hölderstetigen Funktionen von $\bar{\Omega}$ nach $\mathbb{M}^{3\times 3}$, versehen mit der Norm
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3})} := \sup_{x\in\bar{\Omega}} \|u(x)\| + \sup_{x\neq y} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}$$
ist ein Banachraum.

3. Der Raum $C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ aller stetigen Funktionen von $[0,T]$ nach $C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$, versehen mit der Norm
$$\|u\|_{C([0,T],C(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3}))} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{C(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3})}$$
ist ein Banachraum.

4. Der Raum $C([0,T]; C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ aller stetigen Funktionen von $[0,T]$ nach $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$, versehen mit der Norm
$$\|u\|_{C([0,T],C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3}))} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3})}$$
ist ein Banachraum.

Eine Referenz für diese Behauptungen ist [Ada75]. Wir werden in diesem Abschnitt den Schauderschen Fixpunktsatz und den Satz von Arzela-Ascoli verwenden und erinnern deshalb an ihre genaue Form:

Definition 19 (Relativkompakte Mengen)
Sei B ein Banachraum. Eine Menge $\mathcal{M} \subset B$ heisst relativkompakt, falls jede Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Definition 20 (Kompakte Abbildung)
Sei B ein Banachraum. Wir sagen, dass $P : B \mapsto B$ eine kompakte Abbildung ist, wenn P stetig ist und P beschränkte Mengen auf relativkompakte Mengen abbildet.

9.2 Abstraktes Schauder-Argument

Satz 15 (Schauderscher Fixpunktsatz)
Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Banachraumes. Sei $P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ eine kompakte Abbildung. Dann hat P mindestens einen Fixpunkt in $\mathcal{M}$, d.h

$$\exists\, m \in \mathcal{M} : \quad P(m) = m$$

Beweis. Zum Bsp. [Zei95b] ■

Bemerkung 21
Der Fixpunkt ist im Gegensatz zum Banachschen Fixpunktsatz im allgemeinen nicht eindeutig. Wir können den Banachschen Fixpunktsatz nicht verwenden, weil der von uns zu betrachtende Operator im Allgemeinen nicht Lipschitz ist, sondern nur stetig.

Definition 21 (Gleichgradige Stetigkeit)
Sei E ein kompakter metrischer Raum und B ein Banachraum. Sei $C(E, B)$ der Raum aller stetigen Funktionen von E nach B versehen mit der Supremumsnorm. Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subset C(E, B)$ ist gleichgradig stetig in $t_0 \in E$ wenn gilt

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, h \in \mathcal{H} : \quad |t - t_0|_E \leq \delta\ \Rightarrow \|h(t) - h(t_0)\|_B < \epsilon$$

Satz 16 (Arzela-Ascoli)
Sei E ein kompakter metrischer Raum und B ein Banachraum. Sei $C(E, B)$ der Raum aller stetigen Funktionen von E nach B versehen mit der Supremumsnorm. Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subset C(E, B)$ ist genau dann relativkompakt, wenn

1. *$\forall\, t \in E :$ $\mathcal{H}$ ist gleichgradig stetig*
2. *$\forall\, t \in E : \quad \mathcal{H}(t) := \{u(t) |\ u \in \mathcal{H}\}$ ist relativkompakt in B*

Beweis. [Zei95b] ■

Satz 17 (Kompakte Einbettung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge und $0 < \alpha \leq 1$. Dann ist die Einbettung

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \underbrace{\subset}_{kompakt} C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \left\{ \underbrace{\subset}_{stetig} C(\Omega, \mathbb{M}^{3\times 3}) \right\}$$

kompakt.

Beweis. [Ada75],Seite 11, Theorem 1.31. ■

Sei im Folgenden $X = C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$.

Lemma 29
Sei $y_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ und

$$\mathcal{M} := \{y \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))|\ \|y - y_0\|_X \leq K\}$$

Dann ist $\mathcal{M}$ nichtleer, beschränkt, abgeschlossen und konvex.

Beweis. Klar. ■

Folgerung 5
Sei $y_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ und

$$\mathcal{M} := \{y \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))|\ \|y - y_0\|_X \leq K\}$$

Sei $P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ kompakt. Dann besitzt P einen Fixpunkt.

Beweis. $\mathcal{M}$ erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 15. ■

Lemma 30
Sei $\mathcal{M} := \{y \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))|\ \|y - y_0\|_X \leq K\}$. Sei

1. *$P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ stetig*
2. *$\forall\ t \in [0,T]: \quad P.(\mathcal{M})$ ist gleichgradig stetig*
3. *$\forall\ t \in [0,T]: \quad \{P.u(t)|\ u \in \mathcal{M}\} \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$*

Dann ist P kompakt.

Beweis. (2) und (3) liefern zusammen mit der kompakten Einbettung die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Also ist $P.(\mathcal{M})$ relativkompakt. Zusammen mit der Stetigkeit von P haben wir damit die Kompaktheit von P gezeigt. ■

9.3 Ungleichungen vom Gronwall-Typ

Lemma 31
Sei $y \in C^1([0,T];\mathbb{M}^{3\times 3})$*. Dann gilt*

$$\langle y'(t), y(t)\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle y(t), y(t)\rangle\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\|y(t)\|^2\right) = \left(\frac{d}{dt}\|y(t)\|\right)\cdot\|y(t)\|$$

Beweis. Klar. ∎

Lemma 32 (Lineare ODE)
Sei $\alpha,\beta \in C([0,T];\mathbb{R})$ *und* $z \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ *eine Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} z'(t) &= \alpha(t)\cdot z(t) + \beta(t) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$z(t) = e^{\int_0^t \alpha(s)\,ds}\cdot\left(z_0 + \int\limits_0^t \beta(s)\, e^{-\int_0^s \alpha(\tau)\,d\tau}\,ds\right)$$

und für $z(0)=0$ *und* $\alpha(t),\beta(t)\ge 0$ *gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\int_0^t \alpha(s)\,ds}\left(\int\limits_0^t \beta(s)\, e^{-\int_0^s \alpha(\tau)\,d\tau}\,ds\right) \\ &\le e^{\int_0^t \alpha(s)\,ds}\int\limits_0^t \beta(s)\,ds \\ &\le t\cdot\left(\sup_{s\in[0,T]}\beta(s)\right)\cdot e^{t\cdot\sup_{s\in[0,T]}\alpha(s)} \end{aligned}$$

Beweis. Variation der Konstanten. ∎

Lemma 33 (Gronwall)
Sei $\alpha, \beta \in C([0,T];\mathbb{R})$ und $z \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ eine Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialungleichung

$$\begin{aligned} z'(t) &\leq \alpha(t) \cdot z(t) + \beta(t) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$z(t) \leq e^{\int_0^t \alpha(s)\, ds} \cdot \left(z_0 + \int\limits_0^t \beta(s)\, e^{-\int_0^s \alpha(\tau)\, d\tau}\, ds \right)$$

und für $z(0) = 0$ und $\alpha(t), \beta(t) \geq 0$ gilt die Abschätzung

$$z(t) \leq t \cdot \left(\sup_{s \in [0,T]} \beta(s) \right) \cdot e^{t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \alpha(s)}$$

Beweis. Ober- und Unterfunktion zu einer Differentialgleichung, [Wal90], Seite 71. ■

9.4 Konkretes Schauder-Argument

Lemma 34
Sei $f : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times3}$. Es gebe eine Funktion $L : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}^+$, die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet und es gelte

$$\begin{aligned} \forall y_1, x_1, x_2 \in \mathbb{M}^{3\times3} : &\quad \|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1)\| \leq L(y_1) \cdot \|x_1 - x_2\| \\ \forall x_1, y_1, y_2 \in \mathbb{M}^{3\times3} : &\quad \|f(x_1,y_2) - f(x_1,y_1)\| \leq L(x_1) \cdot \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

Seien $y_1, y_2, Py_1, Py_2, x_1, x_2 \in \mathbb{M}^{3\times3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\langle f(x_1,y_1) \cdot Py_1 - f(x_2,y_2) \cdot Py_2, Py_1 - Py_2 \rangle \leq \\ &\qquad \|f(x_1,y_1)\| \cdot \|Py_1 - Py_2\|^2 + \\ &\qquad \|Py_2\| \left(L(x_1)\|y_1 - y_2\| + L(y_2)\|x_1 - x_2\| \right) \cdot \|Py_1 - Py_2\| \end{aligned}$$

Beweis. Dreiecksungleichung und Cauchy-Schwarz. ■

Lemma 35
Sei $f : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ *wie oben und glatt und* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ *sowie* $P.y_1, P.y_2 \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ *Lösung der jeweiligen linearen ODE für* $P.y_1, P.y_2$ *im Banachraum (linear bei jeweils gegebenem* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$*)*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P.y_1(t) &= f(x_1(t), y_1(t)) \cdot P.y_1(t) \\
\frac{d}{dt}P.y_2(t) &= f(x_2(t), y_2(t)) \cdot P.y_2(t) \\
P.y_1(0) &= P.y_2(0) = y_0
\end{aligned}$$

wobei wir die Ortsabhängigkeit unterdrückt haben, indem $y(t)$ *für* $y(t)(x) = y(t,x)$ *steht. Dann gilt* $\forall\ x \in \bar{\Omega}$*:*

1.
$$\begin{aligned}
\forall\ t \in [0,T] : \quad & \|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \leq \\
& t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|P.y_2(s)\| \left[L(x_1(s))\|y_1(s) - y_2(s)\| + \right. \\
& \left. L(y_2(s))\|x_1(s) - x_2(s)\|\right] \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}
\end{aligned}$$

2.
$$\forall\ t \in [0,T] : \quad \|P.y_1(t)\| \leq \|P.y_1(0)\| \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}$$

3.
$$\begin{aligned}
\forall\ t \in [0,T] : \quad & \|P.y_1(t) - P.y_1(t_0)\| \leq t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\| \cdot \|P.y_1(0)\| \cdot \\
& e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}
\end{aligned}$$

4. $P.y_1 \in C^1([0,T], C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$

Beweis. Wir betrachten die Differenz $P.y_1(t) - P.y_2(t)$. Wegen der Differentialgleichungen gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P.y_1(t) - \frac{d}{dt}P.y_2(t) = f(x_1(t), y_1(t)) \cdot P.y_1(t) - f(x_2(t), y_2(t)) \cdot P.y_2(t) \Rightarrow \\
&\langle \frac{d}{dt}(P.y_1(t) - P.y_2(t)), P.y_1(t) - P.y_2(t)\rangle = \\
&\qquad \langle f(x_1(t), y_1(t)) \cdot P.y_1(t) - f(x_2(t), y_2(t)) \cdot P.y_2(t), P.y_1(t) - P.y_2(t)\rangle \\
&\left(\frac{d}{dt}\|P.y_1(t) - P.y_2(t)\|\right) \cdot \|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \leq \\
&\qquad\qquad \|f(x_1(t), y_1(t))\| \cdot \|P.y_1(t) - P.y_2(t)\|^2 + \|P.y_2(t)\| \\
&\qquad (L(x_1(t))\|y_1(t) - y_2(t)\| + L(y_2(t))\|x_1(t) - x_2(t)\|) \cdot \|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \\
&\frac{d}{dt}\|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \leq \|f(x_1(t), y_1(t))\| \cdot \|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| + \\
&\qquad\quad \|P.y_2(t)\| \left[L(x_1(t))\|y_1(t) - y_2(t)\| + L(y_2(t))\|x_1(t) - x_2(t)\|\right]
\end{aligned}$$

Wir integrieren die letzte Ungleichung in der Zeit und erhalten somit

$$\begin{aligned}
&\|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \leq t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|P.y_2(s)\| \left[L(x_1(s))\|y_1(s) - y_2(s)\| + \right. \\
&\qquad\qquad \left. L(y_2(s))\|x_1(s) - x_2(s)\|\right] \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}
\end{aligned}$$

Um den zweiten Teil der Aussage zu zeigen, benutzen wir wieder die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P.y_1(t) = f(x_1(t), y_1(t)) \cdot P.y_1(t) \Rightarrow \\
&\langle \frac{d}{dt}P.y_1(t), P.y_1(t)\rangle = \langle f(x_1(t), y_1(t)) \cdot P.y_1(t), P.y_1(t)\rangle \\
&\frac{d}{dt}(\|P.y_1(t)\|) \cdot \|P.y_1(t)\| \leq \|f(x_1(t), y_1(t))\| \cdot \|P.y_1(t)\|^2 \\
&\frac{d}{dt}(\|P.y_1(t)\|) \leq \|f(x_1(t), y_1(t))\| \cdot \|P.y_1(t)\|
\end{aligned}$$

Wir integrieren auch hier wieder und erhalten

$$\|P.y_1(t)\| \leq \|P.y_1(0)\| \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}$$

Der vorletzte Teil der Aussage ergibt sich so

$$\begin{aligned}
P.y_1(t) - P.y_1(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} P.y_1(s)\ ds \\
&= \int_{t_0}^{t} f(x_1(s), y_1(s)) \cdot P.y_1(s)\ ds \\
\|P.y_1(t) - P.y_1(t_0)\| &= \| \int_{t_0}^{t} f(x_1(s), y_1(s)) \cdot P.y_1(s)\ ds \| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(x_1(s), y_1(s)) \cdot P.y_1(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(x_1(s), y_1(s))\| \cdot \|P.y_1(s)\|\ ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(x_1(s), y_1(s))\| \overbrace{\|P.y_1(0)\| \cdot e^{s \cdot \sup_{\tau \in [0,s]} \|f(x_1(\tau), y_1(\tau))\|}}^{\text{mit der zweiten Aussage}}\ ds \\
&\leq (t - t_0) \cdot \sup_{s \in [0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\| \|P.y_1(0)\| \cdot e^{t \cdot \sup_{s \in [0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|} \\
&\leq t \cdot \sup_{s \in [0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\| \|P.y_1(0)\| \cdot e^{t \cdot \sup_{s \in [0,T]} \|f(x_1(s), y_1(s))\|}
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ergibt sich natürlich aus der Differentialgleichung: Die rechte Seite ist ja stetig. ■

Bemerkung 22
Dass die obige lineare ODE im Banachraum überhaupt Lösungen $P.y \in C([0,T], C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ hat, ergibt sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz (lokale Lösung) und der Fortsetzbarkeit im Falle linearen Wachstums.

Satz 18
Sei $f : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ wie oben und hinreichend glatt. Es seien $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \mapsto C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ zwei stetige Operatoren, die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbilden und es sei $\mathcal{M}$ die in Lemma 29 definierte Menge. Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{M} \subset C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ und $y_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. Wir definieren einen Operator

$$P : \mathcal{M} \subset C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})) \mapsto C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$$

indem wir setzen: zu gegebenem $y \in \mathcal{M}$ ist $P.y$ die Lösung der linearen ODE im Banachraum

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P.y(t) &= f(\mathcal{D}_1.y(t), \mathcal{D}_2.y(t)) \cdot P.y(t) \\ P.y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Wobei $y(t)$ für $y(t)(x) = y(t,x)$ steht. Dann gilt: Es gibt ein $T > 0$, so dass

1. *$P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ ist stetig*
2. *$\forall\, t \in [0,T]$: $P.(\mathcal{M})$ ist gleichgradig stetig*
3. *$\forall\, t \in [0,T]$: $\{P.u(t) |\, u \in \mathcal{M}\} \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$*

Bemerkung 23
Wir werden diesen Satz auf ein Problem anwenden, beidem die Operatoren $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ konkret Hintereinanderausführungen von Glättungsoperatoren und Lösungsoperatoren von Minimierungsproblemen sind.

Beweis. Es ist klar, dass so eine Lösung $P.y$ existiert und eindeutig ist, denn $y \subset \mathcal{M}$ ist ja gegeben. Wir zeigen zuerst, dass $P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ abbildet, also eine Selbstabbildung ist. Sei also $y \in \mathcal{M}$. Mit Lemma 35 (3) schließen wir, dass $\forall\, x \in \bar{\Omega}$ gilt:

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad \|P.y(t) - P.y(0)\| \leq t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s), \mathcal{D}_2.y(s))\| \cdot \|P.y(0)\| \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s),\mathcal{D}_2.y(s))\|}$$

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad \|P.y(t) - y(0)\| \leq T \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s), \mathcal{D}_2.y(s))\| \cdot \|y(0)\| \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s),\mathcal{D}_2.y(s))\|}$$

$$\|P.y(t) - y(0)\|_X \leq T \cdot \sup_{x\in\bar{\Omega}} \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s), \mathcal{D}_2.y(s))\| \cdot \|y(0)\| \cdot e^{t\cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s),\mathcal{D}_2.y(s))\|}$$

Da $\mathcal{D}_{1,2}$ nach Voraussetzung beschränkt sind und $\mathcal{M}$ beschränkt ist,können wir ein $T > 0$ unabhängig von $y \in \mathcal{M}$ wählen, so dass

$$\forall\, y \in \mathcal{M}: \quad \|P.y - y(0)\|_X \leq K$$

Damit ist dann aber $P.y \in \mathcal{M}$.

Wir zeigen jetzt die Stetigkeit des Operators

$$P : C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})) \mapsto C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$$

Seien $y_1, y_2 \in C([0,T]; C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$. Dann gilt mit Lemma 35(1), dass $\forall\ t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\|P.y_1(t) - P.y_2(t)\| \leq t \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|P.y_2(s)\| \, [L(\mathcal{D}_1.y_1(s))\|(\mathcal{D}_2.y_1 - \mathcal{D}_2.y_2)(s)\| + \\ L(\mathcal{D}_2.y_2(s))\|(\mathcal{D}_1.y_1 - \mathcal{D}_1.y_2)(s)\|] \cdot e^{t\cdot\sup_{s\in[0,T]}\|f(\mathcal{D}_1.y_1(s), \mathcal{D}_2.y_2(s))\|}\end{aligned}$$

Weil die Operatoren $\mathcal{D}_{1,2}$ stetig sind, muss $\|(\mathcal{D}_2.y_1 - \mathcal{D}_2.y_2)(s)\| \to 0$ wenn $\|y_1 - y_2\|_X \to 0$. Genauso auch für $\|(\mathcal{D}_1.y_1 - \mathcal{D}_1.y_2)(s)\|$. Deshalb muss

$$\|P.y_1 - P.y_2\|_X \to 0 \quad \text{wenn} \quad \|y_1 - y_2\|_X \to 0$$

Damit ist P stetig.(Hier könnte man bei linearen Operatoren $\mathcal{D}_{1,2}$ den Banachschen Fixpunktsatz ansetzen.)

Jetzt zeigen wir die gleichgradige Stetigkeit der Menge $P.(\mathcal{M})$. Sei $y \in \mathcal{M}$. Dann ist nach dem vorangehenden ja $P.y \in \mathcal{M}$ und wegen Lemma 35(3) gilt

$$\begin{aligned}\forall\ t \in [0,T]: \quad \|P.y(t) - P.y(t_0)\| \leq (t - t_0) \cdot \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s), \mathcal{D}_2.y(s))\| \cdot \\ \|P.y(0)\| \cdot e^{T\cdot\sup_{s\in[0,T]}\|f(\mathcal{D}_1.y(s), \mathcal{D}_2.y(s)))\|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|P.y(t) - P.y(t_0)\|_{C(\bar{\Omega},\mathbb{M}^{3\times 3})} &= \sup_{x\in\bar{\Omega}} \|P.y(t)(x) - P.y(t_0)(x)\| \\ &\leq (t - t_0)\left[\cdot \sup_{x\in\bar{\Omega}} \sup_{s\in[0,T]} \|f(\mathcal{D}_1.y(s)(x), \mathcal{D}_2.y(s)(x))\| \cdot \|P.y(0)(x)\| \cdot \right. \\ &\left. \qquad e^{T\cdot\sup_{s\in[0,T]}\|f(\mathcal{D}_1.y(s)(x), \mathcal{D}_2.y(s)(x)))\|}\right]\end{aligned}$$

Wiederum aus der Stetigkeit und Beschränktheit von $\mathcal{D}_{1,2}$ und der Tatsache, dass $\mathcal{M}$ beschränkt ist, folgern wir, dass $[\cdot] \leq \hat{K}$ für alle $y \in \mathcal{M}$. Wenn wir $\delta = \frac{\epsilon}{[\cdot]}$ wählen, haben wir die gleichgradige Stetigkeit gezeigt.

Zuletzt zeigen wir, dass $\forall\ t \in [0,T]: \quad \{P.u(t) |\ u \in \mathcal{M}\} \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$. Wir betrachten nur den Hölderteil der Höldernorm. Der C^0-Teil der $C^{0,\alpha}$-Norm geht dann entsprechend genauso.
Sei $y \in \mathcal{M}$, dann gilt ja für $x \neq \hat{x} \in \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P.y(t)(x) &= f(\mathcal{D}_1.y(t)(x), \mathcal{D}_2.y(t)(x)) \cdot P.y(t)(x) \\
\frac{d}{dt}P.y(t)(\hat{x}) &= f(\mathcal{D}_1.y(t)(\hat{x}), \mathcal{D}_2.y(t)(\hat{x})) \cdot P.y(t)(\hat{x}) \\
P.y(0) &= y(0)
\end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz, dividieren durch $\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}$ und multiplizieren die Gleichung skalar mit $\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}$. Dann ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}\right) \leq \\
&\qquad \|f(\mathcal{D}_1.y(t)(x), \mathcal{D}_2.y(t)(x))\| \cdot \left(\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}\right) + \\
&\qquad \|P.y(t)(\hat{x})\| \left(L(\mathcal{D}_1.y(t)(x)) \left(\frac{\|\mathcal{D}_2.y(t)(x)-\mathcal{D}_2.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}\right) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. L(\mathcal{D}_2.y(t)(\hat{x}))\frac{\|\mathcal{D}_1.y(t)(x)-\mathcal{D}_1.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}} \right) \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}\right) \leq \\
&\qquad \|f(\mathcal{D}_1.y(t)(x), \mathcal{D}_2.y(t)(x))\| \cdot \left(\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}}\right) + \\
&\qquad \|P.y(t)(\hat{x})\| \left(L(\mathcal{D}_1.y(t)(x)) \cdot K_1^+ + L(\mathcal{D}_2.y(t)(\hat{x})) \cdot K_2^+ \right)
\end{aligned}$$

Wobei K_1^+, K_2^+ die oberen Schranken für die Höldernormen von $\mathcal{D}_{1,2}$ auf der Menge $\mathcal{M}$ sind. Wie gewohnt integrieren wir die Ungleichung und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\|P.y(t)(x)-P.y(t)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}} &\leq e^{t\cdot \sup_{s\in[0,t]} \|f(\mathcal{D}_1.y(t)(x),\mathcal{D}_2.y(t)(x))\|} \cdot \\
&\quad \left(\frac{\|P.y(0)(x)-P.y(0)(\hat{x})\|}{\|x-\hat{x}\|_{\mathbb{R}^3}{}^{\alpha}} + \right. \\
&\quad \left. t \cdot \sup_{s\in[0,t]} \|P.y(s)(\hat{x})\| \left(L(\mathcal{D}_1.y(s)(x)) \cdot K_1^+ + L(\mathcal{D}_2.y(s)(\hat{x})) \cdot K_2^+ \right) \right)
\end{aligned}$$

Weil nach Voraussetzung $P.y(0) = y(0) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ ist und der Rest auf der rechten Seite für $y \in \mathcal{M}$ unabhängig von y beschränkt werden kann, ist $P.y(t) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ für alle $t \in [0, T]$. ■

Folgerung 6
Der so definierte Operator $P : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ hat einen Fixpunkt.

Beweis. Wegen Lemma 30 und Folgerung 5 ist das klar. ■

9.5 Existenzsätze zu abstrakten Evolutionsgleichungen

Satz 19
Sei $f : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ wie oben und hinreichend glatt. Es seien $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \mapsto C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ zwei stetige Operatoren, die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbilden und es sei $\mathcal{M}$ die in Lemma 29 definierte Menge. Sei $y_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. Dann gibt es ein $T > 0$ so dass die ODE

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= f(\mathcal{D}_1.(y(t)), \mathcal{D}_2.(y(t))) \cdot y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung $y \in C^1([0, T], C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ hat.

Beweis. Der oben gefundene Fixpunkt ist gerade die gesuchte Lösung. ■

Bemerkung 24
In der konkreten Anwendung auf das viskoplastische Problem war die Funktion f ja definiert als $f = f(\nabla u, C_p^{-1})$. Man könnte sich nun fragen, warum man auch in der zweiten Variablen C_p^{-1} einen Glättungsoperator einfügen muss.
Eine Analyse des Beweises zeigt jedoch, dass man für die kompakte Einbettung (Arzela/Ascoli) einen Regularitätsgewinn verbuchen muss. Da die Gleichung ohne Glättungsoperator bzgl. C_p^{-1} diesen Gewinn nicht hergibt, war dessen Einführung hier zwingend.

Satz 20
Sei $f : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ wie oben und hinreichend glatt. Es sei $g \in C^1([0, \infty), W_1^\infty(\Omega))$ sowie $\mathcal{D}_1 : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \times W_1^\infty(\Omega) \mapsto C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ ein stetiger Operator, der beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet und es sei $\mathcal{D}_2 : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \mapsto C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ ein stetiger Operator, der beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Darüberhinaus sei $\mathcal{M}$ die in Lemma

29 definierte Menge. Sei $y_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. Dann gibt es ein $T > 0$ so dass die ODE

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= f(\mathcal{D}_1.(y(t), g(t)), \mathcal{D}_2.(y(t))) \cdot y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung $y \in C^1([0,T], C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}))$ hat.

Beweis. Mit den offensichtlichen Änderungen genauso wie in Satz 19 . ■

Kapitel 10

Faltung und Mittelwerte

Wir führen einige Eigenschaften der Faltung bzw. Mittelwertbildung an. Es sei χ_A die Indikatorfunktion der Menge A. Für festes $\epsilon > 0$ bezeichnen wir

$$\begin{aligned}
M_\epsilon.f(x) &:= \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \int\limits_{y \in B_\epsilon(x)} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{|B_\epsilon|} \int\limits_{y \in x + B_\epsilon(0)} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{|B_\epsilon|} \int\limits_{y - x \in B_\epsilon(0)} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{|B_\epsilon|} \int\limits_{\Omega} \chi_{B_\epsilon}(y - x) \cdot f(y)\, dy
\end{aligned}$$

als den **Mittelungsoperator**.

Lemma 36
Für den Mittelungsoperator M_ϵ gilt:

$$M_\epsilon : L^2(\Omega) \mapsto C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$$

ist linear und stetig. Wenn außerdem $f \in L^\infty(\Omega)$ ist, dann ist $M_\epsilon.f(x) \leq C < \infty$ unabhängig von $\epsilon > 0$.

Beweis. Die Linearität ist klar. Wir setzen f durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort. Dann gilt für beliebige $x, z \in \bar{\Omega},\ x \neq z$

$$M_\epsilon.f(x) - M_\epsilon.f(z) = \frac{1}{|B_\epsilon|} \left[\int\limits_{\Omega} \chi_{B_\epsilon}(y - x) \cdot f(y)\, dy - \int\limits_{\Omega} \chi_{B_\epsilon}(y - z) \cdot f(y)\, dy \right]$$

$$= \frac{1}{|B_\epsilon|} \int\limits_\Omega [\chi_{B_\epsilon}(y-x) - \chi_{B_\epsilon}(y-z)] \cdot f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{|B_\epsilon|} \int\limits_{(B_\epsilon(x)\cup B_\epsilon(z))/(B_\epsilon(x)\cap B_\epsilon(z))} 1 \cdot f(y)\, dy$$

Hölder'sche Ungleichung anwenden

$$\leq \frac{1}{|B_\epsilon|} \left(\int\limits_{(B_\epsilon(x)\cup B_\epsilon(z))/(B_\epsilon(x)\cap B_\epsilon(z))} 1\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |f(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Eigenschaft der symmetrischen Differenz ausnutzen

$$\leq \frac{1}{|B_\epsilon|} L^+ \, |x-z|^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega |f(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq K^+ \|f\|_{2,\Omega} \cdot |x-z|^{\frac{1}{2}}$$

Also ist $M_\epsilon.f \in C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$. Außerdem ist wegen der Linearität von M_ϵ damit auch gezeigt, dass

$$\sup_{x \neq z} \frac{|M_\epsilon.f_1 - M_\epsilon.f_2|}{|x-z|^{\frac{1}{2}}} \leq K^+ \|f_1 - f_2\|_{2,\Omega}$$

Um die Stetigkeit zu zeigen bemerken wir noch:

$$\begin{aligned}
|M_\epsilon.f_1(x) - M_\epsilon.f_2(x)| &= |M.(f_1 - f_2)(x)| \\
&= \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \Big| \int\limits_{y \in B_\epsilon(x)} f_1(y) - f_2(y)\, dy \Big| \\
&\leq \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \left(\int\limits_{y \in B_\epsilon(x)} 1\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{y \in B_\epsilon(x)} |f_1(y) - f_2(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{|B_\epsilon(x)|}} \cdot \|f_1 - f_2\|_{2,\Omega} \\
&\leq K^+ \cdot \epsilon^{-\frac{n}{2}} \, \|f_1 - f_2\|_{2,\Omega}
\end{aligned}$$

Womit also folgt

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |M_\epsilon.f_1(x) - M_\epsilon.f_2(x)| \leq K^+ \cdot \epsilon^{-\frac{n}{2}} \, \|f_1 - f_2\|_{2,\Omega}$$

Damit sind beide Teile der $C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$-Norm abgeschätzt. Die letzte Aussage ist auch klar. ■

Korollar 17
Sei $p \geq 2,\ \epsilon > 0$ *und* $T : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \times W_1^{\infty}(\Omega) \mapsto W_1^p(\Omega, \mathbb{M}^{3\times 3})$ *stetig und* T *bilde beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab. Dann ist*

$$\mathcal{D}.(y, g) := M_{\epsilon}.(\nabla T(y, g))$$

$\mathcal{D} : C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \times W_1^{\infty}(\Omega) \mapsto C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ *stetig und bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.*

Beweis. Als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen ist $\mathcal{D}$ natürlich wieder stetig und mit der Hölder-Ungleichung für beschränkte Gebiete sieht man auch die Beschränktheit. ■

Kapitel 11

Formale Differentialrechnung

11.1 Taylorentwicklung und Differentiale

Sei $F, A \in \mathbb{M}^{3\times3}$, $C \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $G, J : \mathbb{M}^{3\times3} \to \mathbb{M}^{3\times3}$ differenzierbare matrixwertige Funktionen und $\Phi : \mathbb{M}^{3\times3} \to \mathbb{R}$ sowie $W : P\mathbb{S}ym \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbare skalarwertige Funktionen. Wir versammeln hier der besseren Lesbarkeit willen für einige der in der Arbeit auftretenden Funktionen ihre Ableitungen. Wir machen ausgiebiegen Gebrauch von der Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen und der daran abzulesenden **formalen** Gestalt der Ableitungen. Wir stützen uns dabei auf folgende Lemmata

Lemma 37 (Differentiale)
Seien X, Y Banachräume und sei $f : X \mapsto Y$ eine j-mal stetig differenzierbare Funktion. Wenn stetige k-Linearformen $B_k : X \mapsto L^k(X,Y)$, $k = 1, \ldots, j$ existieren mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X\ \forall h \in X : \\
&\qquad f(x+h) = f(x) + B_1(x).h + B_2(x).(h,h) + \\
&\qquad\qquad B_3(x).(h,h,h) + \ldots + B_j(x).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{j\text{-fach}}
\end{aligned}$$

dann gilt

$$D^k f(x).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{k\text{-fach}} = k! \cdot B_k(x).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{k\text{-fach}} \tag{11.1}$$

Beweis. Klar. ■

Lemma 38 (Verallgemeinerter Koeffizientenvergleich)
Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + O(|x|^{n+1})$$

Dann gilt $\alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots n.$

Beweis. Wir nehmen O.B.d.A $\alpha_1 > 0$ an. Dann ist

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_n x^n = O(|x|^{n+1})$$

dividieren durch x^{n+1} und Substitution von $y = \frac{1}{x}$ ergibt

$$\alpha_1 y^n + \alpha_2 y^{n-1} + \ldots + \alpha_n y \le C$$

Das müsste für alle $y > 0$ gelten. Ein Widerspruch! ■

Lemma 39 (Taylorentwicklung und Differentiale)
Seien X, Y Banachräume und sei $f : X \mapsto Y$ eine $j+1$-mal stetig differenzierbare Funktion. Wenn stetige Funktionen $B_k : X \mapsto C(X, Y)$, $k = 1, \dots, j$ existieren, die positiv homogen vom Grad k im zweiten Argument sind, d.h. für $\lambda > 0$: $B_k(x).(\lambda h) = \lambda^k\, B_k(x).h$ und die die Eigenschaft besitzen, dass

$$\forall x \in X\ \forall h \in X : \quad f(x+h) = f(x) + B_1(x).h + B_2(x).h + B_3(x).h + \ldots + B_j(x).h \tag{11.2}$$

wobei $B_k(x).h$ für $[B_k(x)](h)$ steht,dann gilt

$$D^k f(x).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-fach}} = k! \cdot B_k(x).h, \quad ; k = 1, \dots, j$$

Beweis. Sei $h \in X$. Wir benutzen die Taylorentwicklung mit Restglied für $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + D_1 f(x).h + \frac{1}{2} D_2 f(x).(h,h) + \\ &\quad \frac{1}{3!} D_3 f(x).(h,h,h) + \ldots + \frac{1}{j!} D_j f(x).\underbrace{(h, \dots, h)}_{j\text{-fach}} + O(|h|^{j+1}) \\ &= f(x) + B_1(x).h + B_2(x).h + B_3(x).h + \ldots + B_j(x).h \end{aligned}$$

Wenn wir $h = \lambda \hat{h}$ setzen, wobei $|\hat{h}| = 1$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda[D_1 f(x).\hat{h} - B_1(x).\hat{h}] \\ &\quad + \lambda^2[\frac{1}{2} D_2 f(x).(\hat{h}, \hat{h}) - B_2(x).\hat{h}] + \ldots + \\ &\quad + \lambda^j[\frac{1}{j!} D_j f(x).\underbrace{(\hat{h}, \dots, \hat{h})}_{j\text{-fach}} - B_j(x).\hat{h}] \\ &\quad + O(\lambda^{j+1}) \end{aligned}$$

und mit Lemma 38 ergibt sich die Aussage, da die Richtung h beliebig war. ■

11.2 Polarisierung

Lemma 40 (Verallgemeinerte Polarisierung)
Sei $X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}$ und sei $f : X \mapsto Y$ eine j-mal stetig differenzierbare Funktion. Die k-te Ableitung sei auf der "Diagonalen" bekannt, das heisst

$$L^k(x).(h) := D^k f(x).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-fach}} \quad 1 \leq k \leq j$$

ist bekannt. Wir setzen $P_x(h) = L^k(x).(h)$. Dann ist das vollständige k-te Differential $D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)$ schon alleine durch P_x bestimmt und es gilt für beliebiges $\hat{h} \in X$ und alle $h_1, \dots h_k \in X$:

$$k!\; D^k f(x).(h_1, \dots, h_k) = D^k P_x(\hat{h}).(h_1, \dots, h_k), \quad 1 \leq k \leq j$$

Beweis. Die Funktion P_x ist ein homogenes Polynom k-ten Grades in h und damit beliebig oft differenzierbar. Für ein festes $\hat{h}$ existiert also $D^k P_x(\hat{h}).(h_1, \dots, h_k)$ und ist vollständig symmetrisch (Satz v. Schwarz). Mit der Eulerschen Identität für homogene Polynome k-ten Grades (formal $P(\lambda x) = \lambda^k\, P(x) \to P^{(k)}(x) = k! \cdot P(x)$) gilt

$$D^k_{\hat{h}} P_x(\hat{h}).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-fach}} = k!\; P_x(\hat{h})$$

daher ergibt sich

$$D^k_{\hat{h}} P_x(\hat{h}).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-fach}} = k!\; D^k f(x).(\hat{h}, \dots, \hat{h})$$

gleichzeitig gilt aber davon unabhängig, wegen der k-Linearität von $D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)$ für jedes feste $\hat{h}$:

$$D^k_{\hat{h}}[D^k f(x).(\hat{h}, \dots, \hat{h})].(h_1, \dots, h_k) = k!\; D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)$$

also gilt

$$D^k_{\hat{h}} P_x(\hat{h}).\underbrace{(h_1, \dots, h_k)}_{k\text{-fach}} = k!\; D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)$$

■

Bemerkung 25
Tatsächlich ist das die Verallgemeinerung der Polarisierungsgleichung für bilineare Abbildungen.

Lemma 41
Sei $X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}$ und sei $f : X \mapsto Y$ ein Polynom j-Grades. Es gebe eine Konstante $C > 0$ unabhängig von $x \in X$, so dass gilt

$$|D^k f(x).\underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-fach}}| \leq C(1 + |x|^{r_k})\, |h|^k, \quad 1 \leq k \leq j$$

Dann gibt es auch eine Konstante $\hat{C} > 0$ unabhängig von $x \in X$ so dass gilt

$$|D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)| \leq \hat{C}(1 + |x|^{r_k})\, |h_1| \cdot \ldots |h_k|$$

Beweis. Weil f k-fach stetig differenzierbar ist, existiert $D^k f(x) \in L^k(X, Y)$ und ist vollstandig symmetrisch. Daher muss es ein $\hat{C}(x)$ geben, so dass

$$|D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)| \leq \hat{C}(x)\, |h_1| \cdot \ldots |h_k|$$

ist. Wegen Lemma 40 ist das vollständige Differential schon über die "Diagonale" bestimmt. Man erhält ja $D^k f(x).(h_1, \dots, h_k)$ durch k-faches differenzieren der "Diagonalen" bzgl. h. Differenzieren bzgl. h läßt aber die Koeffizienten $c(x)$ invariant. Die Wachstumsvoraussetzung für die "Diagonale" ist aber eine Voraussetzung an die von x abhängigen Koeffizienten. Daher überträgt sich die Wachstumsvoraussetzung auf das vollständige Differential. ■

Folgerung 7
Bei der Überprüfung von Wachstumsbedingungen für Ableitungen reicht es also aus, die Wachstumseigenschaft der "diagonalen" Ableitung zu kennen. Damit erspart man sich das vollständige Ausrechnen der totalen Ableitung. Das bedeutet für die in dieser Arbeit zu betrachtenden Funktionen eine erhebliche Rechenersparnis.

11.3 Formale erste Ableitungen

Die tatsächliche Überprüfung der Funktion auf Differenzierbarkeit im Frechet-Sinne in gewissen Funktionenräumen geschieht nochmals separat, aber natürlich mit dem formalen Kandidaten, der sich hier ergibt. Wir beginnen mit der auch für Matrizen definierten Neumann'schen Reihe:

$$(\mathbb{1} - F)^{-1} = \mathbb{1} + F + F^2 + F^3 + \ldots$$

welche konvergiert, falls $||F|| < 1$.

$$(F + H)^T = F^T + H^T \Rightarrow D(F^T).H = H^T$$

$$\begin{aligned}(F+H)^2 &= F^2+FH+HF+H^2 \Rightarrow D(F^2).H = FH+HF\\ &\Rightarrow D^2(F^2).(H,H) = 2\cdot H^2\end{aligned}$$

Wenn man die 1.Ableitung hingegen mit festgehaltenem Argument nochmals differenziert, das heisst

$$D(D(F^2).H).\hat{H} = D(FH+HF).\hat{H} = \hat{H}H + H\hat{H}$$

bestimmt man nicht nur die 2.Ableitung in eine feste Richtung H sondern auch die allgemeine Bilinearform der 2.Ableitung. Bei der folgenden Darstellung ist dies zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned}(F+H)^3 &= F^3+F^2H+FHF+HF^2+FH^2+HFH+H^2F+H^3\\ &\Rightarrow D(F^3).H = F^2H+FHF+HF^2\\ &\Rightarrow D^2(F^3).(H,H) = 2\{FH^2+HFH+H^2F\}\\ &\Rightarrow D^3(F^3).(H,H,H) = 6\cdot H^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F+H)^T(F+H) &= F^TF+F^TH+H^TF+H^TH\\ &\Rightarrow D(F^TF).H = F^TH+H^TF\\ &\Rightarrow D^2(F^TF).(H,H) = 2\cdot H^TH\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F+H)^{-1} &= (F(1\!\!1+F^{-1}H))^{-1} = (1\!\!1+F^{-1}H)^{-1}F^{-1}\\ &= (1\!\!1-(-F^{-1}H))^{-1}F^{-1}\\ &\text{mit der Neumann'schen Reihe entwickeln}\\ &= (1\!\!1-F^{-1}H+(F^{-1}H)^2+\dots)F^{-1}\\ &= F^{-1}-F^{-1}HF^{-1}+(F^{-1}H)^2F^{-1}+\dots\\ &\Rightarrow D(F^{-1}).H = -F^{-1}HF^{-1}\\ &\Rightarrow D^2(F^{-1}).(H,H) = (F^{-1}H)^2F^{-1} = F^{-1}HF^{-1}HF^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((F+H)^T(F+H))^{-1} &= (F^TF+F^TH+H^TF+H^TH)^{-1}\\ &= \left((F^TF)(1\!\!1+(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH))\right)^{-1}\\ &= \left((1\!\!1+(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH))\right)^{-1}\cdot(F^TF)^{-1}\\ &= \left(1\!\!1-(-(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH))\right)^{-1}\cdot(F^TF)^{-1}\\ &\text{mit der Neumann'schen Reihe entwickeln}\\ &= (1\!\!1-(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH)+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big[(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH)\big]^2+\dots)\cdot(F^TF)^{-1}\\
&=(F^TF)^{-1}-(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH))(F^TF)^{-1}+\\
&\big[(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH)\big]\cdot\\
&\quad\big[(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH)\big]\cdot(F^TF)^{-1}+\dots\\
&\text{bis zu Termen 2.Ordnung entwickeln}\\
&=(F^TF)^{-1}-(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF+H^TH))(F^TF)^{-1}+\\
&(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}+\dots\\
&\Rightarrow D((F^TF)^{-1}).H=-(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF))(F^TF)^{-1}\\
&\Rightarrow D^2((F^TF)^{-1}).(H,H)=-(F^TF)^{-1}(H^TH))(F^TF)^{-1}+\\
&(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}(F^TH+H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F+H\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 &= \langle F+H,F+H\rangle\\
&= \langle F,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}+\langle F,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}+\langle H,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}+\langle H,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&\Rightarrow D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H=2\langle F,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F+H\| &= \sqrt{\langle F+H,F+H\rangle}=\sqrt{\|F\|^2+2\langle F,H\rangle+\|H\|^2}\\
&=\|F\|\{\sqrt{1+\frac{2}{\|F\|^2}\langle F,H\rangle+\frac{\|H\|^2}{\|F\|^2}}\}\\
&=\|F\|\{1+\frac{1}{\|F\|^2}\langle F,H\rangle+\frac{1}{2}\frac{\|H\|^2}{\|F\|^2}+\dots\}\\
&=\|F\|+\frac{1}{\|F\|}\langle F,H\rangle+\dots \quad ,F\neq 0
\end{aligned}$$

wobei hier die Entwicklung $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\dots$ für $x\in\mathbb{R}$ benutzt wurde. Deshalb gilt für Matrizen genauso wie für reelle Zahlen:

$$D.(\|F\|).H=\frac{1}{\|F\|}\langle F,H\rangle,\quad F\neq 0$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir daraus für $p\geq 1$:

$$\begin{aligned}
D.(\|F\|^p).H &= p\|F\|^{p-1}\frac{1}{\|F\|}\langle F,H\rangle\\
&= p\|F\|^{p-2}\langle F,H\rangle
\end{aligned}$$

Poduktregel:

$$D(G(F)\cdot J(F)).H=(DG(F).H)\cdot J(F)+G(F)\cdot(DJ(F).H)$$

Differenzieren mit Hilfe einer **Inversen Funktion** und der **Kettenregel:**

$$G(J(F)) = F \Rightarrow DG(J(F)).DJ(F).H = Id.H$$

und wenn man das auflösen kann, folgt:

$$DJ(F).H = (DG(J(F))).^{-1}H$$

wobei mit der stetigen Differenzierbarkeit von G gleichzeitig die Differenzierbarkeit von J garantiert wird.
Wir demonstrieren das an einem Beispiel: Seien $A, B \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $G(A) = A^2$ und $J(B) = B^{\frac{1}{2}}$. Dann gilt ja

$$G(J(B)) = B \Rightarrow DG(J(B)) \bullet DJ(B).H = H$$

und mit $DG(A).H = AH + HA$ folgt also

$$\begin{aligned} J(B)\ DJ(B).H + DJ(B).H\ J(B) = H \\ \Leftrightarrow B^{\frac{1}{2}}\ DJ(B).H + DJ(B).H\ B^{\frac{1}{2}} = H \end{aligned}$$

Dies ist eine Matrixgleichung für $DJ(B).H$ (**Lyapunov'sche Matrixgleichung**), welche sogar für $H \in P\mathbb{S}ym$ eine eindeutige Lösung gestattet. Der konkrete Ausdruck ist für unsere Bedürfnisse allerdings zu kompliziert und wir betrachten deshalb im folgenden keine Funktionen der Art $F \mapsto \Psi((F^TF)^{\frac{1}{2}})$. Solche Funktionen treten allerdings natürlicherweise bei skalarwertigen Funktionen auf, die über die Eigenwerte von $(F^TF)^{\frac{1}{2}}$ definiert sind.

$$\begin{aligned} D(\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H &= 2\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle\frac{F^TF}{\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}}, F^TH + H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} \\ &= 2\langle F^TF, F^TH + H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} \end{aligned}$$

Für $p \geq 2$ gilt allgemein:

$$\begin{aligned} D(\frac{1}{p}\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^p).H &= \|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^{p-1}\langle\frac{F^TF}{\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}}, F^TH + H^TF\rangle \\ &= \|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^{p-2}\langle F^TF, F^TH + H^TF\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tr(F+H) &= \langle F+H, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} = \langle F, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} + \langle H, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} \\ &= tr(F) + tr(H) \\ &\Rightarrow D(tr(F)).H = tr(H) \end{aligned}$$

Eine formale Entwicklung der Determinanten zeigt:

$$\det(\mathbb{1}+H)=\begin{cases}1+\det H & \text{für } n=1\\ 1+tr(H)+\det H & \text{für } n=2\\ 1+tr(H)+tr(\mathrm{Adj}H)+\det H & \text{für } n=3\\ 1+tr(H)+\cdots+tr(\mathrm{Adj}H)+\det H & \text{für } n>3\end{cases}$$

Und ab jetzt nur noch für $n=3$:

$$\begin{aligned}\det F &= \det(\mathbb{1}+(F-\mathbb{1}))\\ &= 1+tr(F-\mathbb{1})+tr(\mathrm{Adj}F-\mathbb{1})+\det(F-\mathbb{1})\end{aligned}$$

Und wir sehen für $F-\mathbb{1}=\nabla u$ dass

$$\det(\mathbb{1}+\nabla u)=1+tr(\nabla u)+\ldots=1+div\, u+\ldots$$

Bemerkung 26 (Inkompressibiltät für kleine Deformationen)
Wegen

$$\det(\mathbb{1}+\nabla u)=1+tr(\nabla u)+\ldots=1+div\, u+\ldots$$

muss im Falle der Inkompressibilität der lineare Term $div\, u$ verschwinden, also $div\, u=0$ gelten.

Bemerkung 27 (Inkompressibilität für große Deformationen)
Der Deformationsgradient sei zeitlich variabel, aber es gelte $\forall t>0\ \det F(t)=1$. Dann gilt auch

$$0\equiv\frac{d}{dt}[\det F(t)]=D(\det F(t)).F'(t)=\langle F'(t),\mathrm{Adj}F(t)^T\rangle$$

Wenn man in diesem Ausdruck $F(t)=\mathbb{1}+\nabla u(t)$ setzt und Terme höherer Ordnung vernachlässigt, bekommt man

$$0\equiv\frac{d}{dt}[\det(\mathbb{1}+\nabla u(t))]=\langle\nabla u'(t),\mathbb{1}\rangle=\mathrm{div}\, u'(t)=\mathrm{div}\, v$$

wobei v hier die Geschwindigkeit in der Referenzkonfiguration darstellt. Gleichzeitig gilt aber

$$0\equiv\frac{d}{dt}[\det\mathbb{1}+\nabla u(t)]=\langle F'(t)\cdot F^{-1}(t),\mathbb{1}\rangle=div\,\hat{v}$$

wobei $\hat{v}$ für die Geschwindigkeit in der Momentankonfiguration steht. ■

Lemma 42 (Entwicklung der Determinante für $n = 3$)
Sei $\det F > 0$, *dann gilt*

$$\det(F + H) = \det F + \langle H, \mathrm{Adj} F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \langle \mathrm{Adj} H, F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \det H$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\det(F + H) &= \det((1\!\!1 + HF^{-1})F) = \det(1\!\!1 + HF^{-1}) \det F \\
&= \det F(\det 1\!\!1 + tr(HF^{-1}) + tr(\mathrm{Adj}(HF^{-1})) + \det(HF^{-1})) \\
&= \det F + \det F\langle HF^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \det F\langle \det(HF^{-1})(HF^{-1})^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\
&\quad + \det F \det H \det F^{-1} \\
&= \det F + \det F\langle HF^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \det F\langle \det(HF^{-1})FH^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \\
&\quad \det F \det H \det F^{-1} \\
&= \det F + \det F\langle HF^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \det F\langle \det(HF^{-1})FH^{-1}, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \\
&\quad \det H \\
&= \det F + \langle H, \mathrm{Adj} F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \langle \mathrm{Adj} H, F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \det H
\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen überträgt sich diese Darstellung auch auf nicht invertierbare $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. ■

Auf $\mathbb{M}^{n\times n}$ ist $Adj : \mathbb{M}^{n\times n} \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$, $F \mapsto \mathrm{Adj} F$ ein Polynom $(n-1)$. Grades in den Einträgen, deshalb ist für $n = 3$ die Funktion Adjunkte $\mathrm{Adj} F$ ein Polynom 2.Grades in den Einträgen der Matrix , und folgerichtig muss die Taylorentwicklung für $n = 3$ mit dem 2. Term abbrechen.

Lemma 43 (Entwicklung der Adjunkten für $n = 3$)
Es gilt

$$\mathrm{Adj}(F + H) = \mathrm{Adj} F + D(\mathrm{Adj} F).H + \mathrm{Adj} H$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Adj}(F + H) &= \mathrm{Adj} F + D(\mathrm{Adj} F).H + \mathrm{Adj} H \\
&\Rightarrow D^2(\mathrm{Adj} F).(H, H) = 2 \cdot \mathrm{Adj} H
\end{aligned}$$

■

Sei $G(F) = F^{-1}$ dann gilt

$$D(F^{-1}).H = -F^{-1}HF^{-1}$$

$$D(\det F).H = \det F \cdot tr(HF^{-1}) = \det F \cdot \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} = \langle (Adj F)^T, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}$$

$$\begin{aligned} D(ln(\det F)).H &= \frac{1}{\det F} D(\det F).H \\ &= \frac{1}{\det F} \det F \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D((\ln\det F)^2)).H &= 2\ln\det F \cdot \frac{1}{\det F} D(\det F).H \\ &= 2\ln\det F \cdot \frac{1}{\det F} \det F \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= 2\ln\det F \cdot \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\mathrm{Adj}F).H &= D(\det(F)F^{-1}).H \\ &= (D(\det F).H)F^{-1} + (\det F)D(F^{-1}).H \\ &= \det F \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \cdot F^{-1} + \det F(-F^{-1}HF^{-1}) \\ &= \mathrm{Adj}F \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} - (\mathrm{Adj}F)HF^{-1} \\ &= \mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \cdot 1\!\!1 - HF^{-1}\} \end{aligned}$$

Für diese Ableitung hätten wir genauso gut auch die Identität $\mathrm{Adj}F \cdot F = \det F \cdot \mathbf{1}$ differenzieren können; das Ergebnis ist selbstredend dasselbe.

$$\begin{aligned} D(\mathrm{Adj}(F^TF)).H &= D(\mathrm{Adj}F\,\mathrm{Adj}F^T).H \\ &= (D(\mathrm{Adj}F).H)\mathrm{Adj}F^T + (\mathrm{Adj}F)D(\mathrm{Adj}F^T).H \\ &= \mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} 1\!\!1 - HF^{-1}\}\mathrm{Adj}F^T + \\ &\quad (\mathrm{Adj}F)\{\mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} 1\!\!1 - HF^{-1}\}\}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\frac{1}{\det F}).H &= D(\det F^{-1}).H = D((\det F)^{-1}).H \\ &= (-1)(\det F)^{-2} D(\det F).H \\ &= (-1)(\det F)^{-2} \det F \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= (-1)(\det F)^{-1} \langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\mathrm{Adj}(F^{-1})).H &= D(\det(F^{-1})F).H \\
&= D((\det F)^{-1}F).H \\
&= \{(-1)(\det F)^{-2}\det F\langle F^{-T},H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}\}F + (\det F)^{-1}H \\
&= (-1)(\det F)^{-1}F\langle F^{-T},H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + (\det F)^{-1}H \\
&= -\mathrm{Adj}F^{-1}\langle F^{-T},H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + (\det F)^{-1}H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(F^{-T}).H = D((F^{T})^{-1}).H &= -F^{-T}(D(F^{T}).H)F^{-T} \\
&= -F^{-T}H^{T}F^{-T} \\
&= \{D(F^{-1}).H\}^{T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{G(F+H)\}^{T} &= \{G(F) + DG(F).H + \dots\}^{T} \\
&= G(F)^{T} + \{DG(F).H\}^{T} + \dots \\
&\Rightarrow D(G(F)^{T}).H = \{DG(F).H\}^{T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(tr(\mathrm{Adj}F)).H &= tr(D(\mathrm{Adj}F).H) \\
&= tr(\mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T},H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}1\!\!1 - HF^{-1}\}) \\
&= tr(\mathrm{Adj}F\{\langle 1\!\!1,F^{-1}H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}1\!\!1 - HF^{-1}\}) \\
&= tr(\mathrm{Adj}F)tr(F^{-1}H) - tr((\mathrm{Adj}F)HF^{-1})
\end{aligned}$$

$$D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^{2}).H = D(\langle F,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H = 2\langle F,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}$$

$$\begin{aligned}
D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H &= D(\langle F,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^{\frac{1}{2}}).H \\
&= \frac{1}{2}\langle F,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^{-\frac{1}{2}}D(\langle F,F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\
&= \langle \frac{F}{\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}},H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}
\end{aligned}$$

$$D(\frac{F}{\|F\|}).H = \frac{H}{\|F\|} - \frac{1}{\|F\|^{3}}\langle F,H\rangle \cdot F$$

$$\begin{aligned}
D(\Psi(F^TF)).H &= \partial_{F^TF}\Psi(F^TF).(F^TH+H^TF)\\
&= \langle \partial_{F^TF}\Psi(F^TF), (F^TH+H^TF)\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&= \langle F\cdot\partial_{F^TF}\Psi(F^TF), H\rangle + \langle \partial_{F^TF}\Psi(F^TF)\cdot F^T, H^T\rangle\\
&= \langle F\cdot\left(\partial_{F^TF}\Psi(F^TF)+\partial_{F^TF}\Psi(F^TF)^T\right), H\rangle
\end{aligned}$$

$$D(\|F-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H = 2\langle F-1\!\!1, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}$$

$$\begin{aligned}
D(\|F^TF-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H &= 2\|F^TF-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle \frac{F^TF-1\!\!1}{\|F^TF-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}}, F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&= 2\langle F^TF-1\!\!1, F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D((tr(F^TF-1\!\!1))^2).H &= D(\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H\\
&= 2\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(tr(\mathrm{Adj}(F^TF)).H &= D(\langle \mathrm{Adj}F^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H = D(\langle \mathrm{Adj}F\,\mathrm{Adj}F^T, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= D(\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}F\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
D(\|\mathrm{Adj}F\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H &= 2\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&= 2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}1\!\!1 - HF^{-1}\}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&= 2\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\|\mathrm{Adj}F\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 - 2\langle \mathrm{Adj}F, (\mathrm{Adj}F)HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\det F^TF).H &= D(\det F^T\det F).H = D((\det F)^2).H\\
&= 2\{D(\det F).H\}\det F\\
&= 2(\det F)^2\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} = 2\det F\langle(\mathrm{Adj}F)^T, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\frac{1}{\det F^TF}).H &= D(\frac{1}{\det F^T\det F}).H = D(\frac{1}{(\det F)^2}).H\\
&= -2\,(\det F)^{-3}\langle\det F F^{-T}, H\rangle\\
&= -2\,(\det F)^{-2}\langle F^{-T}, H\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D(\frac{F}{\det F^{\frac{1}{3}}}).H &= D(F \ \det F^{-\frac{1}{3}}).H \\
&= H \cdot \det F^{-\frac{1}{3}} - F \cdot \frac{1}{3}(\det F)^{-\frac{4}{3}} \cdot \det F \ \langle F^{-T}, H \rangle \\
&= H \cdot \det F^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\frac{F}{\det F^{\frac{1}{3}}}\langle F^{-T}, H \rangle \\
&\text{für } F = 1\!\!1 \text{ ergibt sich} \\
&= H - \frac{1}{3}\langle 1\!\!1, H \rangle = dev(H)
\end{aligned}
$$

11.4 Ableitung nach symmetrischem Argument

Lemma 44 (Ableitung nach symmetrischem Argument)
Sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $\hat{W}$ die Einschränkung von W auf symmetrische Matrizen, also

$$\forall\, C \in \mathbb{S}ym(3): \quad \hat{W}(C) = W(C)$$

Dann können wir setzen

$$D_C\hat{W}(C) = \frac{1}{2}\left(DW(C) + DW(C)^T\right)$$

Die Ableitung einer auf symmetrischem Argument definierten Funktion kann also o.B.d.A als symmetrisch angenommen werden.

Beweis. Sei $H \in \mathbb{S}ym(3)$

$$
\begin{aligned}
\hat{W}(C+H) &= W(C+H) \\
&= W(C) + \langle DW(C), H \rangle + \dots \\
&\text{und weil } H \in \mathbb{S}ym(3) \text{ ist folgt} \\
&= \hat{W}(C) + \langle \frac{1}{2}\left(DW(C) + DW(C)^T\right), H \rangle + \dots \\
&= \hat{W}(C) + \langle D_C\hat{W}(C), H \rangle + \dots
\end{aligned}
$$

Man vergleiche auch mit [CW84], S.213. ∎

11.5 Formale zweite Ableitungen

$$
\begin{aligned}
D^2(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2).(H,H) &= D(D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2).H).H = D(2\langle F, H \rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\
&= 2\langle H, H \rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\
&= 2\|H\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^p).(H,H) &= D(D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^p).H).H = D(p\|F\|^{p-2}\cdot\langle F,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\
&= p\cdot(p-2)\|F\|^{p-4}\langle F,H\rangle^2 + p\|F\|^{p-2}\cdot\langle H,H\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).(H,H) &= D(D(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H).H = D(\langle\frac{F}{\|F\|},H\rangle).H \\
&= \frac{\langle H,H\rangle}{\|F\|} - \frac{\langle F,H\rangle\langle F,H\rangle}{\|F\|^3} \\
&= \frac{\|H\|^2}{\|F\|} - \frac{\langle F,H\rangle^2}{\|F\|^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2).(H,H) &= D(D(\|F^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2).H).H \\
&= D(2\langle F^TF,F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\
&= 2\langle F^TH+H^TF,F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \\
&\quad 2\langle F^TF,H^TH+H^TH\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\
&= 2\langle F^TH+H^TF,F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + \\
&\quad 4\langle F^TF,H^TH\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\
&= 2\|F^TH+H^TF\|^2 + 4\langle F^TF,H^TH\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(\frac{1}{p}\|F^TF\|^p).(H,H) &= D(D(\frac{1}{p}\|F^TF\|^p).H).H \\
&= D(\|F^TF\|^{p-2}\langle F^TF,F^TH+H^TF\rangle).H \\
&= (p-2)\|F^TF\|^{p-4}\langle F^TF,F^TH+H^TF\rangle^2 + \\
&\quad \|F^TF\|^{p-2}[\langle F^TF,2H^TH\rangle + \\
&\qquad \langle F^TH+H^TF,F^TH+H^TF\rangle] \\
&= (p-2)\|F^TF\|^{p-4}\langle F^TF,F^TH+H^TF\rangle^2 + \\
&\quad \|F^TF\|^{p-2}[2\langle F^TF,H^TH\rangle + \\
&\qquad \|F^TH+H^TF\|^2]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D^2(\|F^TF-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).(H,H) &= D(D(\|F^TF-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H).H\\
&= D(2\langle F^TF-1\!\!1, F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= 2\{\langle F^TH+H^TF, F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} +\\
&\quad \langle F^TF-1\!\!1, H^TH+H^TH\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\}\\
&= 2\{\langle F^TH+H^TF, F^TH+H^TF\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} +\\
&\quad 2\langle F^TF-1\!\!1, H^TH\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\}\\
&= 2\|F^TH+H^TF\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 + 4\langle F^TF-1\!\!1, H^TH\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2(\|F-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).(H,H) &= D(D(\|F-1\!\!1\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).H).H\\
&= D(2\langle F-1\!\!1, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= 2\langle H,H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} = 2\|H\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2((tr(F^TF-1\!\!1)^2).(H,H) &= D^2(\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2).(H,H)\\
&= D(\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= 2\{\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} +\\
&\quad 2\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle H^TH, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\}\\
&= 2\{\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} +\\
&\quad 2\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\|H\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2\}\\
&= 2\{\langle F^TH+H^TF, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 +\\
&\quad 2\langle F^TF-1\!\!1, 1\!\!1\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\|H\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2\}\\
&= 8\langle F,H\rangle^2_{\mathbb{M}^{3\times3}} + 4(\|F\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 - 3)\|H\|_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2(\frac{1}{\det F}).(H,H) &= D((-1)(\det F)^{-1}\langle F^{-T}, H\rangle).H\\
&= (\det F)^{-1}\langle F^{-T}, H\rangle^2 + (\det F)^{-1}\langle HF^{-1}, (HF^{-1})^T\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2(\det F).(H,H) &= D(\det F\langle H^T, F^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= D(\det F).H\langle H^T, F^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} + \det F D(\langle H^T, F^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}).H\\
&= \det F\langle H^T, F^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\langle H^T, F^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}} + \det F\langle H^T, -F^{-1}HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\\
&= \det F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 - \langle F^{-T}H^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\}\\
&= \det F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}{}^2 - \langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times3}}\}
\end{aligned}$$

Weil aber wegen Lemma 42 auch gilt

$$D^2(\det F).(H,H) = 2\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}$$

folgt also für invertierbare $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ die unerwartete Formel:

$$\det F\{\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2 - \langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}\} = 2\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \tag{11.3}$$

und wir erhalten für den Fall $F = \mathbb{1}$ folgendes Ergebnis (siehe auch Satz 7)

$$\begin{aligned} 1\{\langle \mathbb{1}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^2 - \langle H^T, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}\} &= 2\langle \mathrm{Adj}H, \mathbb{1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ \{tr(H)^2 - tr(H^2)\} &= 2tr(\mathrm{Adj}H) \end{aligned} \tag{11.4}$$

Diese Formeln werden später eine Rolle spielen, um eine Art Kornsche-Ungleichung für Dirichlet-Daten zu zeigen.

$$\begin{aligned} D^2(\frac{1}{detF^TF}).(H,H) &= D(-2\cdot(\det F)^{-2}\langle F^{-T}, H\rangle).H \\ &= 4\cdot(\det F)^{-2}\langle F^{-T}, H\rangle^2 + \\ &\quad 2\cdot(\det F)^{-2}\langle HF^{-1}, (HF^{-1})^T\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2(\ln\det F).(H,H) &= D(\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\ &= \langle -F^{-T}H^TF^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= -\langle F^{-T}H^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= -\langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2((\ln\det F)^2)).(H,H) &\underbrace{=}_{\det F>0} D(2\ln\det F\cdot\langle F^{-T}, H\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}}).H \\ &= 2\ln\det F\ \langle -F^{-T}H^TF^{-T}, H\rangle + 2\langle F^{-T}, H\rangle\langle F^{-T}, H\rangle \\ &= -2\ln\det F\langle F^{-T}H^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + 2\langle F^{-T}, H\rangle^2_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \\ &= -2\ln\det F\langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} + 2\langle F^{-T}, H\rangle^2_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2(\ln(\det F^TF)).(H,H) &\underbrace{=}_{\det F>0} 2D^2(\ln(\det F)).(H,H) \\ &= -2\langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle_{\mathbb{M}^{3\times 3}} \end{aligned} \tag{11.5}$$

Lemma 45 (Formale 2.Ableitung von $\Psi(F) := W(F^T + F)$)
Sei $W : \mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{R}$. Dann gilt für die 2.Ableitung von $\Psi(F) := W(F^T + F)$:

$$D^2\Psi(F).(H,H) = D^2W(F^T + F).(H^T + H, H^T + H)$$

Wenn $D^2W(S).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$, dann gilt

$$D^2\Psi(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H^T + H\|^2$$

und man verliert bezüglich Ψ nur die strikte Konvexität.(wähle $H^T = -H$)

Beweis. Klar ■

Lemma 46 (Formale 2.Ableitung von $\Psi(F) := W(F^TF)$)
Sei $W : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{R}$. Dann gilt für die 2.Ableitung von $\Psi(F) := W(F^TF)$:

$$\begin{aligned} D^2\Psi(F).(H,H) &= 2\langle \partial_C W(F^TF), H^TH\rangle + \\ &\partial_C^2 W(F^TF).(F^TH + H^TF, F^TH + H^TF) \end{aligned}$$

Beweis. Wir leiten formal den Ausdruck für die 2.Ableitung von $\Psi(F) := W(F^TF)$ her:

$$\begin{aligned} W((F+H)^T(F+H)) &= W(F^TF + F^TH + H^TF + H^TH) \\ &= W(F^TF) + \langle \partial_C W(F^TF), F^TH + H^TF\rangle + \cdots \end{aligned}$$

also gilt $D\Psi(F).H = \langle \partial_C W(F^TF), F^TH + H^TF\rangle$ und wenn wir diesen Term nun selbst wieder entwickeln, gilt

$$\begin{aligned} &\langle \partial_C W((F+H)^T(F+H)), (F+H)^TH + H^T(F+H)\rangle = \\ &= \langle \partial_C W((F^TF + F^TH + H^TF + H^TH)), (F^TH + H^TF + H^TH + H^TH)\rangle \\ &= \langle \partial_C W(F^TF) + \partial_C^2 W(F^TF).(F^TH + H^TF + \dots), (F^TH + H^TF + 2H^TH)\rangle \\ &= \langle \partial_C W(F^TF), F^TH + H^TF\rangle + 2\langle \partial_C W(F^TF), H^TH\rangle \\ &\quad + \partial_C^2 W(F^TF).(F^TH + H^TF, F^TH + H^TF) + \dots \end{aligned}$$

Deshalb gilt für $\Psi(F) := W(F^TF)$

$$\begin{aligned} D^2\Psi(F).(H,H) &= 2\langle \partial_C W(F^TF), H^TH\rangle + \\ &\partial_C^2 W(F^TF).(F^TH + H^TF, F^TH + H^TF) \end{aligned}$$

■

Bemerkung 28
Instruktiv ist es hier, die Ableitung von $F \mapsto \|(F^TF)^{-1}\|^2$ direkt und über den obigen Weg indirekt zu berechnen.

11.6 Konvexität

Lemma 47 (2.Ableitung und Konvexität)
Sei K eine konvexe Menge und $W : K \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:

1. *W ist konvex.*
2. *$D^2W(F).(H,H) \geq 0 \quad \forall F \in K,\ \forall H \in Lin(K)$*

Beweis. [Roc70], S.27 ■

Bemerkung 29
Für die Konvexität der Funktion $W : K \mapsto \mathbb{R}$ reicht es nicht, dass $D^2W(F).(H,H) \geq 0 \quad \forall F \in K,\ \forall H \in K$. Denn zum Beispiel gilt für $W : P\mathbb{S}ym \mapsto \mathbb{R}, \quad W(C) = \det C, \quad D^2W(C).(H,H) = 2\ \langle C, \mathrm{Adj} H\rangle \geq 0$ für $C, H \in P\mathbb{S}ym$, aber $W(C) = \det C$ ist nicht konvex.

Wir folgern das

Lemma 48 (Konvexität auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$ und $P\mathbb{S}ym(3)$)
Sei $C \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $W : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{R}$ und es gelte $\forall H \in \mathbb{S}ym(3)$: $\partial_C^2 W(C).(H,H) \geq 0$ und $\partial_C W(C) \in P\mathbb{S}ym_0(3)$ dann gilt: Die Funktion

$$\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}, \quad F \mapsto W(F^T F)$$

ist konvex.

Beweis. Obige Formel aus Lemma 46 für die 2.Ableitung von Ψ betrachten und Eigenschaften des Skalarprodukts ausnutzen. ■

Wir bemerken hier noch, dass ja $M^{3\times 3}$ und $\mathbb{S}ym(3)$ Vektorräume sind und $P\mathbb{S}ym$ ein positiver konvexer Kegel ist. Daher gibt es keine Probleme mit dem Definitionsbereich der genannten konvexen Funktionen.

Beispiel 5
Sei $W(C) = \|C\|^2$, dann ist $\Psi(F) = \|F^T F\|^2$ konvex in F, wie wir auch schon weiter oben sahen. Hier ist mit Lemma 48 ja $\partial_C W(C) = 2C \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $\partial_C^2 W(C).(H,H) = 2\|H\|^2 \geq 0$. Tatsächlich ist $\Psi(F) = \|F^T F\|^2$ sogar strikt konvex, wie man sich anhand der höheren Ableitungen überlegen kann.

Beispiel 6
Seien $A, C \in P\mathbb{S}ym(3)$; $W(C) = \langle AC, CA\rangle$, dann ist $\Psi(F) = \langle AF^T F, F^T FA\rangle$ konvex in F. Denn es ist $\partial_C W(C) = A^T CA + ACA^T \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $\partial_C^2 W(C).(H,H) = 2\langle AH, HA\rangle \geq \lambda_{min}^2(A) \cdot \|H\|^2$ und die Behauptung ergibt sich mit Lemma 48.

Beispiel 7
Seien $A, C \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $W(C) = \langle C,A\rangle$.($W$ ist linear in C) Dann ist $\Psi(F) = \langle F^T F,A\rangle$ konvex, denn $\partial_C W(C) = A \in P\mathbb{S}ym(3)$ und $\partial_C^2 W(C).(H,H) = 0$. Wenn hingegen $W(C) = \|AC\|^2$ ist, kann mit Lemma Lemma 48 nicht mehr auf die Konvexität von $\Psi(F) = \|F^T FA\|^2$ geschlossen werden, da i.A $\partial_C W(C) \notin P\mathbb{S}ym(3)$ ist, denn $\partial_C W(C).H = 2\langle A^T AC,H\rangle$ und $A^T AC \notin P\mathbb{S}ym(3)$.

Bemerkung 30
Für die Folgerung im Lemma 48 ist es nicht hinreichend, dass $\partial_C^2 W(C).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$ für alle $H \in \mathbb{S}ym(3)$ und $\partial_C W(C) \in \mathbb{S}ym(3)$ gilt, was wir mit einem Gegenbeispiel zeigen.

Beispiel 8
Sei $W(C) = -\ln\det C$. Dann gilt

$$\forall H \in P\mathbb{S}ym(3) : \partial_C W(C).H = -\langle C^{-T},H\rangle = \langle -C^{-1},H\rangle$$

und $\partial_C W(C) \in \mathbb{S}ym(3)$, da $-C^{-1} \in \mathbb{S}ym(3)$ ist, wenn $C \in P\mathbb{S}ym(3)$ und

$$\begin{aligned}
\forall H \in \mathbb{S}ym(3) : \quad \partial_C^2 W(C).(H,H) &= \langle (C^{-1}H)^T,C^{-1}H\rangle \\
&= \langle HC^{-1},C^{-1}H\rangle \\
&\geq \lambda_{min}^2(C^{-1})\ \|H\|^2 \\
\forall \hat{H} \in \mathbb{S}ym(3) : \quad \partial_C^2 W(C).(\hat{H},\hat{H}) &\geq \lambda_{min}^2(C^{-1})\ \|\hat{H}\|^2
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion $W(C) = -\ln\det C$ auf $P\mathbb{S}ym(3)$ strikt konvex, aber die Funktion $\Psi(F) = -\ln\det F^T F = -\ln(\det F)^2$ ist auf $M^{3\times 3}$ nicht konvex, wie man leicht so sieht: Wir wählen $F_1, F_2 \in \mathbb{M}^{3\times 3}$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Für $0 < \lambda < 1$ ist nun $\det F_1 = 1$ und $\det F_2 = 4$. Damit gilt

$$-\lambda \ln(\det F_1)^2 - (1-\lambda)\ln(\det F_2)^2 = -2(1-\lambda)\ln 4 < 0$$

und

$$\begin{aligned}
\det(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4(1-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (2\lambda - 1)\ (2\lambda - 4)
\end{aligned}$$

Dann ist aber für $\hat{\lambda} = \frac{3}{8}$

$$(2\hat{\lambda} - 1)\ (2\hat{\lambda} - 4) = \frac{52}{64} < 1$$

also

$$-\ln(\det(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2))^2 = -2\ln(2\lambda - 1)\ (2\lambda - 4) = -2\ln\frac{52}{64} > 0$$

womit die Konvexitätsbedingung für $\Psi(F) = -\ln(\det F)^2$ *verletzt ist.*

■

Bemerkung 31
Für die Folgerung im Lemma 48 ist es ebenso nicht hinreichend, dass $\partial_C^2 W(C).(H,H) \geq 0$ *für alle* $H \in P\mathbb{S}ym(3)$ *und* $\partial_C W(C) \in P\mathbb{S}ym_0(3)$ *gilt, was wir wieder mit einem Gegenbeispiel zeigen.*

Beispiel 9
Sei $W(C) = \det C$. *Dann ist* $\partial_C W(C).H = \langle H, \mathrm{Adj}\, C\rangle$ *und für* $C \in P\mathbb{S}ym$ *ist* $\mathrm{Adj}\, C \in P\mathbb{S}ym_0$. *Ausserdem ist* $\partial_C^2 W(C).(H,H) = 2\langle \mathrm{Adj}\, H, C\rangle \geq 0$ *für* $H \in P\mathbb{S}ym_0$. *Aber weder ist* $\Psi(F) = \det F^T F$ *konvex noch war ja* $W(C) = \det C$ *konvex auf* $P\mathbb{S}ym$.

Lemma 49 (Alternative Darstellung für $D^2(-\ln\det F).(H,H)$)
Wir definieren wieder $W(C) = -\ln\det C$. *Sei* $\det F \geq c^+ > 0$. *Dann gilt für* $\Psi(F) := W(F^T F)$ *mit Lemma 46*

$$\begin{aligned} D^2\Psi(F).(H,H) = {} & \langle -2(F^TF)^{-1}, H^TH\rangle + \\ & \langle (F^TH + H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}, (F^TF)^{-1}\cdot(F^TH+H^TF)\rangle \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} D^2\Psi(F).(H,H) &= 2\langle \partial_C W(F^TF), H^TH\rangle + \\ &\quad \partial_C^2 W(F^TF).(F^TH + H^TF, F^TH + H^TF) \\ &= 2\langle -(F^TF)^{-1}, H^TH\rangle + \\ &\quad \langle (F^TH+H^TF)\cdot(F^TF)^{-1}, (F^TF)^{-1}\cdot(F^TH+H^TF)\rangle \\ &\quad \text{siehe Lineare Algebra} \\ &\geq -2\|(F^TF)^{-1}\|\cdot\|H\|^2 + \lambda_{min}^2((F^TF)^{-1})\cdot\|F^TH+H^TF\|^2 \\ &\geq -2\|F^{-1}\|^2\cdot\|H\|^2 + \frac{1}{\lambda_{max}^2(F^TF)}\cdot\|F^TH+H^TF\|^2 \\ &= -2\|F^{-1}\|^2\cdot\|H\|^2 + \frac{1}{\|F\|^4}\cdot\|F^TH+H^TF\|^2 \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} D^2(-\ln\det(F^TF)).(H,H) &= -2D^2(\ln\det F).(H,H) \\ 2\langle (F^{-1}H)^T, F^{-1}H\rangle &= D^2\Psi(F).(H,H) \\ &\geq -2\|F^{-1}\|^2\cdot\|H\|^2 + \frac{1}{\|F\|^4}\cdot\|F^TH+H^TF\|^2 \end{aligned}$$

■

Lemma 50 (2.Alternative Darstellung für $D^2(-\ln\det F).(H,H)$)
Sei $\det F \geq c^+ > 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} D^2(-\ln\det F).(H,H) &= \langle (F^{-1}H)^T, F^{-1}H\rangle \\ &= \langle F^{-T}, H\rangle^2 - \frac{2}{\det F}\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle \end{aligned}$$

Beweis. Die Formel (11.3) benutzen. ■

Lemma 51 (Abschätzung für $\|F^TH + H^TF\|^2$)
Sei $\det F \geq c^+ > 0$ *und sei* $C \in \mathbb{M}^{3\times3}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|F^TH + H^TF\|^2 &= 2\|F^TH\|^2 + 2[\langle F,H\rangle^2 - 2\det F\langle \mathrm{Adj}H, F^{-1}\rangle] \\ &= 2\|F^TH\|^2 + 2[\langle F,H\rangle^2 - 2\langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F\rangle] \\ &\geq 2\|F^TH\|^2 - 4\langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F - C + C\rangle \\ &= 2\|F^TH\|^2 - 4\langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F - C\rangle - 4\langle \mathrm{Adj}H, C\rangle \end{aligned}$$

Beweis. $\|F^TH + H^TF\|^2 = 2\|F^TH\|^2 + 2\langle (F^TH)^T, F^TH\rangle$. Wenn wir in der Formel (11.4) H durch H^T und F^{-1} durch F ersetzen, gilt $\langle (F^TH)^T, F^TH\rangle = \langle F^T, H^T\rangle^2 - 2\det F\langle \mathrm{Adj}H^T, F^{-T}\rangle$. ■

11.7 Singularität und Konvexität

Bemerkung 32 (Singularität für $\det F \to 0$ und Konvexität)
Sei $\Psi(F) : \Psi(F) \to \infty$ *für* $\det F \to 0$ *Wir wählen* $F_1, F_2 \in \mathbb{M}^{3\times3}$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist $\det F_1 = \det F_2 = 1$ *und für* $\lambda = \frac{1}{2} + \epsilon$ *gilt*

$$\begin{aligned} \det(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - (1-\lambda) & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & \lambda - (1-\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda - (1-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (2\lambda - 1)^2 = 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

Die Konvexitätsbedingung für Ψ *ist dann auf jeden Fall verletzt, wenn* $\epsilon \to 0$. *Das heisst, ein Potential* Ψ *mit einer Singularität wie eben angenommen, kann nicht konvex auf* $\mathbb{M}^{3\times3}$ *sein.*

Lemma 52 ($exp : \mathbb{S}ym(3) \mapsto P\mathbb{S}ym(3)$ ist ein Homöomorphismus)
Sei $A \in \mathbb{S}ym(3)$, dann existiert $exp(A) \in P\mathbb{S}ym$ und ist stetig und die Umkehrfunktion $\ln : P\mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{S}ym(3)$ existiert und ist stetig.

Beweis. Verweis .[HN91], Seite 19. ■

Lemma 53 ($D(exp(X)) : \mathbb{S}ym(3) \mapsto L(\mathbb{S}ym(3), P\mathbb{S}ym(3))$ ist bijektiv)
Die Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion $exp(X)$ ist bijektiv auf $L(\mathbb{S}ym(3), Lin(P\mathbb{S}ym(3)))$.

Beweis. Verweis [HN91], Seite 208, Kor. 2.26 ■

Korollar 18 ($exp : \mathbb{S}ym(3) \mapsto P\mathbb{S}ym(3)$ ist ein Diffeomorphismus.)

Beweis. Mit dem Satz über die Inverse Funktion schließen wir aus der Bijektivität von $D(exp(C))$ auf die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion $\ln C$. ■

Lemma 54 (Ableitung von skalarwertigen isotropen Tensorfunktionen)
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ eine isotrope skalarwertige Tensorfunktion. Dann ist die Ableitung $D\Psi : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times3}$ eine isotrope tensorwertige Funktion.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Psi(F+H) &= \Psi(F) + D\Psi(F).H + \ldots \\
&= \Psi(F) + \langle D\Psi(F), H\rangle + \ldots \\
&\text{wegen der Isotropie von } \Psi \text{ gilt aber für alle } Q \in O(3) \\
\Psi(F+H) &= \Psi(Q^T(F+H)Q) \\
&= \Psi(Q^T F Q + Q^T H Q) \\
&= \Psi(Q^T F Q) + D\Psi(Q^T F Q).(Q^T H Q) + \ldots \\
&= \Psi(F) + \langle Q D\Psi(Q^T F Q) Q^T, H\rangle + \ldots
\end{aligned}$$

also für alle $H \in \mathbb{M}^{3\times3}$

$$\begin{aligned}
\langle D\Psi(F), H\rangle &= \langle Q D\Psi(Q^T F Q) Q^T, H\rangle \\
Q^T D\Psi(F) Q &= D\Psi(Q^T F Q)
\end{aligned}$$

■

11.8 Kettenregel und Sansours Formel

Lemma 55 (Sansours Formel)
Sei $A \in \mathbb{S}ym(3)$ und sei $\Psi : \mathbb{S}ym(3) \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare isotrope skalarwertige Funktion. Wir setzen $W(A) = \Psi(exp(A))$ Dann gilt die Kettenregel in folgender Form:

1.
$$\begin{aligned} D_A\left[\Psi(exp(A))\right] &= exp(A) \cdot D\Psi(exp(A)) \\ D_A W(A) &= D\Psi(exp(A)) \cdot exp(A) \end{aligned}$$

2.
$$D\Psi(C) = DW(\ln C) \cdot C^{-1}$$

Beweis. Siehe auch [SK96]. Wir entwickeln zuerst die Matrix-Exponentialfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned} exp(X+H) &= \mathbb{1} + (X+H) + \frac{1}{2}(X+H)^2 + \frac{1}{6}(X+H)^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} + (X+H) + \frac{1}{2}(X^2 + XH + HX + H^2) + \\ &\quad \frac{1}{6}(X^3 + XHX + HXX + H^2X + X^2H + XH^2 + HXH + H^3) + \dots \\ &= \mathbb{1} + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \dots + \\ &\quad\quad H + \frac{1}{2}(XH + HX) + \frac{1}{6}(XXH + XHX + HXX) \\ &= exp(X) + \\ &\quad\quad \underbrace{H + \frac{1}{2}(XH + HX) + \frac{1}{6}(XXH + XHX + HXX) + \dots}_{D(exp(X)).H} \end{aligned}$$

Damit setzen wir die Entwicklung von $\Psi(exp(A))$ an

$$\begin{aligned} \Psi(exp(A+H)) &= \Psi(exp(A) + D(exp(A)).H + \dots) \\ &= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), D(exp(A)).H\rangle + \dots \\ &= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), H + \frac{1}{2}(AH + HA)\rangle + \\ &\quad \langle D\Psi(exp(A)), \frac{1}{6}(AAH + AHA + HAA) + \dots\rangle + \dots \\ &= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), H\rangle + \frac{1}{2}\langle D\Psi(exp(A)), AH + HA\rangle + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}\langle D\Psi(exp(A)), AAH + AHA + HAA\rangle + \dots$$
$$= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), H\rangle +$$
$$\frac{1}{2}\left[\langle A^T D\Psi(exp(A)), H\rangle + \langle D\Psi(exp(A))A^T, H\rangle\right] +$$
$$\frac{1}{6}\left[\langle A^T A^T D\Psi(exp(A)), H\rangle + \langle A^T D\Psi(exp(A))A^T, H\rangle\right] +$$
$$\frac{1}{6}\langle D\Psi(exp(A))A^T A^T, H\rangle + \dots$$

weil $A = A^T$, folgt

$$= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), H\rangle +$$
$$\frac{1}{2}[\langle AD\Psi(exp(A)), H\rangle + \langle D\Psi(exp(A))A, H\rangle] +$$
$$\frac{1}{6}[\langle AAD\Psi(exp(A)), H\rangle + \langle AD\Psi(exp(A))A, H\rangle] +$$
$$\frac{1}{6}\langle D\Psi(exp(A))AA, H\rangle + \dots$$

und weil $D\Psi$ eine isotrope tensorwertige Funktion ist und $exp(A)$ ebenso isotrop ist, ist $D\Psi(exp(A))$ eine isotrope tensorwertige Funktion und deshalb gilt

$$D\Psi(exp(A)) \cdot A = A \cdot D\Psi(exp(A))$$

woraus also folgt

$$\Psi(exp(A+H)) = \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)), H\rangle + \langle D\Psi(exp(A))A, H\rangle +$$
$$\frac{1}{2}\left[\langle D\Psi(exp(A))A^2, H\rangle + \dots\right]$$
$$= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)) \cdot [\mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots], H\rangle$$
$$= \Psi(exp(A)) + \langle D\Psi(exp(A)) \cdot exp(A), H\rangle$$

und weil Ψ selbst isotrop ist, vertauscht $D\Psi(exp(A))$ mit $\exp(A)$

$$= \Psi(exp(A)) + \langle exp(A) \cdot D\Psi(exp(A)), H\rangle$$

aber gleichzeitig gilt doch

$$\Psi(exp(A+H)) = \Psi(exp(A)) + \langle D_A\Psi(exp(A)), H\rangle + \dots$$

also gilt $\forall H \in \mathbb{S}ym(3)$

$$\langle D_A\Psi(exp(A)), H\rangle = \langle exp(A) \cdot D\Psi(exp(A)), H\rangle$$
$$\langle D_A W(A), H\rangle = \langle exp(A) \cdot D\Psi(exp(A)), H\rangle$$

Wenn wir $A = \ln C$ setzen, ergibt sich der andere Teil. ■

11.9 Taylorentwicklung von $||AdjF||^2$

Lemma 56 (Taylorentwicklung von $\|\mathrm{Adj}F\|^2$)
Es gilt die folgende Entwicklung für $\|\mathrm{Adj}F\|^2$.

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Adj}(F+H)\|^2 = \|\mathrm{Adj}F\|^2 + 2\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \\ 2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2 + \\ 2\langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}H\rangle + \|\mathrm{Adj}H\|^2\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Adj}(F+H)\|^2 &= \langle \mathrm{Adj}(F+H), \mathrm{Adj}(F+H)\rangle \\ &= \langle \mathrm{Adj}F + D(\mathrm{Adj}F).H + \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F + D(\mathrm{Adj}F).H + \mathrm{Adj}H\rangle \\ &= \langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}F\rangle + \langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \\ &\langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}F\rangle + \langle D(\mathrm{Adj}F).H, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}H\rangle + \\ &+ \langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F\rangle + \langle \mathrm{Adj}H, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}H\rangle \\ \\ &= \|\mathrm{Adj}F\|^2 + 2\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \\ &2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \langle D(\mathrm{Adj}F).H, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \\ &2\langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}H\rangle + \|\mathrm{Adj}H\|^2 \\ \|\mathrm{Adj}(F+H)\|^2 &= \|\mathrm{Adj}F\|^2 + 2\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \\ &2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2 + \\ &2\langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}H\rangle + \|\mathrm{Adj}H\|^2\end{aligned}$$

■

Hieraus ersehen wir, dass gilt:

$$\begin{aligned}D(\|\mathrm{Adj}F\|^2).H &= 2\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle \\ D^2(\|\mathrm{Adj}F\|^2).(H,H) &= 2\{2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2\} \\ D^3(\|\mathrm{Adj}F\|^2).(H,H,H) &= 6\{2\langle D(\mathrm{Adj}F).H, \mathrm{Adj}H\rangle\} \\ D^4(\|\mathrm{Adj}F\|^2).(H,H,H,H) &= 24\|\mathrm{Adj}H\|^2\end{aligned}$$

Wobei wir in Erinnerung rufen, dass ja

$$D(\mathrm{Adj}F).H = \mathrm{Adj}F\langle F^{-T}, H\rangle - (\mathrm{Adj}F)HF^{-1}$$

■

Weil aber mit der Kettenregel und Produktregel angewendet auf $D(\|\mathrm{Adj}F\|^2).H$ genauso gelten muss

$$D^2(\|\mathrm{Adj}F\|^2).(H,H) = 2\langle \mathrm{Adj}F, D^2(\mathrm{Adj}F).(H,H)\rangle + 2\|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2$$

folgt $D^2(\mathrm{Adj}F).(H,H) = 2\mathrm{Adj}H$. Nach längerer Rechnung ergibt sich durch differenzieren der ersten Ableitung aber:

$$\begin{aligned}
D^2(\mathrm{Adj}F).(H,H) &= \mathrm{Adj}F\langle F^{-T},H\rangle^2 - 2\mathrm{Adj}F\cdot HF^{-1}\langle F^{-T},H\rangle - \\
&\quad \mathrm{Adj}F\langle F^{-T}H^TF^{-T},H\rangle + 2\mathrm{Adj}F\cdot HF^{-1}HF^{-1} \\
&= \mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T},H\rangle^2 1\!\!1 - 2HF^{-1}\langle F^{-T},H\rangle - \\
&\quad \langle F^{-T}H^TF^{-T},H\rangle 1\!\!1 + 2HF^{-1}HF^{-1}\}
\end{aligned}$$

Das heisst aber, dass $\forall F \in Gl(3,\mathbb{R}),\ H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Adj}H \equiv &\mathrm{Adj}F\{\langle F^{-T},H\rangle^2 1\!\!1 - 2HF^{-1}\langle F^{-T},H\rangle - \\
&\langle F^{-T}H^TF^{-T},H\rangle 1\!\!1 + 2HF^{-1}HF^{-1}\}
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Wenn wir in (11.6) $F = 1$ setzen und die Spur bilden, ergibt sich gerade (11.4).

11.10 Taylorentwicklung von $(detF)^2$

Lemma 57 (Taylorentwicklung von $(\det F)^2$ im Falle $n = 3$.)
Es gilt die folgende Entwicklung für $(\det F)^2$ im Falle $n = 3$.

$$\begin{aligned}
(\det(F+H))^2 = (\det F)^2 &+ 2\det F\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \\
&2\det F\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle^2 + \\
&2\det F\det H + 2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \\
&2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\det H + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle^2 + \\
&2\det H\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \quad (\det H)^2
\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt ja

$$\begin{aligned}
(\det(F+H))^2 &= (\det F + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \det H)^2 \\
&= (\det F)^2 + \det F\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \det F\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \\
&\quad \det F\det H + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\det F + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \\
&\quad \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\det H + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle\det F + \\
&\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle\det H + \\
&\quad \det H\det F + \det H\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \det H\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + (\det H)^2 \\
(\det(F+H))^2 &= (\det F)^2 + 2\det F\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle + \\
&\quad 2\det F\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle^2 + \\
&\quad 2\det F\det H + 2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \\
&\quad 2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\det H + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle^2 + \\
&\quad 2\det H\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + \quad (\det H)^2
\end{aligned}$$

■

Daraus erhellt, dass

$$\begin{aligned}
D((\det F)^2).H &= 2\det F\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle \\
D^2((\det F)^2).(H,H) &= 4\det F\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle + 2\cdot\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle^2 \\
D^3((\det F)^2).(H,H,H) &= 3!\,\{2\det F\det H + 2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle\} \\
D^4((\det F)^2).(H,H,H,H) &= 4!\,\{2\langle H,\mathrm{Adj}F^T\rangle\det H + \langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle^2\} \\
D^5((\det F)^2).(H,H,H,H,H) &= 5!\,2\det H\langle \mathrm{Adj}H,F^T\rangle \\
D^6((\det F)^2).(H,H,H,H,H,H) &= 6!\quad(\det H)^2
\end{aligned}$$

■

Lemma 58
Sei $\Psi : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben. Es sei $\Phi(F) = \Psi(A\cdot F)$ mit einer festen, konstanten Matrix A. Dann gilt:

$$\forall\, j\in\mathbb{N}:\quad D^j\Phi(F).\underbrace{(H,\dots,H)}_{j} = D^j\Psi(AF).\underbrace{(AH,\dots,AH)}_{j}$$

Beweis. Induktion über $j \in \mathbb{N}$ und Ableitungen von A nach F verschwinden ja identisch. ■

Folgerung 8

$$D^k(\|AF\|^k).\underbrace{(H,\dots,H)}_{k} = k!\,\|AH\|^k$$

Kapitel 12

Konvexität und Elliptizität

12.1 Eigenschaften des Elastizitätstensors: Konvexität und Polykonvexität

Sei $W \in C^2(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{R})$ eine skalarwertige Funktion. Seien $F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$. Wir listen nachfolgend die verschiedenen Benennungen für Eigenschaften der 2.Ableitung von W auf. Man nennt D^2W **Elastizitätstensor** oder **Steifigkeitsmatrix**. Wir nennen W in $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$

1. gleichmäßig positiv oder stabil, wenn $\quad D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$.

2. strikt Legendre elliptisch, falls $\quad D^2W(F).(H,H) > 0 \quad \forall H \neq 0$.

3. strikt konvex, falls
   $W(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) < \lambda \cdot W(F_1) + (1-\lambda) \cdot W(F_2) \quad \lambda \in (0,1)$.

4. Legendre elliptisch, falls $D^2W(F).(H,H) \geq 0$.

5. konvex, falls $W(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) \leq \lambda \cdot W(F_1) + (1-\lambda) \cdot W(F_2) \quad \lambda \in (0,1)$.

6. strikt gleichmäßig Korn elliptisch, falls $\quad D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H^T + H\|^2$.

7. strikt Korn elliptisch, falls $D^2W(F).(H,H) > 0 \quad \forall H : \quad H^T + H \neq 0$.

8. gleichmäßig Korn elliptisch, falls $\quad D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|F^T H + H^T F\|^2$.

9. polykonvex, falls es eine konvexe Funktion $P : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gibt, so dass $W(F) = P(F, \mathrm{Adj}F, \det F)$ ist.

10. strikt polykonvex, falls W polykonvex ist und P strikt konvex ist.

11. quasikonvex, falls für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ alle $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$W(F) \cdot |\Omega| = \int_\Omega W(F)\, dx \leq \int_\Omega W(F + Dv(x))\, dx$$
das heisst, $u(x) = F \cdot x + c$ ist Minimizer zu seinen eigenen Randbedingungen.

12. gleichmäßig strikt quasikonvex, falls für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ alle $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega W(F) + c^+ \cdot \|Dv\|^2\, dx \leq \int_\Omega W(F + Dv(x))\, dx$$
.

13. strikt rank-one konvex, falls die Funktion $f(t) := W(F + t \cdot (\eta \otimes \xi))$ strikt konvex in t ist.

14. rank-one konvex, falls die Funktion $f(t) := W(F + t \cdot (\eta \otimes \xi))$ für alle $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ konvex in t ist.

15. gleichmäßig elliptisch, falls $D^2W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) \geq c^+ \cdot \|\eta \otimes \xi\|^2$.

16. gleichmäßig Legendre-Hadamard elliptisch, falls $D^2W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) \geq c^+ \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$.

17. $D^2W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) > 0 \quad \forall \quad \eta, \xi \neq 0$.

18. streng elliptisch, falls $\langle \xi, M(\eta).\xi \rangle > 0 \quad \forall \quad \eta, \xi \neq 0$, wobei
$$\langle \xi, M(\eta).\xi \rangle := D^2W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi)$$
M nennt man auch den Akustik-Tensor und mit dieser Setzung ist M symmetrisch.

19. elliptisch, falls $\quad \det M(\eta) \neq 0 \quad \forall \eta \neq 0$

20. Legendre-Hadamard elliptisch, falls $\quad D^2W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) \geq 0$.

Es gilt

1. (1)$\Leftrightarrow$(2)
Beweis. (1)$\Rightarrow$(2) ist klar. Es gelte (2). Dann ist
$$\forall H \neq 0 \quad D^2W(F).(\frac{H}{\|H\|}, \frac{H}{\|H\|}) > 0$$

aber die Normeinheitskugel auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$ ist kompakt und weil $D^2W(F).(H,H)$ stetig ist, wird das Minimum angenommen, sagen wir in $\hat{H}$, also

$$D^2W(F).(\frac{H}{\|H\|},\frac{H}{\|H\|}) \geq D^2W(F).(\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|},\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|})$$

$$\frac{1}{\|H\|^2}\cdot D^2W(F).(H,H) \geq D^2W(F).(\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|},\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|})$$

setze $c^+ = D^2W(F).(\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|},\frac{\hat{H}}{\|\hat{H}\|})$, dann folgt

$$D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$$

Alternativ geben wir ein Widerspruchsargument an, welches leicht modifiziert auch in speziellen unendlichdimensionalen Fällen greift: Sei $\|H_n\| = 1$ eine Folge, für die $D^2W(F).(H_n,H_n) \to 0$. Weil die Normeinheitskugel kompakt ist, gibt es eine Teilfolge H_{n_j} die gegen ein $\hat{H}$ konvergiert. Da $D^2W(F).(H,H)$ stetig in H ist, muss gelten $D^2W(F).(\hat{H},\hat{H}) = 0$. Aber $\|\hat{H}\| = 1$ im Widerspruch zur Annahme, dass $D^2W(F).(H,H) > 0 \ \forall\ H \neq 0$. ■

2. (1)$\Rightarrow$ (3)
   Beweis. Weil W glatt ist, klar. ■

3. (3)$\not\Rightarrow$ (1)
   Beweis. $W(F) = \|F\|^4$ ist strikt konvex, aber
   $D^2W(F).(H,H) = 8\langle F,H\rangle^2 + 4\|F\|^2\cdot\|H\|^2$ ist in $F = 0$ nicht glm. positiv. ■

4. (1)$\Rightarrow$ (6)
   Beweis. $\|H^T + H\|^2 \leq 4\cdot\|H\|^2$. ■

5. (3)$\Rightarrow$ (4)
   Beweis. klar. ■

6. (4) $\Leftrightarrow$ (5)
   Beweis. Wiederum die Differenzierbarkeit von W. ■

7. (6)$\Leftrightarrow$ (7)
   Beweis. Kompaktheitsschluss wie oben. ■

8. (6)$\Rightarrow$ (4)
   Beweis. klar. ■

9. (3)$\not\Rightarrow$ (6)
   Beweis. Wieder die Funktion $W(F) = \|F\|^4$ betrachten. ■

10. (6)$\Rightarrow$(15)
    Beweis. Einsetzen und Eigenschaften des Tensorprodukts ausnutzen. ■

11. (8)$\not\Rightarrow$(6)
    Beweis. Es gibt $F, H \neq 0$ mit $F^T H = 0$. ■

12. (8)$\Rightarrow$(16) ,wenn $\lambda_{min}(F^T F) > 0$. Genauer gilt dann

$$D^2 W(F).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) \geq 2c^+ \cdot \lambda_{min}(F^T F) \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$$

    Beweis. Einsetzen und Eigenschaften des Tensorprodukts sowie des Skalarprodukts ausnutzen. ■

13. (9)$\Rightarrow$(11)
    Beweis. Verweis [Dac89]. ■

14. (9)$\Rightarrow$(14)
    Beweis. Sei W polykonvex. Wir setzen $f(t) = W(F + t(\eta \otimes \xi))$ und überprüfen die Konvexität von f direkt. Sei $\lambda \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= W(F + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]\,(\eta \otimes \xi)) \\ &= P(F + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]\,(\eta \otimes \xi), \\ &\quad \mathrm{Adj}(F + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]\,(\eta \otimes \xi)), \\ &\quad \det(F + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]\,(\eta \otimes \xi))) \end{aligned}$$

    mit der Entwicklungsformel für Determinante und Adjunkte gilt daher

$$\begin{aligned} f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = P(&\lambda[F + t_1\,(\eta \otimes \xi)] + (1-\lambda)[F + t_2\,(\eta \otimes \xi)], \\ &\lambda[\mathrm{Adj}(F + t_1\,(\eta \otimes \xi))] + (1-\lambda)[\mathrm{Adj}(F + t_2\,(\eta \otimes \xi))], \\ &\lambda[\det(F + t_1\,(\eta \otimes \xi))] + (1-\lambda)[\det(F + t_2\,(\eta \otimes \xi))]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq\ & \lambda\, P(F + t_1\ (\eta \otimes \xi), \\
& \qquad \mathrm{Adj}(F + t_1\ (\eta \otimes \xi)), \\
& \qquad \det(F + t_1\ (\eta \otimes \xi))) \\
& +(1-\lambda) P(F + t_2\ (\eta \otimes \xi), \\
& \qquad \mathrm{Adj}(F + t_2\ (\eta \otimes \xi)), \\
& \qquad \det(F + t_2\ (\eta \otimes \xi))) \\
=\ & \lambda\ f(t_1) + (1-\lambda)\ f(t_2)
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

15. (11)$\not\Rightarrow$(9)
Beweis. [Dac89]. ■

16. (11)$\Rightarrow$(14)
Beweis. [Dac89]. ■

17. (14)$\not\Rightarrow$(11)
Beweis. [Dac89]. ■

18. (14)$\Rightarrow$(20)
Beweis. Die Funktion f zweimal nach t differenzieren. ■

19. (16)$\Rightarrow$(19)
Beweis. klar. ■

20. (15)$\Leftrightarrow$(16)$\Leftrightarrow$(17) $\Leftrightarrow$(18)
Beweis. Einerseits Eigenschaften des Tensorprodukts ausnutzen, andererseits einen Kompaktheitsschluss wie oben verwenden.

21. (16)$\not\Rightarrow$(4)
Beweis. Setze $W(F) = \epsilon \cdot \|F\|^2 + \det F$, dann ist $D^2W(F).(H,H) = 2\epsilon\|H\|^2 + 2\langle \mathrm{Adj} H, F^T\rangle$ und $D^2W(F).(H,H)$ ist strikt Legendre-Hadamard elliptisch. Wir wählen $F = -\mu \mathbb{1}$ und $H = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\frac{1}{2} \leq \lambda_i \leq 1$.

Daher folgt:

$$\begin{aligned} D^2W(F).(H,H) &= 2\epsilon(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) - 2\mu(\lambda_3\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_1) \\ &\leq 2\epsilon\cdot 3 - 2\mu\cdot\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Für $\mu > 4\epsilon$ ist dann aber $D^2W(F).(H,H) < 0$. ■

22. (16)$\not\Rightarrow$(1)(4)(6)(8)(10)(11) (12) ■

23. (19)$\not\Rightarrow$(20)
    Beweis. Sei $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ mit $\det A \neq 0$. Setze $W(F) = \langle F, A\cdot F\rangle$, dann ist $D^2W(F).(H,H) = 2\langle H, A\cdot H\rangle$ und $\langle \xi, M(\eta).\xi\rangle = \langle \eta\otimes\xi, A.(\eta\otimes\xi)\rangle = \langle \eta\otimes\xi, A.\eta\otimes\xi)\rangle$, wähle $A.\eta = -\eta$. ■

24. (16)$\Leftrightarrow$(13)
    Beweis. Wiederum f zweimal differenzieren. ■

25. (13)$\not\Rightarrow$(16)
    Beweis. betrachte $f(t) = \|F + t\cdot(\eta\otimes\xi)\|^4$. ■

Bis auf die Quasikonvexität sind alle genannten Eigenschaften punktweise Bedingungen und können daher auch nur in einer starken Topologie für $F(x)$ erfüllt werden, zum Beispiel L^∞.

Bemerkung 33 (Elliptizität für Differentialoperatoren in Div-Form) *Sei $F = \nabla u(x) \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $A : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir sagen, dass PDE-System*

$$\begin{aligned} div A(\nabla u) &= f \\ u_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

ist elliptisch, wenn $B(F).(H,H) := \langle H, DA(F).H\rangle$ anstelle von $D^2W(F).(H,H)$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiel 10 (Elliptizität von $div\ \nabla u^T \nabla u = 0$)
Hier ist $A(F) = F^T F$ und damit $DA(F).H = F^T H + H^T F$, also $B(F).(H,H) := \langle H, DA(F).H\rangle = \langle H, F^T H + H^T F\rangle$. Es ist

$$\begin{aligned} B(F).(H,H) &= \langle H, F^T H + H^T F\rangle \\ &= \langle (F^T - 1\!\!1)H, H\rangle + \langle H,H\rangle + \langle H^T(F - 1\!\!1), H\rangle + \langle H^T, H\rangle \\ &\geq -2\|F - 1\!\!1\| \cdot \|H\|^2 + \|H\|^2 + \langle H^T, H\rangle \\ &\text{für } H = \eta \otimes \xi \text{ gilt} \end{aligned}$$

$$B(F).(\eta\otimes\xi, \eta\otimes\xi) \geq (1 - 2\|F - 1\!\!1\|) \cdot \|\eta\|_{\mathbb{R}^3}{}^2 \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}{}^2$$

Also ist A elliptisch, solange die punktweise Bedingung $(1 - 2\|\nabla u(x) - 1\!\!1\|) > 0$ erfüllt ist.

Lemma 59 (Pseudopotential und Integrabilitätsbedingung)
Sei $A \in C^1(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. Es sind äquivalent

1. $\exists\, W \in C^2(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{R}) : \quad DW(F) = A(F)$
2. $\forall\, F, H, \hat{H} \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad \langle DA(F).H, \hat{H}\rangle = \langle DA(F).\hat{H}, H\rangle$ *Integrabilitätsbedingung*

Beweis. Die eine Richtung ist gerade der Satz von Schwarz. Für die andere Richtung betrachten wir das sogenannte **Pseudopotential**

$$W(F) := \int_0^1 \langle A(tF), F\rangle\ dt$$

welches so auf $\mathbb{M}^{3\times 3}$ wohldefiniert ist.
Sei $H \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist

$$\begin{aligned} DW(F).H &= \int_0^1 \langle F, DA(tF).(tH)\rangle + \langle H, A(tF)\rangle\ dt \\ &= \int_0^1 \langle \frac{d}{dt}\,[t\ A(tF)], H\rangle - t\,\langle DA(tF).F, H\rangle + \langle F, DA(tF).(tH)\rangle\ dt \\ &= \int_0^1 \langle \frac{d}{dt}\,[t\ A(tF)], H\rangle\ dt \\ &= \langle [1\ A(F)], H\rangle - \langle [0\ A(0F)], H\rangle \\ &= \langle A(F), H\rangle \end{aligned}$$

und weil H beliebig war, gilt $DW(F) = A(F)$. ■

Folgerung 9
Für eine Funktion $A(F) = F^T F$ gibt es kein Potential, denn es ist $\langle \hat{H}, DA(F).H\rangle = \langle \hat{H}, F^T H + H^T F\rangle \neq \langle H, F^T \hat{H} + \hat{H}^T F\rangle$

12.2 Invarianzeigenschaften

Lemma 60 (Invarianz der Konvexität)
Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist $W(F) := \hat{W}(A \cdot F)$ bzw. $W(F) := \hat{W}(F \cdot A)$ ebenfalls konvex.

Beweis. Konvexitätsbedingung für W direkt nachrechnen und Linearität von $F \mapsto A \cdot F$ ausnutzen. ∎

Lemma 61 (Invarianz der strikten Konvexität)
Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion und $A \in Gl(3, \mathbb{R})$. Dann ist $W(F) := \hat{W}(A \cdot F)$ bzw. $W(F) := \hat{W}(F \cdot A)$ ebenfalls strikt konvex.

Beweis. Wegen $A \in Gl(3, \mathbb{R})$ ist $F_1 A \neq F_2 A$ wenn $F_1 \neq F_2$. Für $0 < \lambda < 1$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
W(\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2) &= \hat{W}((\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2) A) \\
&= \hat{W}(\lambda F_1 A + (1-\lambda) F_2 A) \\
&< \lambda \hat{W}(\lambda F_1 A) + (1-\lambda) \hat{W}(F_2 A) \\
&= \lambda W(F_1) + (1-\lambda) W(F_2)
\end{aligned}$$

∎

Lemma 62 (Invarianz der strikten Elliptizität)
Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine strikt elliptische Funktion und $A \in Gl(3, \mathbb{R})$.Dann ist $W(F) := \hat{W}(A \cdot F)$ bzw. $W(F) := \hat{W}(F \cdot A)$ ebenfalls strikt elliptisch.

Beweis. Es gilt ja $D^2 W(F).(H, H) = D^2 \hat{W}(AF).(AH, AH)$. Wir setzen für $H = \xi \otimes \eta$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
D^2 W(F).(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta) &= D^2 \hat{W}(AF).(A(\xi \otimes \eta), A(\xi \otimes \eta)) \\
&= D^2 \hat{W}(AF).(A.\xi \otimes \eta, A.\xi \otimes \eta) \\
&\geq c^+ \, \|A.\xi\|^2 \, \|\eta\|^2 \\
&\geq c^+ \, \lambda_{min}(A^T A) \, \|\xi\|^2 \, \|\eta\|^2 \\
&= \hat{c}^+ \, \|\xi\|^2 \, \|\eta\|^2
\end{aligned}$$

∎

Lemma 63 (Invarianz der Stabilität)
Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ stabil und $A \in Gl(3, \mathbb{R})$. Dann ist $W(F) := \hat{W}(A \cdot F)$ bzw. $W(F) := \hat{W}(F \cdot A)$ ebenfalls stabil.

Beweis. Es gilt ja $D^2W(F).(H,H) = D^2\hat{W}(AF).(AH,AH) \geq c^+ \cdot \|AH\|^2$ Also $D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \lambda_{min}(A^TA)\|H\|^2$. ■

12.3 Polykonvexität

Lemma 64 (Invarianz der Polykonvexität)
Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine polykonvexe Funktion und $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$. Dann ist $W(F) := \hat{W}(A \cdot F)$ bzw. $W(F) := \hat{W}(F \cdot A)$ ebenfalls polykonvex.

Beweis. Sei $\hat{P} : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}$ konvex, d.h für $\lambda \in (0,1)$ und beliebige $(X_1, Y_1, z_1), (X_2, Y_2, z_2) \in \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}$ gilt:

$$\hat{P}\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \leq \lambda \cdot \hat{P}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + (1-\lambda) \cdot \hat{P}\left(\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \tag{12.1}$$

Sei $T : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}$

$$T(F) = (F, \mathrm{Adj}F, \det F)$$

Dann ist doch

$$\begin{aligned} T(A \cdot F) &= (A \cdot F, \mathrm{Adj}(A \cdot F), \det(A \cdot F)) \\ &= (A \cdot F, \mathrm{Adj}F \cdot \mathrm{Adj}A, \det A \cdot \det F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}(F) &= \hat{P}(T(F)) \\ W(F) &= \hat{W}(A \cdot F) = \hat{P}(T(A \cdot F)) \\ &= \hat{P}(A \cdot F, \mathrm{Adj}F \cdot \mathrm{Adj}A, \det A \cdot \det F) \end{aligned}$$

Wir definieren

$$P\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \hat{P}\left(\begin{pmatrix} A \cdot X_1 \\ Y_1 \cdot \mathrm{Adj}A \\ \det A \cdot z_1 \end{pmatrix}\right)$$

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass dieses P selbst wieder konvex ist. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} &P\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \\ &\qquad \hat{P}\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} A \cdot X_1 \\ \mathrm{Adj}A \cdot Y_1 \\ \det A \cdot z_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} A \cdot X_2 \\ \mathrm{Adj}A \cdot Y_2 \\ \det A \cdot z_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Konvexität von $\hat{P}$ mit den Argumenten $(A\cdot X_1, \mathrm{Adj}A\cdot Y_1, \det A\cdot z_1), (A\cdot X_2, \mathrm{Adj}A\cdot Y_2, \det A\cdot z_2)$ liefert nun aber

$$\le \lambda\cdot\hat{P}\left(\begin{pmatrix} A\cdot X_1\\ \mathrm{Adj}A\cdot Y_1\\ \det A\cdot z_1\end{pmatrix}\right) + (1-\lambda)\cdot\hat{P}\left(\begin{pmatrix} A\cdot X_2\\ \mathrm{Adj}A\cdot Y_2\\ \det A\cdot z_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= \lambda P\left(\begin{pmatrix} X_1\\ Y_1\\ z_1\end{pmatrix}\right) + (1-\lambda)\cdot P\left(\begin{pmatrix} X_2\\ Y_2\\ z_2\end{pmatrix}\right)$$

Also ist $W(F)$ polykonvex, weil $W(F) = P(T(F))$ und P konvex ist. Genauso zeigt man die Polykonvexität von $W(F) = \hat{W}(F\cdot A)$ ■

Korollar 19 (Invarianz der Polykonvexität unter $F\mapsto A\cdot F\cdot B$)
Seien $A,B\in\mathbb{M}^{3\times3}$. Sei $\hat{W}(F)$ polykonvex. Dann ist $W(F) := \hat{W}(A\cdot F\cdot B)$ polykonvex in F.

Beweis. Vorheriges Lemma erst von links, dann von rechts anwenden. ■

Korollar 20 (Inhomogene Invarianz der Polykonvexität)
Sei $\hat{W}:\Omega\times\mathbb{M}^{3\times3}\mapsto\mathbb{R}$ eine polykonvexe Funktion, das heisst für festgehaltenes $x_0\in\Omega$ ist $\hat{W}(x_0,\cdot)$ polykonvex. Und sei $A(x)\in\mathbb{M}^{3\times3}$. Dann ist $W(x,F) := \hat{W}(x, A(x)\cdot F)$ bzw. $W(x,F) := \hat{W}(x, F\cdot A(x))$ ebenfalls polykonvex.

Beweis. Für festgehaltenes $x_0\in\Omega$ die obigen Schlüsse für $W(x_0,F)$ führen. Die Matrix $A(x)$ ändert dann nur die Art der Inhomogenität. ■

Korollar 21 (Invarianz der strikten Polykonvexität)
Sei $\hat{W}:\Omega\times\mathbb{M}^{3\times3}\mapsto\mathbb{R}$ eine strikt polykonvexe Funktion und sei $A(x)\in Gl(3,\mathbb{R})$. Dann ist $W(x,F) := \hat{W}(x, A(x)\cdot F)$ bzw. $W(x,F) := \hat{W}(x, F\cdot A(x))$ ebenfalls strikt polykonvex.

Folgerung 10
Sei $F = F_e\cdot F_p$ mit $\det F_p = 1$. Dann ist die Funktion

$$W(x,F) := \hat{W}(F_e)$$

schon strikt polykonvex, wenn nur $\hat{W}:\mathbb{M}^{3\times3}\mapsto\mathbb{R}$ selbst strikt polykonvex ist. Also genügt es, eine strikt polykonvexe Funktion auf F_e zu definieren.

Bemerkung 34
Genauso zeigt man dieselbe Invarianzeigenschaft bzgl. der Unterhalbstetigkeit.

Lemma 65 (Additive polykonvexe Funktionen)
Seien $P_1, P_2 : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ und $P_3 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jeweils konvex. Dann ist

$$\begin{aligned} &P : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ &P(X,Y,z) := P_1(X) + P_2(Y) + P_3(z) \end{aligned}$$

konvex.

Beweis. Direkt die Konvexitätsbedingung überprüfen. ■

Korollar 22
Funktionen der Art $W(F) = P_1(F) + P_2(\mathrm{Adj}F) + P_3(\det F)$ mit P_i konvex, sind polykonvex.

Beweis. Simple Folgerung. ■

Lemma 66 (Polykonvexität für spezielle Funktionen)
Sei $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ glatt. Dann sind

$$\begin{aligned} &W_1(F) = h(\|F\|) \\ &W_2(F) = \|F\|^\alpha + h(\det F), \quad 1 \le \alpha \le 6 \end{aligned}$$

genau dann polykonvex, wenn h konvex ist.

Beweis. Im Fall W_1 siehe [Dac89]. Im Fall W_2 siehe [BM84c] ■

Beispiel 11 (Polykonvexe Funktionen)
Sei $A, F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ und $\det F \ge c^+ > 0$. Dann sind die folgenden Funktionen $H \mapsto W(H)$ polykonvex.

$$\begin{aligned} W(H) &= \langle A,H\rangle^2 \\ W(H) &= \langle \mathrm{Adj}H, A\rangle \\ W(H) &= \langle \mathrm{Adj}H, A\rangle^2 \\ W(H) &= \|\mathrm{Adj}H\|^2 \\ W(H) &= \|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2 \\ W(H) &= -\langle \mathrm{Adj}H, A\rangle \\ W(H) &= \mathrm{Adj}F \cdot \langle F^{-T}, H\rangle - \mathrm{Adj}F \cdot H \cdot F^{-1} \\ W(H) &= \langle (HF^{-1})^T, HF^{-1}\rangle \\ &= \langle F^{-T}, H\rangle^2 - \frac{2}{\det F} \cdot \langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle \\ W(H) &= \|H^TH\|^2 + \|\mathrm{Adj}(H^TH)\|^2 + \det H - \ln\det H \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W(H) &= \frac{\|H\|^2}{\det H^{\frac{2}{3}}} \\
W(H) &= \|H\|^2 + \det H \cdot \ln \det H
\end{aligned}
$$

Wir erinnern an folgendes Resultat aus der konvexen Analysis, das

Lemma 67
Sei $W : \mathbb{M}^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\forall F \in \mathbb{M}^{3\times3} \forall H \in \mathbb{M}^{3\times3} : \quad W(F+H) \geq W(F) + DW(F).H \\
\forall F \in \mathbb{M}^{3\times3} \forall E \in \mathbb{M}^{3\times3} : \quad W(E) \geq W(F) + DW(F).(E-F)
\end{aligned}
$$

Beweis. . Standard. ■

Wir folgern daraus für polykonvexe Funktionen das

Lemma 68
Sei $W : M^{3\times3} \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte polykonvexe Funktion und
$P : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die zugehörige konvexe Funktion. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\forall E, F \in \mathbb{M}^{3\times3} \\
W(E) \geq\ & W(F) + D_1 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[E-F] \\
&+ D_2 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[D(\mathrm{Adj} F).(E-F) + \mathrm{Adj}(E-F)] \\
&+ D_3 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).\left[\langle E-F, \mathrm{Adj} F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}(E-F), F^T\rangle + \det(E-F)\right]
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
W(E) &= P(E, \mathrm{Adj} E, \det E) \\
&\geq P(F, \mathrm{Adj} F, \det F) + DP(F, \mathrm{Adj} F, \det F).\left[\begin{pmatrix} E \\ \mathrm{Adj} E \\ \det E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F \\ \mathrm{Adj} F \\ \det F \end{pmatrix}\right] \\
&= W(F) + D_1 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[E-F] \\
&+ D_2 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[\mathrm{Adj} E - \mathrm{Adj} F] \\
&+ D_3 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[\det E - \det F]
\end{aligned}
$$

Wir setzen jetzt die Entwicklung für die Adjunkte und Determinante ein. Zum Beispiel ist ja $\mathrm{Adj} E = \mathrm{Adj} F + D(\mathrm{Adj} F).(E-F) + \mathrm{Adj}(E-F)$ also

$$
\begin{aligned}
W(E) \geq\ & W(F) + D_1 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[E-F] \\
&+ D_2 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).[D(\mathrm{Adj} F).(E-F) + \mathrm{Adj}(E-F)] \\
&+ D_3 P(F, \mathrm{Adj} F, \det F).\left[\langle E-F, \mathrm{Adj} F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}(E-F), F^T\rangle + \det(E-F)\right]
\end{aligned}
$$

■

Korollar 23
Für additive polykonvexe Funktionen gilt deshalb

$$\begin{aligned}
&\qquad\quad \forall E, F \in \mathbb{M}^{3\times 3}\\
W(E) &\geq W(F) + DP_1(F).[E-F]\\
&\quad + DP_2(\mathrm{Adj}F).[D(\mathrm{Adj}F).(E-F) + \mathrm{Adj}(E-F)]\\
&\quad + DP_3(\det F).\left[\langle E-F, \mathrm{Adj}F^T\rangle + \langle \mathrm{Adj}(E-F), F^T\rangle + \det(E-F)\right]
\end{aligned}$$

Korollar 24
Für strikt polykonvexe Funktionen gelten dieselben Aussagen mit $>$ statt $\geq$.

Lemma 69 (Eigenschaft der Identität)
Sei W strikt polykonvex und seien $u, \phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3,\ u(x) = x,\ \phi(x)_{\partial\Omega} = x$. Dann gilt für $F = \nabla u = \mathbb{1}$ und für alle $\nabla\phi$:

$$\begin{aligned}
W(\nabla\phi) &> W(\mathbb{1}) + \langle D_1P(\mathbb{1}, \mathbb{1}, 1), \nabla(\phi - x)\rangle\\
&\quad + \langle D_2P(\mathbb{1}, \mathbb{1}, 1), [\mathbb{1}\cdot\langle\nabla(\phi - x), \mathbb{1}\rangle - \nabla(\phi - x) + \mathrm{Adj}(\nabla(\phi - x))]\rangle\\
&\quad + D_3P(\mathbb{1}, \mathbb{1}, 1)\cdot[\langle\nabla(\phi - x), \mathbb{1}\rangle + \langle\mathrm{Adj}\nabla(\phi - x), \mathbb{1}\rangle + \det\nabla(\phi - x)]
\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich als direkte Folgerung von Lemma 68 ■

Kapitel 13

Potential-Well und Stabilität

13.1 Potential-Well

Definition 22 (Minima)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Wir sagen, dass $u \in X$ ein ***richtungsstriktes lokales Minimum*** *ist, wenn*

$$\forall\, \bar{u} : \exists \epsilon > 0 : \forall\, 0 < t \leq \epsilon(\bar{u}) : \quad I(u + t \cdot \bar{u}) > I(u)$$

Wir sagen, dass $u \in X$ ein ***strikt lokales Minimum*** *ist, wenn*

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \bar{u} : 0 < \|\bar{u} - u\|_X \leq \epsilon : \quad I(\bar{u}) > I(u)$$

Definition 23 (Potential-Well)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Wir sagen, dass $u \in int(X)$ in einem ***Potential-Well*** *liegt, wenn es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass*

$$\forall\, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\ \exists \gamma(\epsilon) > 0 : \quad \inf_{\|\bar{u} - u\|_X = \epsilon} I(\bar{u}) \geq I(u) + \gamma(\epsilon)$$

Wir sagen, dass $u \in int(X)$ in einem ***gleichmässigen Potential-Well*** *liegt, wenn es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass*

$$\forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\ \exists \gamma(\epsilon) > 0 : \quad \inf_{\|\bar{u} - u\|_X = \epsilon} I(\bar{u}) \geq I(u) + \gamma(\epsilon)$$

und $\gamma(\epsilon)$ ist eine nichtfallende Funktion von ϵ. Alternativ können wir das auch so ausdrücken:

$$\forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\ \exists \gamma(\epsilon) > 0 : \quad \inf_{\|h\|_X = 1} I(u + \epsilon h) \geq I(u) + \gamma(\epsilon)$$

Definition 24 (Energie-Kriterium)
Wir folgen hier Koiter [Koi80] und sagen, dass ein kritischer Punkt $u \in X$ von I für den

$$\forall h \in X,\ h \neq 0: \quad D^2 I(u)(h,h) > 0$$

*gilt, dem **relaxierten Energie-Kriterium** genügt.*
Richtungen $\hat{h} \in X$ für die gilt

$$D^2 I(u)(\hat{h},\hat{h}) = 0$$

*nennt man **Buckling-Modes**.*

Wie wir weiter unten sehen werden, kann man aus dem Bestehen des relaxierten Energie-Kriteriums in einem globalen Minimum im Allgemeinen nicht folgern, dass ein strikt lokales Minimum besteht, bzw. dass das Minimum im Potential-Well liegt.

Folgerung 11 (Starke Konvergenz von Minimalfolgen)
*Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Sei $u \in X$ ein globales Minimum zu I auf X und u liege in einem **Potential-Well** mit zugehörigem ϵ_0. Dann konvergiert jede Minimalfolge $u_\nu \in X$ für die gilt $\|u_\nu - u\|_X \leq \epsilon_0$ stark in der Topologie von X gegen u.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. ∎

Folgerung 12 (Starke Konvergenz und Potential-Well)
*Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Sei $u \in X$ ein globales Minimum zu I auf X und u liege in einem **Potential-Well**. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\exists \epsilon > 0 \quad \forall\, \bar{u} :\ 0 < \|\bar{u} - u\|_X \leq \epsilon \\ &I(\bar{u}) \to I(u) \Longrightarrow \|\bar{u} - u\|_X \to 0 \end{aligned}$$

Beweis. Wie oben. ∎

Lemma 70
Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige skalarwertige Funktion. Dann ist $u \in X$ ein striktes Minimum genau dann, wenn u in einem Potential-Well liegt.

Beweis. Wenn $u \in X$ im Potential-Well liegt, ist u automatisch auch ein striktes Minimum. Sei umgekehrt $u \in X$ ein strikt lokales Minimum. Da $K :=$

$\{\bar{u} \mid \|\bar{u} - u\|_X = \epsilon\}$ kompakt ist $(dim(X) < \infty)$ und I stetig ist, nimmt I sein Minimum auf K an, also gibt es ein $u = u(\epsilon) \in K$ so dass

$$\inf_{\|\bar{u}-u\|_X=\epsilon} I(\bar{u}) = \inf_{\bar{u}\in K} I(\bar{u}) \geq I(u(\epsilon))$$

Wir können $\gamma(\epsilon) = I(u(\epsilon)) - I(u)$ wählen, und weil u n. Vor. ein striktes Minimum ist, gilt $\gamma(\epsilon) > 0$. ■

Bemerkung 35
In unendlich-dimensionalen Banachräumen gilt im Allgemeinen nicht, dass ein strikt lokales Minimum $u \in X$ in einem Potential-Well liegt. Wir verweisen auf [BKM77] für ein Gegenbeispiel. Das Problem dabei sind die beteiligten Topologien.

13.2 Stabilität

In den nachfolgenden Untersuchungen behandeln wir die Frage, wie sich die Minimumeigenschaft eines kritischen Punktes auf die Stabilität auswirkt. Wir werden sehen, dass (relative) Minima prinzipiell bessere Eigenschaften haben, als Punkte, welche nur kritische Punkte sind.

Lemma 71 (Stabilität1)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und

$$\exists\, c^+ > 0; \forall\, \bar{u} \in X \forall\, h \in X \quad D^2 I(\bar{u}).(h,h) \geq c^+ \cdot \|h\|_X^2$$

Sei $u \in X$ ein kritischer Punkt, d.h dass $\forall\, h \in X : \ DI(u).h = 0$. Dann liegt u im Potential-Well.

Beweis. Mit dem Taylor'schen Satz mit Restglied und $DI(u).h = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I(\bar{u}) - I(u) &= \int_0^1 (1-s) \cdot D^2 I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)\, ds \\ &\geq \frac{1}{2} c^+ \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2 \end{aligned}$$

Korollar 25
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und $\exists\, c^+ > 0; \forall\, \bar{u} \in X \forall\, h \in X : \quad D^2 I(\bar{u}).(h,h) \geq c^+ \cdot \|h\|_X^2$ Sei $u \in X$ ein kritischer Punkt, d.h dass $\forall\, h \in X : DI(u).h = 0$. Dann gibt es ein $L > 0$ so dass für alle $\bar{u} \in X$

$$\|\bar{u} - u\|_X \leq L \cdot \sqrt{I(\bar{u}) - I(u)}$$

■

Lemma 72 (Stabilität2)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion. Sei $u \in X$ ein kritischer Punkt, d.h dass $\forall\ h \in X$: $DI(u).h = 0$. Ausserdem gelte im kritischen Punkt

$$\exists\, c^+(u)\ \forall\ h \in X : \quad D^2I(u).(h,h) \geq c^+(u) \cdot \|h\|_X^2$$

Dann liegt u im Potential-Well.

Beweis. Mit dem Taylor'schen Satz mit Restglied und $DI(u).h = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
I(\bar{u}) - I(u) &= \int_0^1 (1-s) \cdot D^2I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)\ ds \\
&= \int_0^1 (1-s) \cdot \big[D^2I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) - \\
&\qquad D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) + D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)\big]\ ds \\
&= \frac{1}{2} D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) + \\
&\quad \int_0^1 (1-s) \cdot \big[D^2I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) - \\
&\qquad D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)\big]\ ds
\end{aligned}$$

Weil $D^2I : X \mapsto L^2(X, \mathbb{R})$ n. Vor. in der Operatornorm stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so dass für $\|\bar{u} - u\|_X < \delta$ gilt ($\|su + (1-s)\bar{u} - u\| = |s-1| \cdot \|u - \bar{u}\|$)

$$\|D^2I(su + (1-s)\bar{u}) - D^2I(u)\|_{Op} < \frac{c^+}{2}$$

Das heisst aber doch

$$\begin{aligned}
&|D^2I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) - \\
&\qquad\qquad D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)| < \frac{c^+}{2} \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2
\end{aligned} \tag{13.1}$$

also

$$\begin{aligned}
&|\int_0^1 (1-s) \cdot \big[D^2I(su + (1-s)\bar{u}).(\bar{u}-u, \bar{u}-u) - \\
&\qquad\qquad D^2I(u).(\bar{u}-u, \bar{u}-u)\big]\ ds| \leq \frac{c^+}{4} \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Deshalb gilt wiederum

$$\begin{aligned} I(\bar{u}) - I(u) &\geq \frac{c^+}{2} \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2 - \frac{c^+}{4} \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2 \\ &\geq \frac{c^+}{4} \cdot \|\bar{u} - u\|_X^2 \end{aligned}$$

sobald $\|\bar{u} - u\|_X < \delta$ ist. Also

$$\inf_{\|\bar{u}-u\|_X = \epsilon} I(\bar{u}) \geq I(u) + \frac{c^+}{4} \cdot \epsilon^2$$

■

Korollar 26
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion. Sei $u \in X$ mit der Eigenschaft, dass $DI(u).h = 0$ und $D^2I(u).(h,h) \geq c^+ \cdot \|h\|_X^2$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ so dass für $\|\bar{u} - u\|_X < \delta$ gilt

$$\|\bar{u} - u\|_X \leq L \cdot \sqrt{I(\bar{u}) - I(u)}$$

■

Bemerkung 36 (Stabilität und 2.Ableitung in $\overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$)
Sei $p \geq 2$, $u_0 \in W_1^p(\Omega)$ und $X = u_0 + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$. Ausserdem sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass $\exists c^+ > 0 \; \forall \; F \in \mathbb{M}^{3\times 3} \; D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$. Sei $I : X \mapsto \mathbb{R}$ so definiert:

$$I(u) = \int_\Omega W(\nabla u) \; dx$$

Dann ist I unter geeigneten Wachstumsbedingungen an W 2-mal stetig in der Norm $W_1^p(\Omega)$ differenzierbar und es gilt $\forall \; \phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} D^2I(u).(\phi,\phi) &= \int_\Omega D^2W(\nabla u).(\nabla\phi, \nabla\phi) \; dx \\ &\geq c^+ \int_\Omega \|\nabla\phi\|^2 \; dx \\ &\text{die Poincare'sche Ungleichung bei Dirichlet-Daten anwenden:} \\ &\geq \kappa^+ \|\phi\|_{W_1^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Daraus alleine können wir nicht schliessen, dass ein Minimum zu I in einem Potential-Well liegt, denn dafür bräuchte es nach dem vorhergehenden mit dem Taylorschen Satz ja $D^2I(u).(\phi,\phi) \geq \kappa^+\|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)}$, es sei denn es ist $p = 2$.
Im Allgemeinen ist die Stetigkeit von D^2I aber nur in der $W_1^p(\Omega)$ Norm gegeben. Wir können jedoch schließen, dass $D^2I(u).(\phi,\phi) > 0 \ \forall\ \phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\ \phi \neq 0$. Das heisst, ein kritischer Punkt genügt dem relaxierten Energiekriterium.

13.3 Höhere Ableitungen und Stabilität

Lemma 73 (Homogene Ableitungen)
Sei $h \in X$ gegeben mit $\|h\| = 1$ und es gelte

$$D^jI(u).\underbrace{(h,\dots,h)}_{j\text{-mal}} > 0$$

Dann gilt

$$\exists\, c^+(h) > 0 \ \ \forall\, 0 < t \quad D^jI(u).\underbrace{(th,\dots,th)}_{j\text{-mal}} \geq c^+(h)\cdot t^j\|h\|^j$$

Beweis. Wegen $D^jI(u).(h,\dots,h) > 0$ gibt es ein $c^+(h) > 0$, so dass $D^jI(u).(h,\dots,h) > c^+(h)$. Wenn wir nun die Homogenität von $D^jI(u).(h,\dots,h)$ ausnutzen, ist die Aussage gezeigt. ■

Korollar 27
Sei $h \in X$ gegeben mit $h \neq 0$ und es gelte

$$D^jI(u).\underbrace{(h,\dots,h)}_{j\text{-mal}} > 0$$

Dann gilt

$$\exists\, c^+(h) > 0 \quad D^jI(u).(h,\dots,h) \geq c^+(h)\cdot\|h\|^j$$

Beweis. Betrachte

$$D^jI(u).(\|h\|\frac{h}{\|h\|},\dots,\|h\|\frac{h}{\|h\|})$$

und wende das vorherige Lemma auf $\frac{h}{\|h\|}$ an. ■

Lemma 74 (Ungerade Ableitungen)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine $2k$-mal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und für alle $h \in X$ gelte die abbrechende Entwicklung:

$$I(u+h) = I(u) + DI(u).h + \frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}}$$

Sei $u \in X$ ein globales Minimum von I und sei ein $\hat{h} \in X$ gegeben, mit folgender Eigenschaft

$$D^jI(u).\underbrace{(\hat{h},\ldots,\hat{h})}_{j\text{-mal}} = 0, \quad j = 1,\ldots 2n,\ n < k$$

Dann gilt für die nächste ungerade Ableitung

$$D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\hat{h},\ldots,\hat{h})}_{(2n+1)\text{-mal}} = 0$$

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. O.B.d. A. ist

$$D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\hat{h},\ldots,\hat{h})}_{(2n+1)\text{-mal}} > 0$$

Weil $D^{2n+1}I(u)$ homogen vom Grade $(2n+1)$ ist, gilt für $\tilde{h} = -\hat{h}$ aber

$$D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\tilde{h},\ldots,\tilde{h})}_{(2n+1)\text{-mal}} = (-1)^{2n+1} \cdot D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\hat{h},\ldots,\hat{h})}_{(2n+1)\text{-mal}} < 0$$

und natürlich nach Voraussetzung immer noch

$$D^jI(u).(\tilde{h},\ldots,\tilde{h}) = 0, \quad j = 1,\ldots 2n,\ n < k$$

Deshalb ist (alle auftretenden positiven Konstanten hängen von der gegebenen Richtung $\tilde{h}$ ab)

$$\begin{aligned}
I(u+\tilde{h}) &= I(u) + \frac{1}{(2n+1)!}D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\tilde{h},\ldots\tilde{h})}_{(2n+1)\text{-mal}} + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(\tilde{h},\ldots,\tilde{h})}_{2k\text{-mal}} \\
&\le I(u) + \frac{1}{(2n+1)!}D^{2n+1}I(u).(\tilde{h},\ldots\tilde{h}) + C^+_{2n+2}\cdot||\tilde{h}||^{2n+2} + \ldots + C^+_{2k}\cdot||\hat{h}||^{2k} \\
&\text{und das Lemma 73 auf } D^{2n+1}I(u).(\tilde{h},\ldots,\tilde{h}) \text{ anwenden} \\
&\le I(u) - C^+_{2n+1}\cdot||\hat{h}||^{2n+1} + C^+_{2n+2}\cdot||\tilde{h}||^{2n+2} + \ldots + C^+_{2k}\cdot||\hat{h}||^{2k} \\
&= I(u) - ||\hat{h}||^{2n+1}\cdot\left[C^+_{2n+1} - C^+_{2n+2}||\hat{h}|| - C^+_{2n+3}||\hat{h}||^2 \ldots - C^+_{2k}||\hat{h}||^{2k-2n+1}\right]
\end{aligned}$$

Wir können nun $\|\hat{h}\|$ passend so klein wählen, dass

$$\left[C^+_{2n+1} - C^+_{2n+2}\|\hat{h}\| - C^+_{2n+3}\|\hat{h}\|^2 - \ldots - C^+_{2k}\|\hat{h}\|^{2k-2n+1}\right] > 0$$

Das heisst aber

$$I(u + \tilde{h}) < I(u)$$

im Widerspruch zur Annahme, dass u ein globales Minimum ist. ■

Bemerkung 37
Die Aussage und der Beweis bleiben richtig für lokale Minima.

Lemma 75 (Folgen und ungerade Ableitungen)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine $2k$-mal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und für alle $h \in X$ gelte die abbrechende Entwicklung:

$$I(u+h) = I(u) + DI(u).h + \frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}}$$

Sei $u \in X$ ein globales Minimum von I und sei eine Folge $\hat{h}_m \in X$, $\|\hat{h}_m\| = 1$ gegeben, mit folgender Eigenschaft

$$D^jI(u).\underbrace{(\hat{h}_m,\ldots,\hat{h}_m)}_{j\text{-mal}} \to 0, \quad , m \to \infty \quad j = 1, \ldots 2n,\ n < k$$

Dann gilt für die nächste ungerade Ableitung auf der Folge

$$D^{2n+1}I(u).\underbrace{(\hat{h}_m,\ldots,\hat{h}_m)}_{(2n+1)\text{-mal}} \to 0\ m \to \infty$$

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Es bezeichne α_m die Summe aller Terme niedriger Ordnung, welche für $m \to \infty$ gegen 0 konvergiert. O.B.d. A. sei

$$D^{2n+1}I(u).(\hat{h}_m,\ldots,\hat{h}_m) \le -c^+ < 0$$

da wir sonst statt der Folge h_m die Folge $-h_m$ betrachten könnten. Wiederum aus der Entwicklungsformel ergibt sich mit $\lambda_m > 0$ für $h_m = \lambda_m\,\hat{h}_m$

$$I(u+h_m) = I(u) + \alpha_m + \frac{1}{(2n+1)!}D^{2n+1}I(u).(h_m,\ldots,h_m) + o(\lambda_m^{2n+1})$$
$$I(u+h_m) = I(u) + \alpha_m + \frac{1}{(2n+1)!}\lambda_m^{2n+1}\ D^{2n+1}I(u).(\hat{h}_m,\ldots,\hat{h}_m) + o(\lambda_m^{2n+1})$$
$$I(u+h_m) \le I(u) + \alpha_m - \frac{1}{(2n+1)!}\lambda_m^{2n+1}\ c^+ + o(\lambda_m^{2n+1})$$

Wenn wir nun $\lambda_m^{2n+1} = 2\ (2n+1)!\ \frac{\alpha_m}{c^+}$ wählen, folgt

$$I(u+h_m) \leq I(u) - \alpha_m + o(\alpha_m)$$

Da $\alpha_m \to 0$ für $m \to \infty$, steht das im Widerspruch dazu, dass u ein globales Minimum ist. ∎

13.4 Richtungsstrikte Minima

Lemma 76 (Richtungsstrikte globale Minima)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine $2k$-mal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und es gelte für alle $h \in X$ die abbrechende Entwicklung

$$I(u+h) = I(u) + DI(u).h + \frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}}$$

Ausserdem gelte für die letzte auftretende gerade Ableitung

$$D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}} \geq c^+ \cdot ||h||_X^{2k}$$

Sei $u \in X$ ein globales Minimum. Dann ist u ein ***richtungsstriktes*** *Minimum. Mit anderen Worten*

$$\forall\ h \in X\ \exists \epsilon(h)\ \forall\ 0 < t \leq \epsilon \quad I(u+th) > I(u)$$

Beweis. Sei $h \in X$ fest gewählt. Weil u ein globales Minimum ist, ist u ein kritischer Punkt und $\frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) \geq 0$.

Fall 1: Sei $D^2I(u).(h,h) > 0$ für dieses fest gewählte $h \in X$.
Dann ist

$$\begin{aligned} I(u+h) &= I(u) + \frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(\tilde{h},\ldots,\tilde{h})}_{2k\text{-mal}} \\ &\geq I(u) + C_2^+ \cdot ||h||^2 - C_3^+||h||^3 \ldots - C_{2k}^+ \cdot ||h||^{2k} \\ &= I(u) + ||h||^2 \cdot \left[C_2^+ - C_3^+||h|| \ldots - C_{2k}^+||h||^{2k-2}\right] \end{aligned}$$

und wir können $||h||$ passend so klein wählen, dass

$$\left[C_2^+ - C_3||h|| \ldots - C_{2k}^+||h||^{2k-2}\right] > 0$$

also ist (alle auftretenden Konstanten hängen von der Richtung h ab!)

$$\forall\, h \in X\ \exists \epsilon(h)\ \forall\, 0 < t \leq \epsilon \quad I(u+th) > I(u)$$

Fall 2: Sei $D^2I(u).(h,h) = 0$ für dieses fest gewählte $h \in X$.
Wir wenden das Lemma 74 an und erhalten damit, dass $D^3I(u).(h,h,h) = 0$ ist. Wir widerholen nun das gesamte Argument von vorne mit $D^4I(u).(h,h,h,h)$. Entweder ist $D^4I(u).(h,h,h,h) > 0$ und wir sind im Fall 1, oder $D^4I(u).(h,h,h,h) = 0$ und wir sind wieder in Fall 2. Zum Schluss sind wir jedenfalls in Fall 1, weil die letzte gerade Ableitung

$$D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}} \geq c^+ \cdot \|h\|_X^{2k}$$

strikt positiv ist. ∎

Bemerkung 38 (Richtungsstrikt nicht hinreichend für strikt)
Das Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ und $I(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$ erfüllt alle Voraussetzungen des vorigen Lemmas, aber die existierenden Minima liegen auf der Mannigfaltigkeit $\|x\| = 1$ und sind deshalb nicht strikt.
In einem Minimum $\hat{x}$ gilt $I(\hat{x}+h) = I(\hat{x}) + (2\langle \hat{x}, h\rangle + \|h\|^2)^2$. Und in jeder Umgebung von $\hat{x}$ gibt es Richtungen $h \in \mathbb{R}^n$ so dass die Gleichung erfüllt ist.
Nur im Fall $dim(X) = 1$ gilt: Richtungsstrikt erzwingt striktes Minimum.

Folgerung 13 (Stabilität und Bucklingmodes)
Daraus ergibt sich, dass es zur Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichten in der Gegenwart von Bucklingmodes nicht ausreicht, höhere Ableitungen der Energie in Richtung der kritischen Richtungen, i.e. $h: \quad D^2I(u).(h,h) = 0$ zu kontrollieren.

Sei $u \in X$ ein lokales Minimum und $D^2I(u).(\phi,\phi) > 0\ \forall\, \phi \in X, \phi \neq 0$. Dann ist u ein richtungsstriktes Minimum. Das ist so, weil man ja dann in eine feste Richtung den Taylorschen Satz anwenden kann.
Die Umkehrung gilt indeß nicht, wie uns das Beispiel $I(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$ belehrt, denn hier ist $D^2I(\hat{x}).(h,h) = 4\, \langle \hat{x}, h\rangle^2 \geq 0$.
Ist X endlichdimensional, so gilt natürlich, dass aus $D^2I(u).(\phi,\phi) > 0\ \forall\, \phi \in X, \phi \neq 0$ mit einem Kompaktheitsargument folgt, dass es ein $c^+ > 0$ gibt, so dass $D^2I(u).(\phi,\phi) \geq c^+ \cdot \|\phi\|_X^2$.
Wenn X unendlichdimensional ist, können wir diesen Schluss nicht mehr anbringen, denn sei $X = W_1^4(\Omega)$ und $W(F) = \|F - \mathbb{1}\|^2 - \|F - \mathbb{1}\|^4$ und $I(u) = \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$. Wegen $DW(F).(H) = 2\langle F - \mathbb{1}, H\rangle - 4\|F - \mathbf{1}\|^2\langle F - \mathbb{1}, H\rangle$ ist $F = \mathbf{1}$ kritischer Punkt und $D^2W(F).(H,H) = 2\|H\|^2 - 8\langle F - \mathbb{1}, H\rangle^2 - 4\|F - 1\|^2\|H\|^2 > 0\ \forall\ H \neq 0$ in $F = \mathbb{1}$. I ist dann glatt, $I(x) = 0$ und $D^2I(u).(\phi,\phi) =$

$\int_\Omega D^2W(\nabla u).(\nabla\phi,\nabla\phi)$ ist sogar gleichmäßig positiv in einer L^∞-Umgebung von $\nabla u = \mathbb{1}$. Aber in jeder $W_1^4(\Omega)$-Umgebung von $u \equiv x$ gibt es Funktionen $\bar{u}(x)$, so dass $I(\bar{u}) < I(u)$ ist. Wir können zum Beispiel wählen:

$$\bar{u}(x) = x + \begin{cases} n \cdot x & 0 \le \|x\| \le \frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

■

13.5 Strikte Minima

Wir geben nachfolgend ein hinreichendes Kriterium für strikte globale Minima an.

Lemma 77 (Strikte globale Minima)
Sei X ein Banachraum und $I : X \mapsto \mathbb{R}$ eine $2k$-mal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion und es gelte für alle $h \in X$ die abbrechende Entwicklung

$$I(u+h) = I(u) + DI(u).h + \frac{1}{2}D^2I(u).(h,h) + \ldots + \frac{1}{(2k)!}D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}}$$

Ausserdem gelte für die letzte auftretende gerade Ableitung

$$D^{2k}I(u).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2k\text{-mal}} \ge c^+ \cdot \|h\|_X^{2k}$$

Sei $\hat{u} \in X$ ein globales Minimum. Darüberhinaus gebe es eine Konstante $\alpha^+ > 0$ so dass gilt:

$$\begin{aligned} &\forall\, h \in X : \ \|h\| = 1 \\ &\alpha^+ \cdot D^{2j}I(\hat{u}).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2j\text{-mal}} \ge D^{2j+1}I(\hat{u}).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2j+1\text{-mal}}, \quad j = 1,\ldots j = k-1 \end{aligned}$$

Dann ist u ein striktes globales Minimum.

Beweis. Aus der Homogenität der Ableitungen können wir mit der Voraussetzung sofort schließen, dass $D^{2j}I(\hat{u}).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{2j\text{-mal}} \ge 0$ ist, im Verlauf des Beweises benötigen wir aber die volle Voraussetzung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wenn $\hat{u}$ ein nicht isoliertes globales Minimum ist, dann gibt es eine Folge

von Richtungen
$h_n \in X, \|h_n\| = 1$ und eine Folge reeller Zahlen $\lambda_n > 0, \lambda_n \to 0$, so dass gilt

$$I(\hat{u} + \lambda_n\, h_n) = I(\hat{u})$$

Aufgrund der Entwicklungsformel haben wir dann

$$\begin{aligned}
I(\hat{u} + \lambda_n\, h_n) &= I(\hat{u}) + \lambda_n\, DI(\hat{u}).h_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2\, D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) + \ldots + \\
&\quad \frac{1}{(2k)!}\lambda_n^{2k}\, D^{2k} I(\hat{u}).\underbrace{(h_n, \ldots, h_n)}_{2k\text{-mal}} \\
I(\hat{u} + \lambda_n\, h_n) &= I(\hat{u}) + \lambda_n^2\, [\frac{1}{2} D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) + \ldots + \frac{1}{(2k)!} D^{2k} I(\hat{u}).\underbrace{(h_n, \ldots, h_n)}_{2k\text{-mal}}] \\
0 &= [\frac{1}{2} D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) + \frac{1}{3!}\lambda_n\, D^3 I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n) + \ldots + \\
&\quad \frac{1}{(2k)!}\lambda_n^{2k-2}\, D^{2k} I(\hat{u}).\underbrace{(h_n, \ldots, h_n)}_{2k\text{-mal}}]
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden die Fälle:

1. Die Folge h_n ist derart, dass $D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) > c_2^+ > 0$ ist, dann haben wir sofort einen Widerspruch.

2. Die Folge h_n ist derart, dass $D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) > 0,\ D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) \to 0$. Mit Lemma 75 muss dann $D^3 I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n) \to 0$ und wir nehmen O.B.d.A an, dass
$D^3 I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n) < 0$, denn im gegenteiligen Fall haben wir sofort einen Widerspruch, da dann die positive 3.Ableitung den Restterm höherer Ordnung dominiert und $D^2 I(\hat{u}).(h_n, h_n) > 0$ ist.
Sei nun $D^3 I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n) < 0$. Wir wählen $\hat{h}_n = -h_n$, dann ist $D^3 I(u).(\hat{h}_n, \hat{h}_n, \hat{h}_n) > 0$ und

$$\begin{aligned}
0 &= [\frac{1}{2} D^2 I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) - \frac{1}{3!}\lambda_n\, D^3 I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n, \hat{h}_n) + \ldots + \\
&\quad \frac{1}{(2k)!}\lambda_n^{2k-2}\, D^{2k} I(\hat{u}).\underbrace{(\hat{h}_n, \ldots, \hat{h}_n)}_{2k\text{-mal}}] \\
0 &= [\frac{1}{2} D^2 I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) - \frac{1}{3!}\lambda_n\, D^3 I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n, \hat{h}_n) + o(\lambda_n)]
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha^+ \cdot D^2I(u).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) \geq D^3I(u).(\hat{h}_n, \hat{h}_n, \hat{h}_n)$ also

$$0 \leq [\frac{1}{2}D^2I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) - \frac{1}{3!}\lambda_n\ \alpha^+ \cdot D^2I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) + o(\lambda_n)]$$
$$0 \leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\lambda_n\ \alpha^+)\ D^2I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) + o(\lambda_n)$$

Woher wir für $\lambda_n \to 0$ wieder einen Widerspruch erhalten, insofern es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gäbe, so daß dann für alle $n \geq n_0$ gälte:

$$0 < (\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\lambda_n\ \alpha^+)\ D^2I(\hat{u}).(\hat{h}_n, \hat{h}_n) + o(\lambda_n)$$

3. Die Folge h_n ist derart, dass $D^2I(\hat{u}).(h_n, h_n) = 0$, $D^3I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n) = 0$. Wir wiederholen nun das Vorgehen wie im Fall $D^2I(\hat{u})$ für den Term $D^4I(\hat{u}).(h_n, h_n, h_n, h_n)$ und unterscheiden wieder dieselben Fälle wie vorher. Damit bekommen wir wieder genauso einen Widerspruch.

4. Die Folge h_n ist derart, dass alle Ableitungen auf der Folge verschwinden, bis auf die letzte, welche positiv ist, womit auch hier ein Widerspruch entsteht.

Auf diese Weise bekommen wir für alle denkbaren Folgen h_n einen Widerspruch.

■

Bemerkung 39
Weder das hinreichende Kriterium für richtungstrikte Minima, noch das hinreichende Kriterium für strikte Minima sind mir aus der Literatur bekannt. Mit den offensichtlichen Modifikationen sollten diese beiden Kriterien auch für abbrechende Taylorentwicklungen mit Restglied durchgehen.

Kapitel 14

Schwache Stetigkeit

14.1 Null-Lagrangean und schwache Stetigkeit

Satz 21 (Null-Lagrangean)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *eine offene, beschränkte Menge. Sei* $\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^{\infty}(\Omega)$ *und für* $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ *sei* $T(A) = (A, \mathrm{Adj}A, \det A)$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega T(A + \nabla\phi(x))\, dx = T(A) \cdot |\Omega| \quad \textit{komponentenweise}$$

insbesondere gilt also für $A = 0$

$$\int_\Omega T(\nabla\phi(x))\, dx = 0 \quad \textit{komponentenweise}$$

das heisst

$$\int_\Omega \nabla\phi(x)\, dx = 0 \quad \textit{komponentenweise}$$
$$\int_\Omega \mathrm{Adj}\nabla\phi(x)\, dx = 0 \quad \textit{komponentenweise}$$
$$\int_\Omega \det \nabla\phi(x)\, dx = 0$$

Beweis. [Dac89], Seite 193, Theorem 3.2. ■

Diese Eigenschaften gelten, weil Determinanten und Adjunkten von Gradienten sich als Divergenzterme schreiben lassen, es ist zum Beispiel für

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$
$$\det \nabla\phi = div \begin{pmatrix} \phi_1 \cdot \phi_{2_{x_2}} \\ -\phi_1 \cdot \phi_{2_{x_1}} \end{pmatrix}$$

Folgerung 14 (Spezielle Null-Lagrangean)
Sei $C \in \mathbb{M}^{3\times 3}$, $C_{ij} = const.$ und $c \in \mathbb{R}$, $c = const.$ Sei $p \geq 3$ und $\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \langle C, \nabla\phi(x)\rangle \, dx = \langle C, \int_\Omega \nabla\phi(x)\, dx\rangle = 0$$
$$\int_\Omega \langle C, \mathrm{Adj}\nabla\phi(x)\rangle \, dx = \langle C, \int_\Omega \mathrm{Adj}\nabla\phi(x)\, dx\rangle = 0$$
$$\int_\Omega c \cdot \det \nabla\phi(x)\, dx = 0$$

Beweis. Wegen $p \geq 3$ sind die Abbildungen $\nabla\phi \in L^p(\Omega) \mapsto \mathrm{Adj}\nabla\phi \in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$ und $\nabla\phi \in L^p(\Omega) \mapsto \det \nabla\phi \in L^{\frac{p}{3}}(\Omega)$ stetig in der von $W_1^p(\Omega)$ induzierten Norm. Wir können $\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$ mit $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ approximieren. Für ϕ_n ist die Aussage wegen Satz 21 klar. Wegen der Stetigkeit muss die Aussage auch für ϕ selbst gelten. ■

Satz 22 (Schwache Stetigkeit des Gradienten)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge, $p \geq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, $(p \geq \frac{q}{q-1})$ und $r \geq 1$. Es gelte

$$\begin{aligned} u_\nu &\rightharpoonup u && \text{in } W_1^p(\Omega) \\ \mathrm{Adj}\nabla u_\nu &\rightharpoonup H && \text{in } L^q(\Omega) \\ \det \nabla u_\nu &\rightharpoonup \delta && \text{in } L^r(\Omega) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{Adj}\nabla u \\ \delta &= \det \nabla u \end{aligned}$$

Beweis. [Cia88], Seite 366. ■

Folgerung 15
Mit denselben Voraussetzungen gilt dann

$$\begin{aligned} u_\nu \rightharpoonup u \quad &\text{in } W_1^p(\Omega) \Longrightarrow \\ &\int_\Omega \det \nabla u_\nu \cdot 1 \, dx \to \int_\Omega \det \nabla u \cdot 1 \, dx \\ &\int_\Omega \mathrm{Adj} \nabla u_\nu \, dx \to \int_\Omega \mathrm{Adj} \nabla u \, dx \quad \text{komponentenweise} \end{aligned}$$

Definition 25 (Caratheodory-Funktion)
Wir sagen, die Funktion
$G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ *ist eine* ***Caratheodory-Funktion****, wenn gilt*

$$\begin{aligned} &\text{für jedes Paar } (u_0, F_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \text{ ist} \quad x \mapsto G(x, u_0, F_0) \text{ messbar} \\ &\text{für fast alle } x_0 \in \mathbb{R}^3 \text{ ist} \quad (u, F) \mapsto G(x_0, u, F) \text{ stetig} \end{aligned}$$

Satz 23 (Nemitsky-Operatoren)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte offene Menge und $G : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine Caratheodory-Funktion. Ausserdem gelte die Wachstumsbedingung

$$\forall \ (x, F) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \quad G(x, F) \leq g(x) + C^+ \cdot \|F\|^{\frac{p}{q}}$$

mit einer Funktion $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist der Operator

$$H : L^p(\Omega) \mapsto L^q(\Omega), \quad H(F).(x) = G(x, F(x))$$

stetig.

Beweis. Standard Resultat. [AZ90]. ∎

Bemerkung 40
Dieser Operator H ist also schon dann stetig, wenn er nur $L^p(\Omega)$ auf $L^q(\Omega)$ abbildet. Mit anderen Worten, es gibt nur stetige Operatoren dieser Art, die auf ganz $L^p(\Omega)$ definiert sind und nach $L^q(\Omega)$ abbilden, denn die Wachstumsbedingung alleine sichert gerade diese Abbildungseigenschaft.

Beispiel 12 (Keine Wachstumsbedingung)
Die folgenden Funktionen erfüllen keine Wachstumsbedingung:

$$\begin{aligned} F &\mapsto -\ln \det F \\ F &\mapsto \frac{1}{\|F\|} \\ F &\mapsto \frac{1}{\det F} \end{aligned}$$

In allen drei Fällen kann nämlich $\|F\|$ beschränkt bleiben, aber $W(F)$ beliebig groß werden. Mit solchen Funktionen kann man keine wie auch immer geartete Stetigkeit zwischen $L^p(\Omega)$ Räumen erwarten.

Satz 24 (Polykonvexität und Potential-Well)
Sei W strikt polykonvex und $u \in W_1^p(\Omega)$ sei ein strikt lokales Minimum von

$$I(u) = \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx$$
$$u \in \{u_0 + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\},\ u_0 \in W_1^p(\Omega)$$

in der Metrik:

$$\rho(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_{1,p,\Omega} + \|\mathrm{Adj}\nabla u_1 - \mathrm{Adj}\nabla u_2\|_{q,\Omega} + \|\det \nabla u_1 - \det \nabla u_2\|_{r,\Omega}$$

mit $p \geq 2$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, $r > 1$ Ausserdem sei W eine Caratheodory-Funktion. Darüberhinaus gelte

$$W(x, F) \geq g(x) + c^+ \cdot (\|F\|^p + \|\mathrm{Adj}F\|^q + (\det F)^r \quad \textit{Koerzivität}$$

mit $g \in L^1(\Omega)$. Dann liegt das strikt lokale Minimum u von

$$\inf_{\{u_0 + W_1^p(\Omega)\}} \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx$$

in einem gleichmässigen Potential-Well bezüglich ρ. Insbesondere liegt ein strikt globales Minimum im Potential-Well.

Beweis. Verweis [BM84a], S.273, Theorem 4.9 ■

Bemerkung 41
Wenn W strikt konvex ist, hat man schon einen Potential-Well in der Topologie von $W_1^p(\Omega)$.
Dasselbe gilt wenn z. Bsp. $p \geq 2$, $q \leq \frac{p}{2}$, $r \leq \frac{p}{3}$ ist, dann ist nämlich die von ρ induzierte Topologie auf $W_1^p(\Omega)$ äquivalent zur natürlichen Topologie auf $W_1^p(\Omega)$, weil mit diesen Voraussetzungen die Terme mit $\|\mathrm{Adj}F\|$ und $\det F$ mit der Norm $\|F\|$ abschätzbar sind.

14.2 Schwache Unterhalbstetigkeit

Satz 25 (Schwache Unterhalbstetigkeit und Konvexität)
Sei $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ eine Caratheodory-Funktion. Sei $G(x,T) \geq \beta$ und sei $T \mapsto G(x,T)$ konvex. Dann gilt

$$T_n \rightharpoonup T \quad \text{in } L^1 \Rightarrow$$
$$\int_\Omega G(x,T(x)) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(x,T_n)\, dx$$

Beweis. Standard Resultat der konvexen Analysis. [Cia88], Theorem 7.3.1, Seite 352. Wir bemerken noch, dass man im konvexen Fall ohne jede Wachstumsbedingung auf die schwache Unterhalbstetigkeit schließen kann. ∎

Satz 26 (Schwache Unterhalbstetigkeit in $W_1^p(\Omega)$)
Sei $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ eine Caratheodory-Funktion. Sei $F \mapsto G(x,u,F)$ polykonvex für alle $(x,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge und es gelte $u_\nu(x) \to u(x)$ fast überall und $\nabla u_\nu \rightharpoonup \nabla u \in L^1(\Omega)$. Es gebe ausserdem eine Funktion $\Psi \in L^1(\Omega)$ für die gilt

$$G(x,u_\nu(x),\nabla u_\nu(x)) \geq \Psi(x), \qquad G(x,u(x),\nabla u(x)) \geq \Psi(x)$$

Dann gilt

$$\int_\Omega G(x,u(x),\nabla u(x))\, dx \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega G(x,u_\nu(x),\nabla u_\nu(x))\, dx$$

Beweis. [BCO81],Theorem 5.4, Seite 161. ∎

Satz 27 (Schwache Unterhalbstetigkeit in $W_1^p(\Omega)$ mit Wachstumsbedingung)
Sei $1 \leq p < \infty$. Sei $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine Caratheodory-Funktion und sei $F \mapsto G(x,u,F)$ quasikonvex für alle $(x,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge. Es gelte die Wachstumsbedingung

$$\forall\ (x,u,F): \quad 0 \leq G(x,u,F) \leq g(x) + C^+(1 + \|u\|_{\mathbb{R}^3}{}^p + \|F\|_{\mathbb{M}^{3\times 3}}{}^p)$$

mit einer nichtnegativen lokalintegrierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. Dann ist

$$I(u) := \int_\Omega G(x,u,\nabla u)\, dx$$

schwach unterhalbstetig in $W_1^p(\Omega)$

Beweis. [AF84], Theorem 2.4. ■

Satz 28 (Strikte Konvexität und Potential-Well)
Sei W glatt und strikt konvex, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand, $p \geq 2$ und es gelte

$$\begin{array}{lll} \forall A \in \mathbb{M}^{3\times 3}: & |W(A)| \leq C^+ \ (1 + \|A\|^p) & \textit{Wachstumsbedingung} \\ \exists c^+ > 0, \beta^+ > 0 & W(A) \geq c^+ \cdot \|A\|^p - \beta^+ & \textit{Koerzivität} \end{array}$$

Dann ist $I : u_0 + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

strikt konvex auf $W_1^p(\Omega)$, schwach unterhalbstetig und das eindeutige globale Minimum liegt im Potential-Well.

Beweis. Die strikte Konvexität von I ergibt sich direkt wegen der strikten Konvexität des Integranden. Aus der Konvexität ergibt sich mit Satz 25 die schwache Unterhalbstetigkeit. Mit den direkten Methoden der Variationsrechnung findet man ein Minimum. Weil I strikt konvex ist, muss das Minimum eindeutig sein. Mit dem Satz 24 schließen wir, dass das strikte globale Minimum im Potential-Well liegt. ■

Satz 29 (Strikte 2.Ableitung)
Sei pge2 und $I \in C^2(W_1^p(\Omega), \mathbb{R})$ und für die 2.Ableitung in einem Punkt $u \in X$ gelte

$$\begin{aligned} &D^2 I(u).(\phi, \phi) : W_1^p(\Omega) \times W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R} \\ &D^2 I(u).(\phi, \phi) > 0 \quad \forall \phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega);\ \phi \neq 0 \end{aligned}$$

und sei $\phi \mapsto D^2 I(u).(\phi, \phi)$ schwach unterhalbstetig.
Sei $M := \{\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega) |\ \exists\ (i,j)\ \mathrm{Adj}(\nabla\phi(x))_{ij} \geq \epsilon^+ > 0 \quad x\text{-fast überall}\}$
und $N := \{\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega) |\ \det \nabla\phi(x) \geq \epsilon^+ > 0 \quad x\text{-fast überall}\}$. Dann gilt

$$\begin{array}{lll} \exists c_M^+ > 0 : & \forall \phi \in M : & D^2 I(u).(\phi, \phi) \geq c_M^+ \cdot \|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)} \\ \exists c_N^+ > 0 : & \forall \phi \in N : & D^2 I(u).(\phi, \phi) \geq c_N^+ \cdot \|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)} \end{array}$$

Beweis. Widerspruchsannahme: Es gibt eine Folge $\{H_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \subset \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$, $\|H_n\|_{W_1^p(\Omega)} = 1$ und $D^2I(u).(H_n, H_n) \to 0$. Da die Einheitskugel schwach folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge $H_{n_k} \rightharpoonup \hat{H}$. Da $D^2I(u).(\phi,\phi)$ schwach unterhalbstetig ist, folgt also

$$0 \leq D^2I(u).(\hat{H},\hat{H}) \leq \liminf D^2I(u).(H_{n_k},H_{n_k}) = 0$$
$$D^2I(u).(\hat{H},\hat{H}) = 0$$

Und nach der Voraussetzung muss also $\hat{H} = 0$ sein. Aber für $H_{n_k} \rightharpoonup \hat{H} \in W_1^p(\Omega)$ gilt natürlich ebenfalls $\nabla H_{n_k} \rightharpoonup \nabla\hat{H} \in L^p(\Omega)$ und daher

$$0 < \epsilon^+ \cdot |\Omega| \leq \int_\Omega \mathrm{Adj}\nabla H_{n_k}(x)_{ij}\, dx \to \int_\Omega \mathrm{Adj}\nabla \hat{H}(x)_{ij}\, dx = 0$$

Das ist der Widerspruch. Für die Menge N führen wir wörtlich denselben Beweis. Wir bemerken noch, dass M, N keine konvexen Mengen sind. ∎

Folgerung 16 (Stabilität und schwache Unterhalbstetigkeit)
Sei $p \geq 2$,$u_0 \in W_1^p(\Omega)$ und $X = \{u_0 + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$. Ausserdem sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass $D^2W(F).(H,H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$. Sei $I : X \mapsto \mathbb{R}$ so definiert:

$$I(u) = \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

Dann ist I unter geeigneten Wachstumsbedingungen an W 2-mal stetig in der Norm $W_1^p(\Omega)$ differenzierbar und sei darüberhinaus $\phi \mapsto D^2I(u).(\phi,\phi)$ schwach unterhalbstetig. Dann gilt

$$\exists c_M^+ > 0 : \quad \forall \phi \in M : \quad D^2I(u).(\phi,\phi) \geq c_M^+ \cdot \|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)}$$
$$\exists c_N^+ > 0 : \quad \forall \phi \in N : \quad D^2I(u).(\phi,\phi) \geq c_N^+ \cdot \|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)}$$

Beweis.

$$D^2I(u).(\phi,\phi) = \int_\Omega D^2W(\nabla u).(\nabla\phi,\nabla\phi); dx$$
$$\geq c^+ \int_\Omega \|\nabla\phi\|^2\, dx$$

die Poincare'sche Ungleichung bei Dirichlet-Daten anwenden:
$\geq \kappa^+ \|\phi\|^2_{W_1^2(\Omega)}$

Wenn $\phi \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$ $\phi \neq 0$, dann ist $\|\phi\|_{W_1^2(\Omega)} > 0$. Dann gilt aber

$$
\begin{aligned}
&D^2 I(u).(\phi, \phi) \geq \kappa^+ \|\phi\|^2_{W_1^2(\Omega)} \Longrightarrow \\
&D^2 I(u).(\phi, \phi) > 0 \quad \forall\ \phi \in W_1^p(\Omega) \quad \phi \neq 0
\end{aligned}
$$

Wir können also den Satz 29 anwenden und folgern

$$\exists c_M^+ > 0\ \forall \phi \in M: \quad D^2 I(u).(\phi, \phi) \geq c^+ \cdot \|\phi\|^2_{W_1^p(\Omega)}$$

Der Beweis für N verläuft analog. ■

Bemerkung 42
Die Voraussetzung $D^2 W(F).(H, H) \geq c^+ \cdot \|H\|^2$ reicht i.A. nicht aus für die Positivität auf $\overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$.

Kapitel 15

Stabilität bezüglich Parameter

15.1 Parameterstabilität

Definition 26 (Parameterstabilität für EL-Gleichungen)
Sei $p \geq 2$, $u_0 \in W_1^p(\Omega)$ und $X = \{u_0 + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$. Es sei E ein Banachraum, z.Bsp. $E = C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. Ausserdem sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Sei $I : X \times E \mapsto \mathbb{R}$ so definiert:

$$I(u,\xi) = \int_\Omega W(\nabla u(x), \xi(x))\, dx$$

Wir sagen, dass das schwache homogene Euler-Lagrange Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega): \quad DI(u,\xi).\phi &= 0 \\ u_{\partial\Omega} &= u_0 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega): \quad \int_\Omega \langle D_F W(\nabla u(x), \xi(x)), \nabla\phi\rangle\, dx &= 0 \\ u_{\partial\Omega} &= u_0 \end{aligned}$$

parameterstabil *in $u_1 \in X$ bezüglich $\xi_1 \in E$ ist, falls es eine Umgebung $U_{\xi_1} \subset E$ von ξ_1 und einen stetigen Operator $T : U_{\xi_1} \subset E \mapsto X$ gibt, so dass $T(\xi_1) = u_1$ und $\forall\, \xi \in U_{\xi_1}$ gilt*

$$\begin{aligned} \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega): \quad DI(T(\xi),\xi).\phi &= 0 \\ T(\xi)(x)_{\partial\Omega} &= u_0 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega): \quad \int_\Omega \langle D_F W(T(\xi), \xi), \nabla\phi\rangle\, dx &= 0 \\ T(\xi)(x)_{\partial\Omega} &= u_0 \end{aligned}$$

Bemerkung 43 (Satz über implizite Funktionen)
Wenn die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen auf Banachräumen erfüllt sind, dann kann man ja sogar stetig differenzierbar auflösen, das heisst es gibt einen stetig differenzierbaren Lösungsoperator $\xi \mapsto T(\xi)$ *und das Problem ist automatisch parameterstabil. Formal schriebe sich das so :*
$D_u I(u_1, \xi_1) = 0$ *und wenn* $D_u^2 I(u_1, \xi_1)$ *existiert, stetig und bijektiv ist, dann existiert eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung* $\xi \mapsto T(\xi)$.
Aber in $W_1^p(\Omega)$ *sind die nötigen Voraussetzungen* ***nicht*** *erfüllt. Genauer ist dann die Linearisierung der Euler-Gleichung* $D^2 I(u_1, \xi_1)$ *nicht bijektiv. Erst in Räumen* $W_m^p(\Omega)$ *glatterer Funktionen sind die Voraussetzungen erfüllt. Siehe [Val88].*

Definition 27 (Parameterstabilität für Variationsprobleme)
Sei $p \geq 2, u_0 \in W_1^p(\Omega)$ *und* $X = \{u_0 + W_1^p(\Omega)\}$. *Sei* E *ein Banachraum,z.Bsp.* $E = C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$. *Ausserdem sei* $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion. Sei* $I : X \times E \mapsto \mathbb{R}$ *so definiert:*

$$I(u, \xi) = \int_\Omega W(\nabla u(x), \xi(x))\, dx$$

Wir sagen, dass das Minimumproblem $inf_{u\in X} I(u,\xi)$ ***parameterstabil*** *in einem Minimum* $u_1 \in X$ *bezüglich* $\xi_1 \in E$ *ist, falls es eine Umgebung* $U_{\xi_1} \subset E$ *von* ξ_1 *und einen stetigen Operator* $T : U_{\xi_1} \subset E \mapsto X$ *gibt, so dass* $T(\xi_1) = u_1$ *und* $\forall\, \xi \in U_{\xi_1}$ *gilt*

$$\inf_{u\in X} I(u, \xi) = I(T(\xi), \xi)$$

Lemma 78 (Strikte Konvexität und Parameterstabilität)
Sei $I : X \times E \mapsto \mathbb{R}$ *für jedes* $\xi \in E$ *strikt konvex. Es gebe zu jedem* $\xi \in E$ *ein eindeutiges Minimum* $u(\xi) \in X$ *zum Minimumproblem* $\inf_{u\in X} I(u, \xi)$. *Das jeweilige Minimum u liege in einem Potential-Well. Ausserdem gebe es eine gleichmäßige Lipschitzkonstante* L^+ *so dass gilt*

$$\forall w \in X\ \forall\, \xi_1, \xi_2 \in E: \quad |I(w, \xi_1) - I(w, \xi_2)| \leq L^+ \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|_E$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $T : E \mapsto X$ *(Lösungsoperator) mit der Eigenschaft, dass*

$$\inf_{u\in X} I(u, \xi) = I(T(\xi), \xi)$$

Das heisst, dass das Minimumproblem stetig vom Parameter $\xi \in E$ *abhängt.*

Beweis. Seien $\xi_1, \xi_2 \in E$ gegeben und $u \in X$ das zu ξ_1 gehörige Minimum und $v \in X$ das zu ξ_2 gehörige Minimum. Weil das Minimum eindeutig ist, können wir dafür auch schreiben $u = T(\xi_1),\ v = T(\xi_2)$. Es ist

$$\begin{aligned}
|I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1)| + |I(u,\xi_2) - I(v,\xi_2)| &= I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1) + I(u,\xi_2) - I(v,\xi_2)\\
&= I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2) + I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)\\
&\leq |I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2) + I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)|\\
&\leq |I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2)| + |I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)|\\
&\leq 2L^+ \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|_E
\end{aligned}$$

Es ist daher aber auch

$$|I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1)| \leq |I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1)| + |I(u,\xi_2) - I(v,\xi_2)| \leq 2L^+ \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|_E$$

Daher ist $v = v(\xi_2)$ für $\|\xi_2 - \xi_1\|_E \to 0$ eine Minimalfolge zu $I(w,\xi_1)$ da $I(v_n,\xi_1) \leq I(u,\xi_1) + 2L \cdot \|\xi_n - \xi_1\|$ ist. Weil das Minimum im Potential-Well liegt, muss die Minimalfolge stark konvergieren, das heisst $\|v(\xi_2) - u(\xi_1)\|_X \to 0$. Das ist aber gerade die Stetigkeit des Lösungsoperators $\xi \mapsto T(\xi)$. ∎

Lemma 79 (Parameterstabilität mit Stetigkeitsmodul)
Sei $I \in C^2(X \times E, \mathbb{R})$ gleichmäßig positiv im ersten Argument:

$$\exists c^+ > 0\ \forall (u,\xi) \in X \times E \qquad D_u^2 I(u,\xi).(h,h) \geq c^+ \|h\|_X^2$$

I habe für alle $\xi \in E$ ein Minimum und es gebe eine gleichmäßige Lipschitzkonstante L^+ so dass gilt

$$\forall w \in X\ \forall\ \xi_1, \xi_2 \in E: \quad |I(w,\xi_1) - I(w,\xi_2)| \leq L \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|_E$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $T : E \mapsto X$ (Lösungsoperator) mit der Eigenschaft, dass

$$\inf_{u \in X} I(u,\xi) = I(T(\xi),\xi)$$

und

$$\|T(\xi_1) - T(\xi_2)\|_X \leq C^+ \sqrt{\|\xi_2 - \xi_1\|_E}$$

Beweis. Wegen Lemma 71 wissen wir, dass es ein $c^+ > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1) &\geq c^+ \cdot \|v - u\|_X^2\\
I(u,\xi_2) - I(v,\xi_2) &\geq c^+ \cdot \|u - v\|_X^2
\end{aligned}$$

Wir können wieder einen Operator $T(\xi)$ definieren, weil auch hier das jeweilige Minimum existiert und eindeutig ist. Mit denselben Bezeichnungen wie oben haben wir

$$\begin{aligned}
\|v-u\|_X^2 + \|u-v\|_X^2 &\leq \frac{1}{c^+}\{[I(v,\xi_1) - I(u,\xi_1)] + [I(u,\xi_2) - I(v,\xi_2)]\} \\
2\|u-v\|_X^2 &\leq \frac{1}{c^+}\{I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2) + I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)\} \\
\|u-v\|_X^2 &\leq \frac{1}{2c^+}\{|I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2) + I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)|\} \\
\|u-v\|_X^2 &\leq \frac{1}{2c^+}\{|I(v,\xi_1) - I(v,\xi_2)| + |I(u,\xi_2) - I(u,\xi_1)|\} \\
\|u-v\|_X^2 &\leq \frac{1}{2c^+} 2L \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|_E \\
\|u-v\|_X &\leq \frac{L}{c^+} \cdot \sqrt{\|\xi_2 - \xi_1\|_E}
\end{aligned}$$

■

15.2 Kornsche Ungleichung

Satz 30 (Kornsche Ungleichung: einfacher Spezialfall)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand $\partial\Omega$.

1. *Dann gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

$$\int_\Omega \|\nabla\phi^T + \nabla\phi\|^2 \, dx \geq 2 \int_\Omega \|\nabla\phi\|^2 \, dx$$

2. *Sei $F \in L^\infty(\Omega)$ und $\det F(x) \geq c^+ > 0$. Es bezeichne*

$$\widehat{F} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega F(x) \, dx$$

das arithmetische Mittel von F über Ω. Dann gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \|F^T \nabla\phi + \nabla\phi^T F\|^2 \, dx \geq [2\lambda_{min}(FF^T(x)) - \frac{4}{\sqrt{3}} \sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\|] \int_\Omega \|\nabla\phi\|^2 \, dx$$

Beweis. Wenn wir in (2) $F(x) = \mathbb{1}$ setzen, erhalten wir gerade (1) und das ist gerade die klassische Kornsche Ungleichung auf $\overset{\circ}{H}{}_1^2(\Omega)$. Wir zeigen (2). Zuerst betrachten wir nur den Integranden. Wir setzen $H = \nabla\phi$. Mit Lemma 51 gilt dann

$$\begin{aligned} \|F^T H + H^T F\|^2 \geq 2\|F^T H\|^2 &- 4\langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \\ &- 4\langle \mathrm{Adj}H, \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \end{aligned}$$

Für das Integral gilt demgemäß

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|F^T H + H^T F\|^2 \, dx &\geq 2\int_\Omega \|F^T H\|^2 \, dx - 4\int_\Omega \langle \mathrm{Adj}H, \mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \, dx \\ &\quad - 4\int_\Omega \langle \mathrm{Adj}H, \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \, dx \\ &\geq 2\int_\Omega \|F^T H\|^2 \, dx - 4\sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\| \int_\Omega \|\mathrm{Adj}H\| \, dx \\ &\quad - 4\int_\Omega \langle \mathrm{Adj}H, \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \, dx \\ &\geq 2\int_\Omega \|F^T H\|^2 \, dx \\ &\quad - 4\sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\| \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{3}} \|H\|^2 \, dx \end{aligned}$$

Wobei wir die Abschätzung (Korollar 14) zwischen $\|\mathrm{Adj}H\|$ und $\|H\|$ benutzt haben, sowie die Tatsache, dass ja $\int_\Omega \langle \mathrm{Adj}H, \widehat{\mathrm{Adj}F}\rangle \, dx \equiv 0$, weil $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\widehat{\mathrm{Adj}F}$ konstant ist und dieser Ausdruck dann ein Null-Lagrangean ist. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|F^T H + H^T F\|^2 \, dx &\geq 2\int_\Omega \|F^T H\|^2 \, dx \\ &\quad - 4\sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\| \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{3}} \|H\|^2 \, dx \\ &\geq 2\lambda_{min}(FF^T(x)) \int_\Omega \|H\|^2 \, dx \\ &\quad - 4\frac{1}{\sqrt{3}} \sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj}F - \widehat{\mathrm{Adj}F}\| \int_\Omega \|H\|^2 \, dx \\ &\geq [2\lambda_{min}(FF^T(x)) - \end{aligned}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj} F - \widehat{\mathrm{Adj} F}\|] \int_{\Omega} \|H\|^2 \, dx$$

■

Bemerkung 44
Im Fall $F(x) = 1\!\!1$ gilt: $(\nabla\phi^T + \nabla\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = a + R.x$ mit $R^T = -R$. Es ist noch unklar, ob für $F(x) = \nabla\psi$, $\det F(x) \geq c^+ > 0$ ein ähnliches Resultat möglich ist, solange zusätzlich noch

$$[2\lambda_{min}(FF^T(x)) - \frac{4}{\sqrt{3}} \sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{Adj} F - \widehat{\mathrm{Adj} F}\|] \geq c^+ > 0$$

gilt. Dies wäre der entscheidende Schritt, um aus der obigen Aussage auch für nur auf einem Teil des Randes $\partial\Omega$ gegebene Dirichlet-Daten eine verallgemeinerte Kornsche Ungleichung zu folgern.

Bemerkung 45
In der Zwischenzeit konnte dieses Resultat vom Autor wesentlich erweitert werden. Insbesondere ist eine Verallgemeinerung der 1. Kornschen Ungleichung auf glatte Koeffizienten möglich. [Nef00]

15.3 Transformation auf homogenen Rand

Ähnlich wie ein nichtlineares elliptisches PDE-System kann man auch ein Variationsproblem auf homogenen Rand transformieren.

Sei $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ glatt, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand $\partial\Omega$. Sei $g \in W_1^p(\Omega)$ und

$$I(u,\xi) := \int_{\Omega} W(\nabla u, \xi) \, dx$$

Für festes $\xi \in E$ betrachten wir das Minimumproblem:

$$\min_{u\in g+\overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} I(u,\xi)$$

Wir setzen $v = u - g$. Es sei

$$\hat{I}(v,\xi) := I(v+g,\xi) = \int_{\Omega} W(\nabla v + \nabla g, \xi) \, dx$$

und das entsprechende Minimumproblem lautet:

$$\min_{v\in\overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} \hat{I}(v,\xi)$$

Dann sind die beiden Minimumprobleme I und $\hat{I}$ äquivalent in dem Sinne, dass für jede Lösung $\hat{v}$ des einen Problems $\tilde{u} = \hat{v} + g$ Lösung des anderen Problems ist. Wir notieren noch, daß für beliebige Argumente $T(g_1), g_1, g_2 \in W_1^p(\Omega)$

$$\hat{I}(T_\xi(g_1) - g_2, \xi) = I(T(g_1) - g_2 + g_1, \xi)$$

gilt.

Lemma 80 (Stetigkeit in den Randbedingungen und Potential-Well) *Sei I wie oben und darüberhinaus für jedes $\xi \in E$ strikt konvex. Es gebe zu jedem $\xi \in E$ ein eindeutiges Minimum $u(\xi) \in X$ zum Minimumproblem*

$$\inf_{u \in g + \overset{\circ}{W}_1^p(\Omega)} I(u, \xi)$$

Das jeweilige Minimum u liege in einem Potential-Well. Ausserdem gebe es eine gleichmäßige Lipschitzkonstante L^+ so dass gilt

$$\forall g_1, g_2 \in W_1^\infty(\Omega)\ \forall\ \xi \in E: \quad |I(u + g_1, \xi) - I(u + g_2, \xi)| \le L^+ \cdot \|g_2 - g_1\|_{1,\infty,\Omega}$$

Dann ist die Lösung $u(\xi)$ stetig abhängig von den Daten $g \in W_1^\infty(\Omega)$ und es gilt

$$\|g_1 - g_2\|_{W_1^\infty(\Omega)} \to 0 \Longrightarrow$$
$$\|u(\xi)_{g_1} - u(\xi)_{g_2}\|_{W_1^p(\Omega)} \to 0$$

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Minima können wir wieder eine Abbildung $T_\xi : W_1^p(\Omega) \mapsto W_1^p(\Omega)$ definieren, für die gilt

$$\inf_{u \in g + \overset{\circ}{W}_1^p(\Omega)} I(u, \xi) = I(T_\xi(g), \xi) = \hat{I}(T_\xi(g) - g, \xi)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
|\hat{I}(T_\xi(g_2) - g_1, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_1, \xi)| + |\hat{I}(T_\xi(g_1) - g_2, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_2) - g_2, \xi)| &= \\
\hat{I}(T_\xi(g_2) - g_1, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_1, \xi) + \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_2, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_2) - g_2, \xi) &\le \\
|\hat{I}(T_\xi(g_2) - g_1, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_2) - g_2, \xi)| + |\hat{I}(T_\xi(g_1) - g_2, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_1, \xi)| &\le \\
|I(T_\xi(g_2) - g_1 + g_2, \xi) - I(T_\xi(g_2) - g_2 + g_2, \xi)| &+ \\
|I(T_\xi(g_1) - g_2 + g_1, \xi) - I(T_\xi(g_1) - g_1 + g_1, \xi)| & \\
\le L^+ \cdot \| - g_1 + g_2\|_{W_1^\infty(\Omega)} + L^+ \cdot \| - g_2 + g_1\|_{W_1^\infty(\Omega)} & \\
\le 2L^+ \cdot \|g_2 - g_1\|_{W_1^\infty(\Omega)} &
\end{aligned}$$

Weil aber auch

$$\begin{aligned}
&|\hat{I}(T_\xi(g_2) - g_1, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_1, \xi)| \le \\
&|\hat{I}(T_\xi(g_2) - g_1, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_1) - g_1, \xi)| + |\hat{I}(T_\xi(g_1) - g_2, \xi) - \hat{I}(T_\xi(g_2) - g_2, \xi)| \le \\
&2L \cdot \|g_2 - g_1\|_{W_1^\infty(\Omega)}
\end{aligned}$$

gilt, ist $T_\xi(g_2)$ für $\|g_2 - g_1\|_{W_1^\infty(\Omega)} \to 0$ eine Minimalfolge zu $\hat{I}(w - g_1, \xi)$. Weil das Minimum $T_\xi(g_1)$ im Potential-Well liegt, muss die Minimalfolge stark konvergieren, das heisst $\|T_\xi(g_2) - T_\xi(g_1)\|_{W_1^p(\Omega)} \to 0$. Das ist gerade die Stetigkeit des Lösungsoperators $T_\xi(g)$. ■

Folgerung 17
Sei I wie oben und sei $g \in C([0,T]; W_1^\infty(\Omega))$. Sei $u(t)$ die Lösung des Minimumproblems

$$\inf_{u \in g(t) + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} I(u, \xi)$$

Dann ist $u \in C([0,T]; W_1^p(\Omega))$.

■

15.4 Stabilität in den Randwerten und Inneren Variablen

Satz 31 (Stetigkeit in den Randwerten und Inneren Variablen)
Seien $E \subset \{A \in C(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R})) |\ \det A = 1\}$ und $G_0 \subset W_1^\infty(\Omega)$ mit $p \geq 3$ beschränkte Mengen. Sei $X = \{g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$ und I das folgende Variationsfunktional:

$$I(u, F_p^{-1}) := \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1})\, dx$$

mit einer strikt polykonvexen Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Ausserdem sei W eine Caratheodory-Funktion. Darüberhinaus gelte

$$W(F) \geq c^+ \cdot (\|F\|^p + \|\mathrm{Adj} F\|^q + |\det F|^r) \quad \textit{Koerzivität}$$

mit $\frac{p}{p-1} \leq q \leq \frac{p}{2}$ und $1 < r \leq \frac{p}{3}$. Sei

$$\tilde{I}(u, \xi, g) := I(u + g, \xi)$$

Es gebe eine Konstante L^+, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall g_1, g_2 \in G_0\ \forall\, \xi_1, \xi_2 \in E : \\
&|\tilde{I}(u, \xi_1, g_1) - \tilde{I}(u, \xi_2, g_2)| \leq L^+_{(G_0,E)} \cdot \left[\|\xi_2 - \xi_1\|_E + \|g_2 - g_1\|_{1,\infty,\Omega}\right]
\end{aligned}$$

Es gebe zu jedem $F_p^{-1} \in E$ und jedem Randwert $g \in G_0$ ein eindeutiges Minimum $u(F_p^{-1}, g) \in X$ zum Minimumproblem

$$\inf_{u \in g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} I(u, F_p^{-1})$$

Dann ist die Lösung $u(F_p^{-1}, g)$ stetig abhängig in der Norm von $W_1^p(\Omega)$ von den Daten $g \in W_1^\infty(\Omega)$ und $F_p^{-1} \in E$.

Beweis. Wir wiederholen das Vorgehen aus Lemma 80. Da nach Voraussetzung das globale Minimum existiert und eindeutig ist, können wir einen Lösungsoperator $T : E \times G_0 \mapsto X$ definieren. Weil das Minimum eindeutig ist, ist es natürlich auch strikt. Da W strikt polykonvex ist schliessen wir mit Satz 24 daß das Minimum in einem Potential-Well liegen muss. (Beachte: Mit der Wahl von p, q, r wie oben, können wir mit der natürlichen Topologie auf $W_1^p(\Omega)$ arbeiten.) Für $\xi_n \to \xi$ und $g_n \to g$ ist $T(\xi_n, g_n)$ mit derselben Überlegung wie in Lemma 80 eine Minimalfolge zu dem Problem

$$\inf_{u \in g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} I(u, \xi)$$

Weil das Minimum im Potential-Well liegt, muss die Minimalfolge also stark konvergieren. Das ist gerade die behauptete Stetigkeit des Lösungsoperators T. ∎

Folgerung 18
Sei I wie oben und sei $g \in C([0,T]; G_0)$ und $F_p^{-1} \in C([0,T], E)$. Sei $u(t)$ die Lösung des Minimumproblems

$$\inf_{u \in g(t) + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)} I(u, F_p^{-1}(t))$$

Dann ist $u \in C([0,T]; W_1^p(\Omega))$. ∎

Bemerkung 46
Funktionen $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ mit einer Singularität für $\det F \to 0$ erfüllen die Voraussetzungen dieses Satzes nicht, da zwar z.Bsp. auf der Menge $E = C(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3}) \cap \{\det F = 1\}$ gilt

$$|W(\nabla u \cdot F_{p1}) - W(\nabla u \cdot F_{p2})| \leq L^+(\nabla u) \cdot \|F_{p1} - F_{p2}\|_E$$

aber nicht

$$|W(F_1) - W(F_2)| \leq L^+ \cdot \|F_1 - F_2\|$$

So eine Bedingung braucht man aber typischerweise, um auch die Stetigkeit bzgl. den Randdaten zu garantieren.

Lemma 81
Seien $E \subset \{A \in C(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R}))|\ \det A = 1\}$ *und* $G_0 \subset W_1^{\infty}(\Omega)$ *beschränkte Mengen. Sei* $X = \{g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$ *mit* $p \geq 3$ *und* I *das folgende Variationsfunktional:*

$$I(u, F_p^{-1}) := \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1})\, dx$$

mit einer strikt polykonvexen Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. *Es sei*

$$\tilde{I}(u, \xi, g) := I(u + g, \xi)$$

Es gebe eine Konstante C^+, *so daß die* ***lokale Lipschitzbedingung***

$$|W(F_1) - W(F_2)| \leq C^+ \cdot \left(1 + \|F_1\|^{p-1} + \|F_2\|^{p-1}\right)\ \|F_1 - F_2\|$$

gilt. Außerdem gelte

$$\begin{array}{lll} \forall A \in \mathbb{M}^{3\times 3}: & |W(A)| \leq C^+\ (1 + \|A\|^p) & \textit{Wachstumsbedingung} \\ \exists c^+ > 0, \beta^+ > 0 & W(A) \geq c^+ \cdot \|A\|^p - \beta^+ & \textit{Koerzivität} \end{array}$$

Es sei o.B.d.A u *ein Minimum zu* $\tilde{I}(u, F_{p_1}^{-1}, g_1)$. *Dann folgt:*

$$\begin{array}{l} \forall g_1, g_2 \in G_0\ \forall\ F_{p_1}^{-1}, F_{p_2}^{-1} \in E: \\ |\tilde{I}(u, F_{p_1}^{-1}, g_1) - \tilde{I}(u, F_{p_2}^{-1}, g_2)| \leq C^+_{(G_0,E)} \cdot \left[\|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\|_E + \|g_2 - g_1\|_{1,\infty,\Omega}\right] \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |\tilde{I}(u, F_{p_1}^{-1}, g_1) - \tilde{I}(u, F_{p_2}^{-1}, g_2)| &= |\int_\Omega W((\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1}) - W((\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1})\, dx| \\ &\leq \int_\Omega |W((\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1}) - W((\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1})|\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_\Omega C^+ \cdot \left(1 + \|(\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1}\|^{p-1} + \|(\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1}\|^{p-1}\right) \\ &\quad \cdot \|(\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1} - (\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1}\|\, dx \\ &\leq \int_\Omega C^+ \cdot \left(1 + \|(\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1}\|^{p-1} + \|(\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1}\|^{p-1}\right) \\ &\quad \cdot \left(\|\nabla u\|\ \|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\| + \|\nabla g_1 F_{p_1}^{-1} - \nabla g_2 F_{p_2}^{-1}\|\right)\, dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_\Omega C^+ \cdot \left(1 + \|(\nabla u + \nabla g_1) \cdot F_{p_1}^{-1}\|^{p-1} + \|(\nabla u + \nabla g_2) \cdot F_{p_2}^{-1}\|^{p-1}\right)$$
$$\cdot \left(\|\nabla u\| \, \|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\| + \|F_{p_1}^{-1}\| \|\nabla g_1 - \nabla g_2\| + \|\nabla g_2\| \, \|F_{p_1}^{-1} - F_{p_2}^{-1}\|\right) \, dx$$
$$\leq \int_\Omega C^+ \left(1 + \|\nabla u\|^{p-1}(\|F_{p_1}^{-1}\|^{p-1} + \|F_{p_2}^{-1}\|^{p-1}) + \|\nabla g_1 F_{p_1}^{-1}\|^{p-1} + \|\nabla g_2 F_{p_2}^{-1}\|^{p-1}\right)$$
$$\left(\|\nabla u\| \, \|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\| + \|F_{p_1}^{-1}\| \|\nabla g_1 - \nabla g_2\| + \|\nabla g_2\| \, \|F_{p_1}^{-1} - F_{p_2}^{-1}\|\right) \, dx$$
$$\leq \int_\Omega C^+ \cdot \left(1 + \|\nabla u\|^{p-1}\right) \cdot$$
$$\left(\|\nabla u\| \, \|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\| + \|F_{p_1}^{-1}\| \|\nabla g_1 - \nabla g_2\|\right) \, dx$$
$$\leq \int_\Omega C^+ \cdot (1 + \|\nabla u\|^p) \cdot \left(\|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\| + \|\nabla g_1 - \nabla g_2\|\right) \, dx$$
$$\leq \int_\Omega C^+ \cdot (1 + \|\nabla u\|^p) \, dx \cdot \left[\|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\|_{C(\bar\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{1,\infty,\Omega}\right]$$

Weil aber wegen Korollar 28 gilt, daß

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C^+ \cdot (1 + \|F_p^{-1}\|^p_{C(\bar\Omega)} \cdot \|\nabla g\|^p_{p,\Omega})$$

folgt für $(F_p^{-1}, g) \in E \times G_0$

$$|\tilde I(u, F_{p_1}^{-1}, g_1) - \tilde I(u, F_{p_2}^{-1}, g_2)| \quad \leq C^+_{(E,G_0)} \cdot \left[\|F_{p_2}^{-1} - F_{p_1}^{-1}\|_{C(\bar\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{1,\infty,\Omega}\right]$$

■

Lemma 82 (Koerzivität und Abschätzung)
Sei W glatt, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene und beschränkte Menge , $p \geq 2$. Sei $g \in W_1^p(\Omega)$ und es gelte

$$\begin{array}{lll} \forall A \in \mathbb{M}^{3\times 3}: & |W(A)| \leq C^+ \, (1 + \|A\|^p) & \textit{Wachstumsbedingung} \\ \exists c^+ > 0, \beta^+ > 0 & W(A) \geq c^+ \cdot \|A\|^p - \beta^+ & \textit{Koerzivität} \end{array}$$

Sei $X = \{g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$ und $I : X \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u) \, dx$$

Wenn I ein Minimum besitzt, dann gilt für ein solches Minimum $u \in W_1^p(\Omega)$:

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C^+ \cdot (1 + \|\nabla g\|^p_{L^p(\Omega)})$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(x)\|^p &\leq \frac{1}{c^+}\cdot\{W(\nabla u)+\beta^+\}\\
\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^p\,dx &\leq \frac{1}{c^+}\cdot\{I(u)+\beta^+|\Omega|\}\\
&\leq C^+\cdot\{(1+I(u)\}\\
&\leq C^+\,\{1+I(g)\}\\
\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^p\,dx &\leq C^+\,\{1+\int_\Omega W(\nabla g)\,dx\}\\
\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq C^+\cdot\{1+\|\nabla g\|^p_{L^p(\Omega)}\}
\end{aligned}$$

■

Korollar 28
Seien $E \subset \{A \in C(\bar\Omega, Gl(3,\mathbb{R}))|\ \det A = 1\}$ *und* $G_0 \subset W_1^p(\Omega)$ *mit* $p \geq 3$ *beschränkte Mengen. Sei* $X = \{g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$ *und* I *das folgende Variationsfunktional:*

$$I(u, F_p^{-1}) := \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1})\,dx$$

mit einer strikt polykonvexen Funktion $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. *Ausserdem sei* W *eine Caratheodory-Funktion. Darüberhinaus gelte*

$$\begin{array}{lll}
\forall A \in \mathbb{M}^{3\times3}: & |W(A)| \leq C^+\,(1+\|A\|^p) & \textit{Wachstumsbedingung}\\
\exists c^+>0, \beta^+>0 & W(A) \geq c^+\cdot\|A\|^p-\beta^+ & \textit{Koerzivität}
\end{array}$$

Wenn I *ein Minimum besitzt, dann gilt für ein solches Minimum* $u \in W_1^p(\Omega)$*:*

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C^+\cdot(1+\|F_p^{-1}\|^p_{C(\bar\Omega)}\cdot\|\nabla g\|^p_{p,\Omega})$$

Also ist u *in* $W_1^p(\Omega)$ *beschränkt, wenn nur* $(F_p^{-1}, g) \in E \times G_0$ *beschränkt sind.*

Beweis. Klar ist, dass

$$\|\nabla u\cdot F_p^{-1}\|^p_{p,\Omega} \leq C^+\,\{1+\int_\Omega W(\nabla g\cdot F_p^{-1})\,dx\}$$

gilt. Daraus und mit Korollar 9 schliessen wir mit der Wachstumsbedingung, dass es eine Konstante $C^+ > 0$ gibt, so dass

$$\|\nabla u\|^p_{p,\Omega} \leq C^+\,\{1+\|F_p^{-1}\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla g\|^p_{p,\Omega}\}$$

gilt. ■

Kapitel 16

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

16.1 Stetigkeit

Sei $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

wir geben nachfolgend Bedingungen an den Integranden $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ an, so dass I insgesamt stetig, stetig differenzierbar u.s.w. wird.

Lemma 83 (Stetigkeit des Variationsfunktionals I)
Sei $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}, \quad W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

Wenn W stetig ist und

$$\forall\, F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \quad |W(F)| \leq C^+ \cdot (1 + \|F\|^p)$$

gilt, dann ist I stetig.

Beweis. Es sei $H(u) = W(\nabla u)$. Wenn $H : W_1^p(\Omega) \mapsto L^1(\Omega)$ stetig ist, dann ist $I(u) = \int_\Omega H(u)\, dx$ stetig. Mit dem Satz 23 erhalten wir die Stetigkeit von H. ■

16.2 Differenzierbarkeit

Lemma 84 (Differenzierbarkeit des Variationsfunktionals I)
Sei $p \geq 2$ und $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}, \quad W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\, dx$$

Wenn D^2W existiert, stetig ist und

$$\forall\, F, H_1, H_2 \in \mathbb{M}^{3\times 3}:$$
$$|D^2W(F).(H_1, H_2)| \leq C^+ \cdot (1 + \|F\|^{p-2}) \cdot \|H_1\|\,\|H_2\|$$

gilt,dann existiert die Frechet-Ableitung DI und ist in $C(W_1^p(\Omega), L(W_1^p(\Omega), \mathbb{R}))$.

Beweis. Wir setzen als formales Differential $DI(u).v = \int\limits_\Omega DW(\nabla u(x)).(\nabla v(x))\, dx$. Dann ist $DI(u).v$ für festes u linear in v und wir müssen nur noch zeigen, dass dieses $DI(u)$ in der Tat die Frechet-Ableitung von I ist. Dazu betrachten wir

$$|I(u+v) - I(u) - DI(u).v| =$$
$$|\int\limits_\Omega W(\nabla u(x) + \nabla v(x)) - W(\nabla u(x))\, dx - \int\limits_\Omega DW(\nabla u(x)).(\nabla v(x))\, dx|$$

wegen $W(\xi) - W(\mu) = \int\limits_0^1 DW(\mu + t(\xi - \mu)).(\xi - \mu)\, dt$ folgt

$$= |\int\limits_\Omega \int\limits_0^1 DW(\nabla u(x) + t(\nabla v(x))).(\nabla v(x))\, dt\, dx - \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 DW(\nabla u(x)).(\nabla v(x))\, dt\, dx|$$

$$= |\int\limits_\Omega \int\limits_0^1 [DW(\nabla u(x) + t(\nabla v(x))) - DW(\nabla u(x))].(\nabla v(x))\, dt\, dx|$$

$$= |\int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 D^2W(\nabla u(x) + st\nabla v(x)).(t\nabla v(x), \nabla v(x))\, ds\, dt\, dx|$$

mit der Wachstumsbedingung und $t \leq 1$ schließen wir

$$\leq \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |D^2W(\nabla u(x) + st\nabla v(x)).(\nabla v(x), \nabla v(x))|\, ds\, dt\, dx$$

$$\leq \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 C^+(1 + \|\nabla u(x) + st\nabla v(x)\|^{p-2})\|\nabla v(x)\|^2\, ds\, dt\, dx$$

mit Fubini und der Hölder-Ungleichung für $p > 2$ und

$\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \quad p_1 = \frac{p_2}{p_2 - 1}, \; p = 2p_2\right)$ ergibt sich

(Für den Fall $p = 2$ wird die Überlegung nur einfacher!)

$$\leq C^+ \|\nabla v\|_{2,\Omega}^2$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \left(\int_\Omega \|\nabla u(x)+st\nabla v(x)\|^{(p-2)p_1}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^{2p_2}\,dx\right)^{\frac{1}{p_2}} ds\,dt$$

$$p_1=\frac{p}{p-2},\quad p_2=\frac{p}{2}$$

$$= C^+\|\nabla v\|^2_{2,\Omega}+\int_0^1\int_0^1 \|\nabla u+st\nabla v\|^{p-2}_{p,\Omega}\|\nabla v\|^2_{p,\Omega}\,ds\,dt$$

$$\le C^+(1+\|\nabla v\|^{p-2}_{p,\Omega}+\|\nabla u\|^{p-2}_{p,\Omega})\cdot\|\nabla v\|^2_{p,\Omega}$$

$$\le C^+(1+\|v\|^{p-2}_{1,p,\Omega}+\|u\|^{p-2}_{1,p,\Omega})\cdot\|v\|^2_{1,p,\Omega}$$

also gilt

$$\lim_{\|v\|_{1,p,\Omega}\to 0}\frac{|I(u+v)-I(u)-DI(u).v|}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$

$$\le \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega}\to 0}\frac{C^+(1+\|v\|^{p-2}_{1,p,\Omega}+\|u\|^{p-2}_{1,p,\Omega})\cdot\|v\|^2_{1,p,\Omega}}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$

$$\le \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega}\to 0} C^+(1+\|v\|^{p-2}_{1,p,\Omega}+\|u\|^{p-2}_{1,p,\Omega})\cdot\|v\|_{1,p,\Omega}=0$$

Deshalb ist $DI(u).v$ die Frechet-Ableitung von I. Um die Stetigkeit zu zeigen, bemerken wir

$$|DI(v).h-DI(u).h| = |\int_\Omega DW(\nabla v(x)).(\nabla h(x)) - DW(\nabla u(x)).(\nabla h(x))\,dx|$$

$$= |\int_\Omega\int_0^1 D^2W(\nabla u(x)+t(\nabla v(x)-\nabla u(x))).(\nabla v(x)-\nabla u(x),\nabla h(x))\,dt\,dx|$$

wieder mit Fubini und der Wachstumsbedingung

$$\le \int_0^1 C^+\int_\Omega 1\cdot\|\nabla v(x)-\nabla u(x)\|\,\|\nabla h(x)\|\,dx\,dt\,+$$

$$\int_0^1 C^+\int_\Omega \|\nabla u(x)+t(\nabla v(x)-\nabla u(x))\|^{p-2}\,\|\nabla v(x)-\nabla u(x)\|\,\|\nabla h(x)\|\,dx\,dt$$

Hölderungleichung mit $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1$, $p_2=p_3=p$ und $p_1=\frac{p}{p-2}$

$$\le C^+\int_0^1 |\Omega|^{\frac{1}{p_1}}\,\|\nabla v-\nabla u\|_{p,\Omega}\,\|\nabla h\|_{p,\Omega}\,dt\,+$$

$$C^+ \int_0^1 \|\nabla u + t(\nabla v - \nabla u)\|_{p,\Omega}^{p-2} \|\nabla v - \nabla u\|_{p,\Omega} \|\nabla h\|_{p,\Omega} \, dt$$
$$\leq C^+(u,v) \|v - u\|_{1,p,\Omega} \|h\|_{1,p,\Omega}$$

für $\|v - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$ gilt also

$$\sup_{\|h\|_{1,p,\Omega} \leq 1} |DI(v).h - DI(u).h| \to 0$$

womit die Stetigkeit in der Operatornorm gezeigt ist. ∎

16.3 Höhere Differenzierbarkeit

Lemma 85 (Höhere Differenzierbarkeit des Variationsfunktionals I)
Sei $p \geq k+1$ und $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}, \quad W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u) \, dx$$

Wenn $D^{k+1}W$ existiert und stetig ist und es gilt

$$\begin{aligned} &\forall\, F, H_1, \ldots, H_{k+1} \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \\ &|D^{k+1}W(F).(H_1, \ldots, H_{k+1})| \leq C^+ \cdot (1 + \|F\|^{p-(k+1)}) \cdot \|H_1\| \cdot \ldots \cdot \|H_{k+1}\| \end{aligned}$$

dann existiert die k-te Frechet-Ableitung $D^k I$ und ist in $C(W_1^p(\Omega), L^k(W_1^p(\Omega), \mathbb{R}))$.

Beweis. Wir wiederholen das Vorgehen im Fall $k = 1$.
Wir nehmen an, dass $D^{k-1}I$ existiert und stetig ist. Seien $h_1, \ldots, h_{k-1} \in W_1^p(\Omega)$ gegeben. Wir setzen als formales Differential

$$D^k I(u).(v, h_1, \ldots, h_{k-1}) = \int_\Omega D^k W(\nabla u(x)).(\nabla v(x), \nabla h_1, \ldots, \nabla h_{k-1}) \, dx$$

Dann ist $D^k I(u).(v, h_1, \ldots, h_{k-1})$ für festes u k-linear und wir müssen nur noch zeigen, dass dieses $D^k I(u)$ in der Tat die k-te Frechet-Ableitung von I ist. Dazu betrachten wir

$$|D^{k-1}I(u+v).(h_1,\dots,h_{k-1}) - D^{k-1}I(u).(h_1,\dots,h_{k-1}) \\ - D^kI(u).(v,h_1,\dots,h_{k-1})| =$$

$$|\int_\Omega D^{k-1}W(\nabla u(x)+\nabla v(x)).(\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1}) - D^{k-1}W(\nabla u(x)).(\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,dx \\ - \int_\Omega D^kW(\nabla u(x)).(\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,dx|$$

wegen $D^{k-1}W(\xi).(h_1,\dots,h_{k-1}) - D^{k-1}W(\mu).(h_1,\dots,h_{k-1}) =$

$\int_0^1 D^kW(\mu+t(\xi-\mu)).(\xi-\mu,h_1,\dots,h_{k-1})\,dt$ folgt

$$= |\int_\Omega \int_0^1 D^kW(\nabla u(x)+t(\nabla v(x))).(\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,dt\,dx \\ - \int_\Omega \int_0^1 D^kW(\nabla u(x)).(\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,dt\,dx|$$

$$= |\int_\Omega \int_0^1 [D^kW(\nabla u(x)+t(\nabla v(x))) - DW(\nabla u(x))].(\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,dt\,dx|$$

$$= |\int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 D^{k+1}W(\nabla u(x)+st\nabla v(x)).(t\nabla v(x),\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})\,ds\,dt\,dx|$$

$$\leq \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 |D^{k+1}W(\nabla u(x)+st\nabla v(x)).(\nabla v(x),\nabla v(x),\nabla h_1,\dots,\nabla h_{k-1})|\,ds\,dt\,dx$$

mit der Wachstumsbedingung und $t \leq 1$ ergibt sich

$$\leq \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 C^+(1+\|\nabla u(x)+st\nabla v(x)\|^{p-(k+1)})\|\nabla v(x)\|^2\cdot\|\nabla h_1\|\cdots\|\nabla h_{k-1}\|\,ds\,dt\,dx$$

mit Fubini und der Hölder-Ungleichung

$(p > k+1, \quad \frac{1}{\frac{p}{p-(k+1)}} + \frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{k-1}{p} = 1)$ ergibt sich

(Für den Fall $p = k+1$ wird die Überlegung nur einfacher!)

$$\leq C^+\|\nabla v\|_{2,\Omega}^2\,\|\nabla h_1\|_{p,\Omega}\dots\|\nabla h_{k-1}\|_{p,\Omega} +$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \|\nabla u + st\nabla v\|_{p,\Omega}^{p-(k+1)} \|\nabla v\|_{p,\Omega}^2 \|\nabla h_1\|_{p,\Omega} \cdots \|\nabla h_{k-1}\|_{p,\Omega} \, ds \, dt$$
$$\leq C^+(1 + \|\nabla v\|_{p,\Omega}^{p-(k+1)} + \|\nabla u\|_{p,\Omega}^{p-(k+1)}) \cdot \|\nabla v\|_{p,\Omega}^2 \|\nabla h_1\|_{p,\Omega} \cdots \|\nabla h_{k-1}\|_{p,\Omega}$$
$$\leq C^+(1 + \|v\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)} + \|u\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)}) \cdot \|v\|_{1,p,\Omega}^2 \|h_1\|_{1,p,\Omega} \cdots \|h_{k-1}\|_{1,p,\Omega}$$

also gilt

$$\lim_{\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0} \frac{\|D^{k-1}I(u+v) - D^{k-1}I(u) - D^kI(u).v\|_{L^{k-1}(W_1^p(\Omega),\mathbb{R})}}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$
$$= \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0} \sup_{\substack{\|h_j\|_{1,p,\Omega} \leq 1 \\ j=1\ldots k-1}}$$
$$\frac{|D^{k-1}I(u+v).(h_1, \ldots, h_{k-1}) - D^{k-1}I(u).(h_1, \ldots, h_{k-1}) - D^kI(u).(v, h_1, \ldots, h_{k-1})|}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$
$$\leq \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0} \sup_{\substack{\|h_j\|_{1,p,\Omega} \leq 1, \\ j=1\ldots k-1}} \frac{C^+(1 + \|v\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)} + \|u\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)}) \cdot \|v\|_{1,p,\Omega}^2 \|h_1\|_{1,p,\Omega} \cdots \|h_{k-1}\|_{1,p,\Omega}}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$
$$\leq \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0} \frac{C^+(1 + \|v\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)} + \|u\|_{1,p,\Omega}^{p-(k+1)}) \cdot \|v\|_{1,p,\Omega}^2}{\|v\|_{1,p,\Omega}}$$
$$\leq \lim_{\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0} C^+(1 + \|v\|_{1,p,\Omega}^{p-2} + \|u\|_{1,p,\Omega}^{p-2}) \cdot \|v\|_{1,p,\Omega} = 0$$

Weil $(h_1, \ldots, h_{k-1})$ beliebig gewählt sind, ist $D^kI(u).v$ die Frechet-Ableitung von $D^{k-1}I$.
Wir ersparen uns den Beweis der Stetigkeit, der wieder mit den offensichtlichen Änderungen genauso wie im Fall $k = 1$ verläuft. ■

Lemma 86 (Vereinfachte Wachstumsbedingung für Polynome)
Sei $p \geq k+1$ und $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, $\quad W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u) \, dx$$

Wenn W ein Polynom ist und es gilt

$$\forall\, F, H \in \mathbb{M}^{3\times 3} :$$
$$|D^{k+1}W(F).(H, \ldots, H)| \leq C^+ \cdot (1 + \|F\|^{p-(k+1)}) \cdot \|H\|^{k+1}$$

dann existiert die k-te Frechet-Ableitung D^kI und ist in $C(W_1^p(\Omega), L^k(W_1^p(\Omega), \mathbb{R}))$.

Beweis. Das ist gerade eine Folgerung des vorherigen Lemmas und Lemma 41. ■

Kapitel 17

Direkte Methoden der Variationsrechnung

17.1 Koerzivität

Definition 28 ($L^p(\Omega)$-Koerzivität)
Es sei $p > 2$ und $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ ein Variationsfunktional der Form

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\; dx$$

*mit $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Wir sagen, I ist $L^p(\Omega)$-**koerziv**, falls für messbare Funktionen $x \mapsto \xi(x) \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ gilt*

$$\int_\Omega W(\xi)\; dx \leq C_1 \Longrightarrow \|\xi\|_{p,\Omega} \leq C_2$$

Definition 29 ($W_1^p(\Omega)$-Koerzivität)
*Es sei $p > 2$ und $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ ein Variationsfunktional. Wir sagen, I ist **koerziv**, falls gilt*

$$I(u) \leq C_1 \Longrightarrow \|u\|_{1,p,\Omega} \leq C_2$$

Lemma 87 (Invarianz der $L^p(\Omega)$-Koerzivität unter $\nabla u \mapsto \nabla u \cdot F_p^{-1}$)
Es sei $p > 2 \quad g \in W_1^p(\Omega)$ und $X = \{u \mid u \in g + W_1^p(\Omega)\}$,
Das Variationsfunktional $I : W_1^p(\Omega) \times C^1(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R})) \mapsto \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$I(u, F_p^{-1}) = \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1})\; dx$$

mit $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}, \quad \|F_p^{-1}\|_{C^1(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R}))} \leq K$ und es gebe eine Konstante $c > 0$ so dass $\det F_p(x) \geq c$. Dann gilt:
$\hat{I}(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\; dx$ ist $L^p(\Omega)$-koerziv $\Longrightarrow I(u, F_p^{-1})$ ist $L^p(\Omega)$-koerziv.

Beweis. Es gelte $I(u, F_p) \leq C_1$ und $\hat{I}$ sei $L^p(\Omega)$-koerziv. Also gilt n.Vor. $\int\limits_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1}) \leq C_1$. Weil $\hat{I}$ aber $L^p(\Omega)$-koerziv ist, folgt $\|\nabla u \cdot F_p^{-1}\|_{p,\Omega} \leq C_2$
Damit gilt doch

$$\int\limits_\Omega \|\nabla u \cdot F_p^{-1}\|^p \, dx \leq C_3$$

Wegen Korollar 9 gilt aber

$$\|\nabla u(x) \cdot F_p^{-1}(x)\|^2 \geq \lambda_{min}(F_p^{-T} F_p^{-1}(x)) \cdot \|\nabla u(x)\|^2$$

und daher

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \|\nabla u \cdot F_p^{-1}\|^p \, dx &\geq \int\limits_\Omega \lambda_{min}(F_p^{-T} F_p^{-1}(x))^{\frac{p}{2}} \cdot \|\nabla u(x)\|^p \, dx \\
&\geq \lambda_{min,\bar{\Omega}}(F_p^{-T} F_p^{-1})^{\frac{p}{2}} \int\limits_\Omega \|\nabla u(x)\|^p \, dx \\
&= \lambda_{min,\bar{\Omega}}(F_p^{-1} F_p^{-T})^{\frac{p}{2}} \int\limits_\Omega \|\nabla u(x)\|^p \, dx \\
&= \lambda_{min,\bar{\Omega}}(C_p^{-1})^{\frac{p}{2}} \int\limits_\Omega \|\nabla u(x)\|^p \, dx \\
&\geq C_4 \cdot \|\nabla u\|_{p,\Omega}^p
\end{aligned}$$

Also

$$\|\nabla u\|_{p,\Omega}^p \leq C_5 \cdot I(u, F_p) \leq C_6$$

■

Folgerung 19 ($W_1^p(\Omega)$-Koerzivität für spezielle Energien)
Es sei $p > 2$, $g \in W_1^p(\Omega)$ und $X = \{u \mid u \in g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$,
Das Variationsfunktional $I : W_1^p(\Omega) \times C^1(\bar{\Omega}, Gl(3, \mathbb{R})) \mapsto \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$I(u, F_p^{-1}) = \int\limits_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1}) \, dx$$

mit $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$. Dann gilt: Wenn I $L^p(\Omega)$-koerziv ist, dann ist I auch $W_1^p(\Omega)$-koerziv.

Beweis. Von der $L^p(\Omega)$-Koerzivität kommen wir in einem Schritt mit der Poincareschen Ungleichung und den Dirichlet-Daten zur $W_1^p(\Omega)$-Koerzivität. ■

Bemerkung 47
Wesentlich für dieses Resultat ist $F_p^{-1} \in C^1(\bar{\Omega}, Gl(3,\mathbb{R}))$, da ansonsten die Koerzivität von $I(u, F_p)$ nicht mehr garantiert werden kann.

Lemma 88 (Koerzive Energien)
Folgende Funktionen $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ führen z.Bsp. auf koerzive Variationsprobleme:

$$
\begin{aligned}
W(F) &:= \alpha\, \|F\|^6 + \beta\, \|\mathrm{Adj}F\|^2 + \gamma\, (\det F - \delta)^2 && p = 6\\
W(F) &:= \lambda\, \|F^TF - 1\!\!1\|^2 + \mu\, \langle F^TF - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 && p = 4\\
W(F) &:= \langle \frac{F^TF}{(\det F)^3}, 1\!\!1\rangle^p - \ln\det F + \det F && p = 3\\
W(F) &:= \alpha\, \|F\|^p - \ln\det F + \frac{1}{\det F} && p > 3\\
W(F) &:= \|F\|^p + \langle \ln F^TF, 1\!\!1\rangle^2 && p > 2\\
W(F) &:= \|F\|^p - \ln\det F + (\ln\det F)^2 && p > 3\\
W(F) &:= \|F^TF\|^2 && p = 4
\end{aligned}
$$

Wohingegen z.Bsp.

$$
\begin{aligned}
W_1(F) &:= \langle \ln F^TF, 1\!\!1\rangle^2\\
W_2(F) &:= \lambda\, \langle \ln F^TF, 1\!\!1\rangle^2 + \mu\, \|dev(\ln F^TF)\|^2\\
W_3(F) &:= \|\ln F^TF\|^2
\end{aligned}
$$

nicht koerziv sind.

Beweis. Im Fall W_1 betrachten wir z. Bsp. $u^n(x,y,z) = (x, ny, \frac{1}{n}z)$. Dann gilt $\det \nabla u_n = 1$ und $W_1(\nabla u_n) = 0$, aber schon punktweise gilt $\|\nabla u_n\| \to \infty$.
Den Fall W_3 betrachten wir eindimensional: Sei $\Omega = [0,1]$ und

$$
u_x^n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{1}{2}\\ n^4 & \frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n^3}\\ 1 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega W_3(\nabla u)\, dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^3}} (\ln n^8)^2\, dx\\
&= 64 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^3}} (\ln n)^2\, dx\\
&= \frac{64}{n^3}\, (\ln n)^2 < K
\end{aligned}
$$

aber $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^3}} |n^4|^p \, dx \to \infty$ für $p \geq 1$. Weil für $\lambda, \mu > 0$ aber
$\lambda \langle A, 1\!\!1 \rangle^2 + \mu \, \|devA\|^2 \geq c^+ \|A\|^2$ gilt, ist der Fall W_2 ebenso erledigt. ■

17.2 Existenzresultate der direkten Methoden der Variationsrechnung

Wir zitieren in diesem Abschnitt im wesentlichen die Existenzresultate der direkten Methoden der Variationsrechnung wie sie von Ball e.a. angegeben wurden. Wir sind hier nicht an scharfen Resultaten interessiert, sondern illustrieren die verwendeten Methoden dem besseren Verständnis halber in dem

Satz 32 (Existenz für das statische Problem mit Parameter F_p)
Es sei $p > 3 \quad g \in W_1^p(\Omega)$ *und* $X = \{u \mid u \in g + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$,
Das Variationsfunktional $I : W_1^p(\Omega) \times C^1(\bar{\Omega}, Gl(3, \mathbb{R})) \mapsto \mathbb{R}$ *sei gegeben durch*

$$I(u, F_p^{-1}) = \int_\Omega W(\nabla u \cdot F_p^{-1}) \, dx$$

mit $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ *polykonvex und* $\|F_p^{-1}\|_{C^1(\Omega, Gl(3,\mathbb{R}))} \leq K$.
Es sei

$$\hat{I}(u) := \int_\Omega W(\nabla u) \, dx$$

$W_1^p(\Omega)$*-koerziv, nach unten beschränkt und*

$$\exists \, \phi \in X : \quad I(\phi, F_p^{-1}) \, dx < \infty$$

Dann besitzt das Minimumproblem

$$\inf_{u \in X} I(u, F_p)$$

mindestens eine Lösung.

Beweis. Da $I(\phi, F_p^{-1}) \, dx < \infty$ ist $\inf_{u\in X} \; I(u, F_p^{-1}) < \infty$ und weil zusätzlich I nach unten beschränkt ist, gibt es eine Minimalfolge $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset X$ mit der Eigenschaft

$$\lim I(u_\nu, F_p^{-1}) \to \inf_{u\in X} I(u, F_p^{-1})$$

Aus der $W_1^p(\Omega)$-Koerzivität von $\hat{I}$ schließen wir mit Lemma 28 auf die $W_1^p(\Omega)$-Koerzivität von I selbst. Daher gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|u_\nu\|_{1,p,\Omega} \leq C$$

Weil $p > 1$ ist, ist $W_1^p(\Omega)$ ein reflexiver Banachraum und wir können aus der Minimalfolge u_ν eine schwach konvergente Teilfolge aussuchen, die wir wieder mit u_ν bezeichnen, so dass

$$u_\nu \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{in } W_1^p(\Omega)$$

Und da die Spur $W_1^p(\Omega) \mapsto W^p_{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ein linearer Operator ist, gilt

$$Spur(u_\nu) \rightharpoonup Spur(\hat{u})$$

womit wegen der Konstanz der Spur $\hat{u}_{\partial\Omega} = g_{\partial\Omega}$ gilt, also die Randbedingung erfüllt ist. Wie wir in Folgerung 10 gezeigt haben, ist $F \mapsto W(F \cdot F_p^{-1})$ strikt polykonvex wenn W selbst strikt polykonvex ist.
Für $p > 3$ sind $\mathrm{Adj}\nabla u_\nu$ und $\det \nabla u_\nu$ nach Satz 22 schwach folgenstetig. Also ist $I(u, F_p^{-1})$ zusammen mit Satz 25 schwach unterhalbstetig. Deshalb ist

$$I(\hat{u}, F_p^{-1}) \leq \liminf\, I(u_\nu, F_p^{-1})) = \inf_{u \in X}\, I(u, F_p^{-1})$$

Damit ist $\hat{u} \in X$ ein globales Minimum. ■

Bemerkung 48
Die Standardnebenbedingung $\det \nabla u(x) > 0$ *f.ü. kann in entsprechender Weise zusammen mit einer Funktion* W *erfüllt werden, für die gilt* $W(\xi) \to \infty$ *für* $\det(\xi) \to 0$. *Wir verweisen auf [Cia88, Bal77b].*

17.3 Eindeutigkeitsresultat für homogene Dirichlet-Daten

Lemma 89 (Eindeutigkeit für homogene Dirichlet-Daten)
Es sei $p > 3$ *und* $X = \{u \mid u \in x + \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)\}$,
Das Variationsfunktional $I : W_1^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ *sei gegeben durch*

$$I(u) = \int_\Omega W(\nabla u(x))\, dx$$

mit $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ *strikt polykonvex. Dann hat das Variationsproblem*

$$\inf_{u \in X}\, I(u)$$

die eindeutige Lösung $u(x) = x,\ \nabla u = 1\!\!1$.

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Vergleichsfunktion $\phi \in W_1^p(\Omega)$ $\phi(x)_{\partial\Omega} = x$. Also ist $\phi \in X$. Mit Lemma 69 gilt

$$\int_\Omega W(\nabla\phi(x))\,dx > \int_\Omega W(1\!\!1)\,dx + \langle C_1, \nabla(\phi(x) - x)\rangle + \langle C_2, \mathrm{Adj}\nabla(\phi(x) - x)\rangle + c_3 \cdot \det\nabla(\phi(x) - x)\,dx$$

Weil $(\phi(x) - x)_{\partial\Omega} = 0$ gilt, ist $(\phi(x) - x) \in \overset{\circ}{W}{}_1^p(\Omega)$. C_1, C_2, c_3 sind konstant. Daher sind die Terme

$$\int_\Omega \langle C_1, \nabla(\phi(x) - x)\rangle\,dx$$

$$\int_\Omega \langle C_2, \mathrm{Adj}\nabla(\phi(x) - x)\rangle\,dx$$

$$\int_\Omega c_3 \cdot \det\nabla(\phi(x) - x)\,dx$$

Null-Lagrangean, verschwinden also. Deshalb gilt für alle $\phi \in X$

$$\int_\Omega W(\nabla\phi(x))\,dx > \int_\Omega W(1\!\!1)\,dx$$

Also ist $u(x) = x$ eindeutiges globales Minimum zu homogenen Dirichlet-Daten. ■

Bemerkung 49
In dem einfacheren Fall $W \geq 0$, $W(1\!\!1) = 0$ (z.Bsp. St.Venant-Kirchhoff) sieht man indessen direkt, dass $u(x) = x$ globales eindeutiges Minimum zu seinen eigenen Randdaten ist. Wenn man nur weiß, dass W isotrop und materiell objektiv mit Referenzzustand $1\!\!1$ ist, dann sieht man an dem Darstellungssatz sofort, dass $1\!\!1$ zumindest ein strikt lokales Minimum zu homogenen Dirichlet-Daten ist.

Bemerkung 50
In [Zha91] wird sogar mehr bewiesen: Unter geeigneten Kleinheitsannahmen an die Randdaten stimmen die Lösungen der Euler-Lagrange Gleichungen mit den globalen Minima des Variationsproblems überein. Dies rechtfertigt noch einmal, sich bei der Suche nach Gleichgewichtslösungen zunächst die globalen Minima zu verschaffen.

Kapitel 18

Energien

Wir nennen $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ bzw. $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ Energie resp. parameterabhängige Energie.

Satz 33 (Darstellung für homogene, materiell isotrope Energien)
Sei $W \in C^2(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{R})$ materiell objektiv und materiell isotrop, die Referenzkonfiguration sei spannungsfrei, d.h. $DW(1\!\!1) = 0$ und das Material sei homogen, d.h. W hängt nur von F, aber nicht von $x \in \Omega$ ab. Dann gibt es Konstanten $\lambda, \mu > 0$, die sogenannten Lamé-Konstanten, so dass gilt

$$W(F) = \mu\|F^TF - 1\!\!1\|^2 + \lambda\langle F^TF - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 + o(\|F^TF - 1\!\!1\|^2)$$

Beweis. [Cia88], S.156. ■

18.1 Strikt polykonvexe Modell-Energie ohne Singularität für $\det F \to 0$

Wir betrachten hier eine polykonvexe Energie W der Form:

$$\begin{aligned} F \mapsto W(F) &:= \alpha\|F\|^6 + \beta\|\mathrm{Adj}F\|^2 + \gamma(\det F - \delta)^2 \\ &= \alpha\|F\|^6 + \beta\|\mathrm{Adj}F\|^2 + \gamma(\det F)^2 - 2\gamma\delta\det F + \delta^2 \end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Zusammen mit $D(\mathrm{Adj}F).H = \mathrm{Adj}F\langle F^{-T}, H\rangle - \mathrm{Adj}F \cdot HF^{-1}$ und $D(Adj\,1\!\!1).H = \langle 1\!\!1, H\rangle \cdot 1\!\!1 - H$ gilt dann für die 1.Ableitung

$$\begin{aligned} DW(F).H &= 6\alpha\|F\|^4\langle F,H\rangle + 2\beta\langle \mathrm{Adj}F, D(\mathrm{Adj}F).H\rangle + \\ &\quad 2\gamma\det F\langle H, \mathrm{Adj}F^T\rangle - 2\gamma\delta\langle H, \mathrm{Adj}F^T\rangle \\ DW(F = 1\!\!1).H &= 6\alpha\|1\!\!1\|^4\langle 1\!\!1, H\rangle + 2\beta\langle Adj\,1\!\!1, D(Adj\,1\!\!1).H\rangle + \\ &\quad 2\gamma\det 1\!\!1\langle H, Adj\,1\!\!1^T\rangle - 2\gamma\delta\langle H, Adj\,1\!\!1^T\rangle \\ DW(1\!\!1).H &= 6\cdot 81\alpha\langle 1\!\!1, H\rangle + 2\beta\langle 1\!\!1, D(Adj\,1\!\!1).H\rangle + 2\gamma\langle H, 1\!\!1\rangle - 2\gamma\delta\langle H, 1\!\!1\rangle \\ DW(1\!\!1).H &= \{6\cdot 81\alpha + 4\beta + 2\gamma - 2\gamma\delta\}\,\langle 1\!\!1, H\rangle \end{aligned}$$

und wir sehen, dass wir beispielsweise mit einer passenden Wahl von $\gamma, \delta > 0$ erreichen können, dass

$$\forall H \in \mathbb{M}^{3\times 3}: \quad DW(1\!\!1).H = 0$$

Für die 2.Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} D^2W(F).(H,H) = {} & 6 \cdot 4\alpha \|F\|^2 \langle F,H\rangle^2 + 6\alpha\|F\|^4 \cdot \|H\|^2 + \\ & \beta\{2\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2\} + \\ & 2\gamma\{2\det F\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle + \langle H, \mathrm{Adj}F^T\rangle^2\} + \\ & -4\gamma\delta\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle \end{aligned}$$

Ausserdem können wir auch direkt die 6.Ableitung angeben (höhere Ableitungen treten ja nicht auf!): Es ist

$$D^6W(F).(H,H,H,H,H,H) = 6!\alpha\|H\|^6 + 6!\gamma(\det H)^2$$

■

Lemma 90 ($H \mapsto D^2W(F).(H,H)$ ist strikt Legendre-Hadamard elliptisch) *Sei $\|F\| \geq c^+ > 0$. Sei $G : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ $\ G(H) := D^2W(F).(H,H)$. Dann ist G strikt Legendre-Hadamard elliptisch.*

Beweis. Direktes Nachrechnen. ■

Lemma 91 ($H \mapsto D^2W(F).(H,H)$ ist schwach unterhalbstetig) *Für festes F sei $G : \mathbb{M}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}$ $\ G(H) := D^2W(F).(H,H)$. Dann ist $\nabla\phi \mapsto \int_\Omega G(\nabla\phi(x))\, dx$ schwach unterhalbstetig.*

Beweis. Sei $\nabla\phi_n \rightharpoonup \nabla\phi$. Der negative Term ist schwach stetig (Adjunkte), die positiven Terme sind jeweils konvex in $\nabla\phi$ also schwach unterhalbstetig.
Oder: Für festes F ist $G(H)$ polykonvex in H. ■

18.2 Nichtlineare St. Venant-Kirchhoff Energie

Sei $E = \frac{1}{2}(F^TF - 1\!\!1)$ der materielle Verzerrungstensor. Eine Funktion W der Form

$$\begin{aligned} \hat{W}(E) &= 4\mu\|E\|^2 + 4\lambda\langle E, 1\!\!1\rangle^2 \\ W(F) := \hat{W}(E) &= \mu\|F^TF - 1\!\!1\|^2 + \lambda\langle F^TF - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle^2 \end{aligned}$$

nennt man Energie vom St.Venant-Kirchhoff Typ mit den (nichtlinearen) Lamé-Konstanten $\mu, \mu > 0$. Wir interessieren uns auch hier für die 1. und 2.Ableitung:

$$\begin{aligned} DW(F).H &= 2\mu \cdot \langle F^T F - 1\!\!1, F^T H + H^T F\rangle + \\ &\quad 2\lambda \cdot \langle F^T F - 1\!\!1, 1\!\!1\rangle\langle F^T H + H^T F, 1\!\!1\rangle \\ D^2W(F).(H,H) &= 2\mu\|F^T H + H^T F\|^2 + 4\mu\langle F^T F - 1\!\!1, H^T H\rangle + \\ &\quad 8\lambda\langle F, H\rangle^2 + 4\lambda(\|F\|^2 - 3)\|H\|^2 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $D^2W(F).(H,H)$ in diesem Fall nicht durchgehend positiv-semidefinit ist. Die St. Venant-Kirchhoff Energie ist deshalb **nicht konvex**. Wir zeigen jetzt, dass diese Energie nicht einmal elliptisch ist!
Wir wählen $F_0 = \frac{1}{m} \cdot 1\!\!1$ und betrachten

$$\begin{aligned} D^2W(F_0).(H,H) &= 2\mu\|\frac{1}{m}H + \frac{1}{m}H^T\|^2 + 4\mu\langle\frac{1}{m^2}1\!\!1 - 1\!\!1, H^T H\rangle + \\ &\quad 8\lambda\langle\frac{1}{m}1\!\!1, H\rangle^2 + 4\lambda(\|\frac{1}{m}1\!\!1\|^2 - 3)\|H\|^2 \\ &= \frac{1}{m^2}\big(2\mu\|H + H^T\|^2 + 4\mu(1-m^2)\langle 1\!\!1, H^T H\rangle + \\ &\quad 8\lambda\langle 1\!\!1, H\rangle^2 + 4\lambda 3(1-m^2)\|H\|^2\big) \\ &\quad \text{Wir setzen } H = \xi\otimes\eta \text{ und erhalten} \\ &= \frac{1}{m^2}\big(2\mu(2\|\xi\|^2\|\eta\|^2 + 2\langle\xi,\eta\rangle^2) + 4\mu(1-m^2)\|\xi\|^2\|\eta^2\| + \\ &\quad 8\lambda\langle\xi,\eta\rangle^2 + 4\lambda 3(1-m^2)\|\xi\|^2\|\eta\|^2\big) \\ &\quad \text{Wir können } \xi,\eta \text{ so wählen, dass } \langle\xi,\eta\rangle = 0 \text{ ist.} \\ &= \frac{1}{m^2}\big(2\mu(2\|\xi\|^2\|\eta\|^2 4\mu(1-m^2)\|\xi\|^2\|\eta^2\| + 12\lambda(1-m^2)\|\xi\|^2\|\eta\|^2\big) \\ &= \frac{1}{m^2}\|\xi\|^2\|\eta\|^2\big(4\mu + 4\mu(1-m^2) + 12\lambda(1-m^2)\big) \end{aligned}$$

Wenn wir nun m hinreichend groß wählen (d.h. das Material stark zusammendrücken), gilt

$$D^2W(F_0).(\xi\otimes\eta, \xi\otimes\eta) < 0$$

Also ist W **nicht elliptisch**. Somit kann W auch nicht polykonvex sein. Diese Energie ist deshalb für praktische Rechnungen im nichtlinearen Bereich denkbar ungeeignet.

18.3 Energien mit additivem Split

18.3.1 Energien vom Green-Naghdi Typ

Green-Naghdi postulieren in der Arbeit [GN65] einen Split der Gesamtverzerrung $E = F^T F - 1\!\!1$ in einen elastischen und plastischen Teil derart, dass

$$\begin{aligned} E &= E_e + E_p \\ E_e &= E - E_p \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist E_p eine nicht weiter bestimmte Größe, welche nur gewissen Invarianzforderungen unterworfen ist. Eine dazu assozierte Energie wird auf E_e definiert, also

$$W(F, E_p) := \hat{W}(E_e) = \hat{W}(F^T F - 1\!\!1 - E_p)$$

In der Plastizität fügt man dann eine Evolutionsgleichung für E_p hinzu. Jedoch zeigt man wie im Fall der St.Venant-Kirchhoff Energie, dass das entstehende Gleichgewichts-PDE-System i.A. nicht elliptisch ist.

18.3.2 Additiver Split spezifiziert

Sei $F_p \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{M}^{3\times 3})$ und

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - 1\!\!1), \quad E_e = \frac{1}{2}(F_e^T F_e - 1\!\!1), \quad E_p = \frac{1}{2}(F_p^T F_p - 1\!\!1)$$

Von der multiplikativen Zerlegung $F = F_e \cdot F_p$ des Deformationsgradienten ausgehend rechnet man sofort nach, dass gilt:

$$E - E_p = F_p^T \cdot E_e \cdot F_p \tag{18.1}$$

Hieran liest man einen additiven Split in der durch F_p gegebenen sogenannten **plastischen Zwischenkonfiguration** ab. Führt man in diesem Fall dementsprechend ein elastisches Maß $\hat{E}_e = E - E_p$ ein, was zum Bsp.in [Nag90] vorgeschlagen wird, definiert man konsequenterweise die Energie auf $\hat{E}_e$. Für $\hat{W}(\hat{E}_e) = \mu\|\hat{E}_e\|^2 + \lambda\langle\hat{E}_e, 1\!\!1\rangle^2$ ergibt sich bei $F_p = 1\!\!1$ gerade die St.Venant-Kirchhoff Energie. Genau wie in diesem Fall zeigt man wieder, dass sogar für beliebige Funktionen $\hat{W}$

$$W(F, F_p) = \hat{W}(\hat{E}_e) = \hat{W}(\frac{1}{2}(F^T F - F_p^T F_p))$$

i.A. nicht auf ein elliptisches Problem führt. Aus diesem Grund scheidet dieser additive Split der Verzerrung $E = \hat{E}_e + E_p$ für unsere Belange aus.

18.4 Linearisierte St.Venant-Kirchhoff Energie

Wenn wir $F = 1\!\!1 + \nabla u$ setzen, dann ist

$$\begin{aligned} F^T F - 1\!\!1 &= (1\!\!1 + \nabla u)^T (1\!\!1 + \nabla u) - 1\!\!1 \\ &= (1\!\!1 + \nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u) - 1\!\!1 \\ &= \nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u \end{aligned}$$

Im Falle kleiner Verschiebungsgradienten ($\nabla u \ll 1$) kann man den quadratischen Term vernachlässigen und die St.Venant-Kirchhoff Energie nimmt mit

$$A = \nabla u^T + \nabla u$$

die Form an:

$$\hat{W}(A) = \mu \|A\|^2 + \lambda \langle A, 1\!\!1 \rangle^2$$

Für die 1. und 2.Ableitung bzgl. A gilt dann:

$$\begin{aligned} D(\hat{W}(A)).H &= 2\mu \langle A, H \rangle + 2\lambda \cdot \langle A, 1\!\!1 \rangle \cdot \langle 1\!\!1, H \rangle \\ &= \langle 2\mu A + 2\lambda \langle A, 1\!\!1 \rangle \cdot 1\!\!1, H \rangle \\ D^2(\hat{W}(A)).(H, H) &= 2\mu \|H\|^2 + 2\lambda \langle 1\!\!1, H \rangle^2 \geq 2\mu \|H\|^2 \end{aligned}$$

Daran lesen wir die strikte Korn-Elliptizität bzgl. ∇u ab. Für den zugehörigen Spannungstensor $\sigma(\nabla u)$ gilt also

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\nabla u), H \rangle &= D(\hat{W}(\nabla u^T + \nabla u).H \\ &= \langle 2\mu(\nabla u^T + \nabla u) + 2\lambda \langle \nabla u^T + \nabla u, 1\!\!1 \rangle \cdot 1\!\!1, H \rangle \\ \Rightarrow \sigma(\nabla u) &= 2\mu \nabla u + 2\mu \nabla u^T + 4\lambda \cdot tr(\nabla u) \cdot 1\!\!1 \\ &= 2\mu \nabla u + 2\mu \nabla u^T + 4\lambda \cdot \operatorname{div} u \cdot 1\!\!1 \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{div}(\nabla u^T) = \nabla(\operatorname{div} u)$ und $\operatorname{div}((\operatorname{div} u) \cdot 1\!\!1) = \nabla(\operatorname{div} u)$ folgt

$$\operatorname{div} \ \sigma(\nabla u) = 2(\mu + 2\lambda) \nabla(\operatorname{div} u) + 2\mu \Delta u$$

Das ist gerade der Ausdruck für die Divergenz des Spannungstensors in den **Lamé-Gleichungen der linearisierten Elastizität**.

18.5 Ogden-Material

Sei $f \in C^1((0, \infty), \mathbb{R})$ eine konvexe Funktion. Energien der Form

$$\begin{aligned} W(F) &= \alpha \, tr(F^T F - 1\!\!1) + \beta \, tr(\mathrm{Adj} F^T F - 1\!\!1) + f(\det F) \\ &= \alpha \|F\|^2 + \beta \|\mathrm{Adj} F\|^2 + f(\det F) - 3\alpha - 3\beta \end{aligned}$$

sind einfachste Beispiele für sogenannte Ogden-Materialien [Ogd72a, Ogd72b]. (Diese spezielle Form nennt man auch **kompressible Mooney-Rivlin Energie**) In der angegebenen Form sind sie offensichtlich polykonvex. Mit einer geeigneten Wahl von $\alpha, \beta > 0$ und $f'(1)$ kann auch hier wieder

$$\forall H \in \mathbb{M}^{3\times 3}: \quad DW(1\!\!1).H = 0$$

erreicht werden. Oft wird $f(x) = -ln(x)$ oder $f(x) = \frac{1}{x^2}$ gesetzt, was zu einer physikalisch gewünschten Singularität für $\det F \to 0$ führt. Die 1.und 2.Ableitung ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} DW(F).H &= 2\alpha\langle F,H\rangle + 2\beta\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}F\langle F^{-T},H\rangle - (\mathrm{Adj}F)HF^{-1}\rangle + \\ &\quad f'(\det F)\det F\langle F^{-T},H\rangle \\ D^2W(F).(H,H) &= 2\alpha\|H\|^2 + 4\beta\langle \mathrm{Adj}F, \mathrm{Adj}H\rangle + \\ &\quad 2\beta\|D(\mathrm{Adj}F).H\|^2 + f''(\det F)(\det F\langle F^{-T},H\rangle)^2 + \\ &\quad f'(\det F)\det F\langle F^{-T},H\rangle^2 - f'(\det F)\det F\langle (F^{-1}H)^T, F^{-1}H\rangle \end{aligned}$$

Für inkompressible Materialien ($\det F = 1$) reduziert sich diese Energie auf

$$\begin{aligned} W(F) &= \alpha\,\|F\|^2 + \beta\,\|F^{-1}\|^2 \\ &= \alpha\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \beta\,(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}) \end{aligned}$$

mit $\lambda = \lambda(\sqrt{(}F^T F))$.
Die allgemeine Form der Ogden-Materialen sieht so aus:

$$W(F) = \sum_i^N \alpha_i \|F\|^{p_i} + \sum_j^M \beta_j \|\mathrm{Adj}F\|^{q_j} + f(\det F)$$

wobei die Konstanten $\alpha_i, \beta_j, p_i, q_j$ Experimenten angepasst werden können.

18.6 Kompressibles Neo-Hookean Material

Eine spezielle Klasse von Ogden-Type Materialien entsteht, wenn wir den Parameter $\beta = 0$ setzen und eine glatte konvexe Funktion

$$f(x) = -\eta_1 \cdot (\ln x) + \eta_2(\ln x)^2 + \eta_3 x^2 - \eta_4 x + \eta_5, \quad \eta_i > 0, i = 1\ldots 5$$

betrachten.
Solche Energien heissen vom **Neo-Hooke Type** weil der führende Term $\alpha\|F\|^2$ für sich betrachtet auf einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung führen würde.

18.7 Inkompressibles Neo-Hookean Material

Diese Energie sieht einfach so aus

$$W(F) = \|F\|^2$$

Damit wird das zugehörige Gleichgewichtsproblem aber keineswegs linear, denn die nichtlineare Nebenbedingung $\det F = 1$ zerstört diese Eigenschaft. Qualitativ analysiert man die entstehenden Probleme wohl besser anhand einer kompressiblen Energie eingeschränkt auf den inkompressiblen Bereich.

18.8 Polykonvexe Modell-Energie mit Singularität für $\det F \to 0$

Eine sehr einfache polykonvexe Energie mit einer Singularität für $\det F \to 0$ ergibt sich, wenn wir für $F : \det F > 0$

$$\begin{aligned} W(F) &= tr(F^T F - 1\!\!1) - \ln\det(F^T F) & (18.2)\\ &= \|F\|^2 - 2\ln\det F - 3 & (18.3) \end{aligned}$$

setzen. Diese Energie ist materiell objektiv und isotrop. Die 1.und 2.Ableitung ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} DW(F).H &= 2\langle F,H\rangle - 2\langle F^{-T},H\rangle \\ D^2W(F).(H,H) &= 2\|H\|^2 + 2\langle (F^{-1}H)^T, F^{-1}H\rangle \\ &= 2\|H\|^2 + 2\langle F^{-T},H\rangle^2 - \frac{4}{\det F}\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle \\ &\geq 2\|H\|^2 - \frac{4}{\det F}\langle \mathrm{Adj}H, F^T\rangle \end{aligned}$$

Hier ist $DW(1\!\!1).H = 2\langle 1\!\!1,H\rangle - 2\langle 1\!\!1^{-T},H\rangle \equiv 0$, also ist $F = 1\!\!1$ eine spannungsfreie Referenzkonfiguration.
Und wenn $\det F \geq c^+ > 0$ ist, dann ist $H \mapsto D^2W(F).(H,H)$ strikt polykonvex und strikt Legendre-Hadamard elliptisch, wie man durch direktes Nachrechnen zeigt.

18.9 Energien definiert auf dem Hencky-Tensor

18.9.1 Hencky-Tensor

Sei $C = F^T F$. Man nennt den Matrix-Logarithmus $\ln C$ auch den Hencky-Tensor. Im Ingenieurbereich trifft man etwa auf folgende isotrope und materiell objektive

Energie:

$$\begin{aligned} W(F) &= \langle \ln C, 1\!\!1 \rangle^p, \quad p \geq 2 \\ &= 2^p \, (\ln \det F)^p \quad \text{falls} \det F > 0 \end{aligned}$$

Für die 1.und 2. Ableitung gilt

$$\begin{aligned} DW(F).H &= p \; 2^p \; (\ln \det F)^{p-1} \; \langle F^{-T}, H \rangle \\ D^2W(F).(H,H) &= p \; (p-1) \; 2^p (\ln \det F)^{p-2} \; \langle F^{-T}, H \rangle^2 \\ &\quad - p \; 2^p \; (\ln \det F)^{p-1} \; \langle (HF^{-1})^T, HF^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Wir sehen daran, dass $1\!\!1$ eine spannungsfreie Referenzkonfiguration ist. Jedoch zeigen wir, dass diese Energie nicht auf ein elliptisches PDE-System in der Gleichgewichtsgleichung führt. Wir wählen $F_0 = m \cdot 1\!\!1$. Dann ist $\det F_0 = m^3$ und $F^{-1} = \frac{1}{m} \cdot 1\!\!1$. Es gilt

$$\begin{aligned} D^2W(F_0).(H,H) &= p \; (p-1) \; 2^p \; (\ln m^3)^{p-2} \; \frac{1}{m^2} \langle 1\!\!1, H \rangle^2 \\ &\quad - p \; 2^p \; (\ln m^3)^{p-1} \; \frac{1}{m^2} \langle H^T, H \rangle \\ &= \frac{p \; 2^p}{m^2} \left((p-1)(\ln m^3)^{p-2} \; \langle 1\!\!1, H \rangle^2 - (\ln m^3)^{p-1} \; \langle H^T, H \rangle \right) \\ &\text{Wir wählen } H = \eta \otimes \xi \\ D^2W(F_0).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) &= \frac{p \; 2^p}{m^2} (\ln m^3)^{p-2} [(p-1) - (\ln m^3)] \; \langle \xi, \eta \rangle^2 \end{aligned}$$

Also gibt es immer ein $m > 1$ mit $D^2W(F_0).(\eta \otimes \xi, \eta \otimes \xi) < 0$. Hier z.Bsp. $\frac{p-1}{3} < \ln m$. Damit ist diese Energie W **nicht elliptisch**. ■

18.9.2 Sansours Energie

Sei $C = F^T F$ und $\Psi : \mathbb{S}ym \mapsto \mathbb{R}$ eine isotrope und materiell objektive Funktion.Wir betrachten eine allgemeine Energie der Form

$$W(F) = \hat{W}(C) = \Psi(\ln C)$$

Mit Hilfe von Lemma 55 wird in [SK96] gezeigt, dass

$$D_C \hat{W}(C) = D\Psi(\ln C) \cdot C^{-1}$$

ist. In der genannten Arbeit wird Ψ quadratisch angesetzt:

$$\begin{aligned} \Psi(X) &:= \lambda \langle X, 1\!\!1 \rangle^2 + \mu \| dev(X) \|^2 \\ D\Psi(X).H &= 2\lambda \langle X, 1\!\!1 \rangle \langle 1\!\!1, H \rangle + 2\mu \langle dev(X), dev(H) \rangle \\ &= 2\lambda \langle X, 1\!\!1 \rangle \langle 1\!\!1, H \rangle + 2\mu \langle dev(X), H \rangle \end{aligned}$$

mit Konstanten $\lambda, \mu > 0$. Daraus ergibt sich konkret

$$\begin{aligned}
W(F) &= \hat{W}(C) = \lambda \langle \ln C, 1\!\!1 \rangle^2 + \mu \| dev(\ln C) \|^2 \\
D_F W(F).H &= \langle S_1, H \rangle = \langle F \cdot S_2, H \rangle \\
&= \langle F \cdot D_C \hat{W}(F^T F), H \rangle \\
&= \langle F \ D\Psi(\ln C) \ C^{-1}, H \rangle \\
&= \langle D\Psi(\ln C), F^T H C^{-1} \rangle \\
&= 2\lambda \langle \ln F^T F, 1\!\!1 \rangle \langle 1\!\!1, F^T H C^{-1} \rangle + 2\mu \langle dev(\ln F^T F), F^T H C^{-1} \rangle
\end{aligned}$$

und wir sehen, dass natürlich $1\!\!1$ eine spannungsfreie Referenzkonfiguration ist.

Wir zeigen nachfolgend, dass diese Energie nicht auf ein elliptisches PDE-System führt!
Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(t) &= W(1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi)) \\
&= \hat{W}((1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi))^T (1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi))) \\
&= \hat{W}(1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi + \xi \otimes \eta) + t^2 (\eta \otimes \xi)^T (\eta \otimes \xi))
\end{aligned}$$

Wenn wir $\eta \otimes \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ wählen, dann ist

$$(1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi))^T (1\!\!1 + t(\eta \otimes \xi)) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1+t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\kappa & t & 0 \\ t & 1+t^2-\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} = (1-\kappa) \cdot (\kappa^2 - \kappa(2+t^2) + 1)$$

und für die Eigenwerte ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}\left(2 + t^2 + t\sqrt{4+t^2}\right), \quad \kappa_3 = \frac{1}{2}\left(2 + t^2 - t\sqrt{4+t^2}\right) \\
&\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 1 \\
&0 = \ln \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = \ln \kappa_2 \kappa_3 = \ln \kappa_2 + \ln \kappa_3 \\
&\ln \kappa_2 = -\ln \kappa_3
\end{aligned}$$

Wenn wir $F^T F$ diagonalisieren, können wir aus der Isotropie der auftretenden Funktion folgende Darstellung von W in den Eigenwerten von $F^T F$ erhalten:

$$\begin{aligned}
\hat{W}(F^T F) &= \lambda \langle \ln C, 1\!\!1 \rangle^2 + \mu \| dev(\ln C) \|^2 \\
&= \lambda \ (\ln \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3)^2 + \mu \left((\ln \kappa_1)^2 + (\ln \kappa_2)^2 + (\ln \kappa_3)^2 - \frac{1}{3} (\ln \kappa_1 + \ln \kappa_2 + \ln \kappa_3)^2 \right)
\end{aligned}$$

Also gilt für die Funktion h:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lambda\,(\ln \kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2 + \mu\left((\ln\kappa_1)^2 + (\ln\kappa_2)^2 + (\ln\kappa_3)^2 - \frac{1}{3}(\ln\kappa_1 + \ln\kappa_2 + \ln\kappa_3)^2\right) \\ &= 2\mu(\ln\kappa_2)^2 \\ &= 2\mu[\ln\left(2 + t^2 + t\sqrt{4+t^2}\right) - \ln 2]^2 \end{aligned}$$

Diese Funktion $h(t)$ ist nicht konvex in t. Damit ist W nicht rank-one konvex, dann kann W auch nicht elliptisch sein. ■

Mit genau demselben Argument sehen wir, dass auch die materiell objektive und isotrope Funktion

$$W(F) = \frac{1}{2}\|\ln F^TF\|^2$$

nicht auf ein elliptisches System führt, denn in den Eigenwerten von F^TF gilt

$$W(F) = \frac{1}{2}\left((\ln\kappa_1)^2 + (\ln\kappa_2)^2 + (\ln\kappa_3)^2\right)$$

und daher ist wie oben

$$\begin{aligned} h(t) &= (\ln\kappa_2)^2 \\ &= [\ln\left(2 + t^2 + t\sqrt{4+t^2}\right) - \ln 2]^2 \end{aligned}$$

nicht konvex. ■

18.10 Simo/Ortiz Energie

Wir betrachten eine allgemeine Energie W der Form

$$W(F) = \frac{1}{q}\|F\|^q - \ln\det F + (\ln\det F)^p, \quad p, q \geq 2$$

Diese isotrope Energie wurde zur Modellierung von kompressiblen Materialien in [SO85] verwendet. Diese Energie ist aber **nicht polykonvex**. Wir sehen nämlich einerseits, dass dieses W nicht unter diejenigen Energien fällt, die direkt mit der Charakterisierung von polykonvexen Funktionen als polykonvex erkannt werden, denn die Funktion

$$h(y) = -\ln y + (\ln y)^p, \quad p \geq 2$$

ist **nicht konvex**. Wir geben nun ein direktes Argument an, wie es zuerst von [Rao86] in einem anderen Zusammenhang verwendet wurde. Dazu setzen wir mit $\alpha > 0$:

$$A_\alpha = \alpha \, 1\!\!1, \quad D_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|A_\alpha\| &= \alpha \sqrt{3}, & \det A_\alpha &= \alpha^3 \\
\|D_\alpha\| &= \alpha \sqrt{11}, & \det D_\alpha &= 3\,\alpha^3 \\
\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \\
\|\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha\| &= \alpha \sqrt{6}, & \det(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha) &= 2\,\alpha^3 \\
\det(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha) &= \frac{1}{2}\det A_\alpha + \frac{1}{2}\det D_\alpha & & \\
\mathrm{Adj}(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha) &= \frac{1}{2}\mathrm{Adj}A_\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{Adj}D_\alpha & &
\end{aligned}$$

Wenn wir nun annehmen, dass W polykonvex ist, dann gibt es eine konvexe Funktion $P : \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{M}^{3\times3} \times \mathbb{R}$, so dass $W(F) = P(F, \mathrm{Adj}F, \det F)$ ist und daher

$$\begin{aligned}
W(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha) &= P(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha, \mathrm{Adj}(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha), \det(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha)) \\
&= P(\frac{1}{2}A_\alpha + \frac{1}{2}D_\alpha, \frac{1}{2}\mathrm{Adj}A_\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{Adj}D_\alpha, \frac{1}{2}\det A_\alpha + \frac{1}{2}\det D_\alpha) \\
&\le \frac{1}{2}P(A_\alpha, \mathrm{Adj}A_\alpha, \det A_\alpha) + \frac{1}{2}P(D_\alpha, \mathrm{Adj}D_\alpha, \det D_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left(W(A_\alpha) + W(D_\alpha)\right)
\end{aligned}$$

Wir werten diese Bedingung für beliebiges $q > 2$ und $p = 2$ aus:

$$\begin{aligned}
W(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) &= \frac{1}{q}\,\alpha^p \sqrt{6}^q - \ln 2 - 3\ln\alpha + (\ln 2\alpha^3)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{q}\alpha^q \sqrt{3}^p - 3\ln\alpha + 9(\ln\alpha)^2 + \\
&\qquad \frac{1}{q}\alpha^q \sqrt{11}^q - \ln 3 - 3\ln\alpha + (\ln 3\alpha^3)^2\Bigg)
\end{aligned}$$

Nun gibt es aber immer ein $\alpha > 0$, so dass diese notwendige Bedingung verletzt ist, also kann W nicht polykonvex sein.(Tatsächlich ist W auch nicht elliptisch.)

18.11 Modifizierte Simo/Ortiz Energie

Wir können diese Energie jedoch sehr leicht polykonvexifizieren. Dazu addieren wir den Term $(\det F - 1)^2$ und betrachten

$$W(F) = \frac{1}{q}\|F\|^q - \ln\det F + (\ln\det F)^p + (\det F - 1)^2, \quad p, q \geq 2$$

Diese Energie ist für $q \geq 2, p = 2$ polykonvex, denn wie man leicht sieht ist die Funktion $P : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$$P(\xi, y) = \frac{1}{q}\|\xi\|^q - \ln y + (\ln y)^2 + (y-1)^2$$

konvex.

18.12 Energien mit volumetrisch-isochorem Split

Reale Materialien zeigen oft ein völlig unterschiedliches volumetrisches und isochores Verhalten. Man kann deshalb eine Energie additiv mit zwei Termen ansetzen, welche je für sich einen volumetrischen und isochoren Teil repräsentieren.

$$W(F) = W_1\Big(\frac{F^TF}{(\det F^TF)^{\frac{1}{3}}}\Big) + W_2(\det F)$$

Dabei ist ja

$$\det\left(\frac{F^TF}{(\det F^TF)^{\frac{1}{3}}}\right) = 1$$

Wie wir sehen werden, ist so eine Energie zum Bsp. für $W_1(A) = \langle A, 1\!\!1\rangle$ und W_2 konvex insgesamt polykonvex. Es ist

$$W_1(F^TF) = \frac{\|F\|^2}{\det F^{\frac{2}{3}}}$$

und insgesamt

$$W(F) = \frac{\|F\|^2}{\det F^{\frac{2}{3}}} + W_2(\det F)$$

Wir untersuchen die Konvexität der Funktion $P : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad P(x,y) = f(x)\cdot g(y)$. Für die Matrix der 2.Ableitungen notieren wir

$$D^2P(x,y) = \begin{pmatrix} f''(x)\cdot g(y) & f'(x)\cdot g'(y) \\ f'(x)\cdot g'(y) & f(x)\cdot g''(y) \end{pmatrix}$$

Wenn f, g positiv,glatt und konvex sind, folgt: $f''(x)\cdot g(y) \geq 0$ und $\det D^2P(x,y) = f''(x)\ g(y)f(x)\ g''(y) - (f'(x)g'(x))^2$. P ist konvex, wenn D^2P positiv definit ist und D^2P ist positiv definit, wenn $f''(x)\cdot g(y) \geq 0$ und $\det D^2P(x,y) \geq 0$ ist. Dazu muss also gelten $f''(x)\ g(y)f(x)\ g''(y) \geq (f'(x)g'(x))^2$.
Sei $\alpha > 0$ und $p \geq 2$. Wir wählen $f(x) = x^{-\alpha}$ und $g(y) = y^p$. Dann gilt $f''(x)\ g(y)f(x)\ g''(y) = \alpha(\alpha+1)x^{-(2+\alpha)}y^p x^{-\alpha}p(p-1)y^{p-2}$ und $(f'(x)g'(x))^2 = (-\alpha x^{-(\alpha+1)}py^{p-1})^2 = \alpha^2 x^{-2(\alpha+1)}p^2 y^{2(p-1)}$. Wir erhalten als Bedingung, dass $\frac{\alpha+1}{\alpha} \geq \frac{p}{p-1}$ sein muss. Je grösser man p wählt, desto günstiger für die Wahl von α. Insbesondere ist $P(x,y) = \frac{1}{x^\alpha}\cdot y^p$ konvex für $\alpha = \frac{2}{3}$ und $p = 2$. Wir setzen

$$\hat{W}(F,\xi) = P(\xi, \|F\|) = \frac{\|F\|^2}{\xi^{\frac{2}{3}}}$$

Weil dieses $\hat{W}$ monoton im ersten Argument ist, können wir schreiben

$$\begin{aligned}
&\hat{W}(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = \\
&= P(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \|\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2\|) \\
&\leq P(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \lambda\|F_1\| + (1-\lambda)\|F_2\|) \\
&\leq \lambda P(\xi_1, \|F_1\|) + (1-\lambda)P(\xi_2, \|F_2\|) \\
&= \lambda\hat{W}(F_1,\xi_1) + (1-\lambda)\hat{W}(F_2,\xi_2)
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{W}$ konvex und damit W polykonvex.

18.13 Strikt konvexes nichtlineares Modell-Problem

Wir definieren hier eine einfachste nichtlineare Modell-Energie, an Hand welcher wir später beispielhaft unser Vorgehen demonstrieren wollen: Sei F der Deformationsgradient und $F_p^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{M}^{3\times 3})$ ein Parameter.

$$W(F, F_p^{-1}) = \frac{1}{4}\|FF_p^{-1} - 1\!\!1\|^4 + \frac{1}{2}\|F - 1\!\!1\|^2 \tag{18.4}$$

Für die 1. und 2.Ableitung ergibt sich mit dieser Setzung:

$$\begin{aligned}
D_F W(F, F_p^{-1}).H &= \|FF_p^{-1} - 1\!\!1\|^2 \langle FF_p^{-1} - 1\!\!1, HF_p^{-1}\rangle + \langle F - 1\!\!1, H\rangle \\
D_F^2 W(F, F_p^{-1}).(H,H) &= 2\langle FF_p^{-1} - 1\!\!1, HF_p^{-1}\rangle^2 + \\
&\quad \|FF_p^{-1} - 1\!\!1\|^2 \cdot \|HF_p^{-1}\|^2 + \|H\|^2
\end{aligned}$$

Wir sehen hier sofort:

- W ist nicht materiell objektiv.
- W ist nicht isotrop.

- Für $F_p^{-1}(x) = \mathbb{1}$ ist $F(x) = \mathbb{1}$ absoluter Minimizer zu homogenen Dirichlet-Randdaten.
- W ist strikt konvex für jeden Wert des Parameters F_p^{-1}
- $D_F^2 W(F, F_p^{-1}).(H,H) \geq 1 \cdot \|H\|^2$ unabhängig von F_p^{-1}

Für spätere Zwecke betrachten wir auch die Abhängigkeit dieser Energie vom Parameter F_p^{-1}.

Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ 2 Parameterwerte für F_p^{-1}, dann gilt:

$$\begin{aligned}
W(F,A_1) - W(F,A_2) &= \frac{1}{4}\|FA_1 - \mathbb{1}\|^4 - \frac{1}{4}\|FA_2 - \mathbb{1}\|^4 \\
&= \frac{1}{4}\left[\|FA_1 - \mathbb{1}\| - \|FA_2 - \mathbb{1}\|\right] \cdot \\
&\quad [\|FA_1 - \mathbb{1}\|^3 + \|FA_1 - \mathbb{1}\|^2\|FA_2 - \mathbb{1}\| + \\
&\qquad \|FA_1 - \mathbb{1}\|\,\|FA_2 - \mathbb{1}\|^2 + \|FA_2 - \mathbb{1}\|^3] \\
&\quad \text{Lipschitz-Eigenschaft der Norm ausnutzen} \\
|W(F,A_1) - W(F,A_2)| &\leq \frac{1}{4}\|FA_1 - FA_2\|\ [\|FA_1 - \mathbb{1}\|^3 + \\
&\quad \|FA_1 - \mathbb{1}\|^2\|FA_2 - \mathbb{1}\| + \|FA_1 - \mathbb{1}\|^2\|FA_2 - \mathbb{1}\| + \\
&\qquad \|FA_1 - \mathbb{1}\|\,\|FA_2 - \mathbb{1}\|^2 + \|FA_2 - \mathbb{1}\|^3] \\
&\leq \frac{1}{4}\|F\|\,\|A_1 - A_2\| \cdot C(1 + \|F\|^3)(1 + \max(\|A_1\|, \|A_2\|)^3) \\
&\leq C(1 + \|F\|^4)(1 + \max(\|A_1\|, \|A_2\|)^3) \cdot \|A_1 - A_2\|
\end{aligned}$$

Also ist W **lokal Lipschitz** bezüglich F_p^{-1}. Genauso zeigt man, dass es eine Konstante $C^+ > 0$ gibt, so dass

$$|W(F_1, \mathbb{1}) - W(F_2, \mathbb{1})| \leq C^+ \cdot \left(1 + \|F_1\|^3 + \|F_2\|^3\right)\ \|F_1 - F_2\|$$

gilt.

Wenn hingegen der Parameterwert $F_p^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^3, Gl(3,\mathbb{R})$ ist, dann ist schon

$$\widehat{W}(F, F_p^{-1}) = \frac{1}{4}\|FF_p^{-1} - \mathbb{1}\|^4$$

alleine strikt konvex. Natürlich ist $\widehat{W}$ dann auch lokal lipschitzstetig im Parameter F_p^{-1} und auch die lokale Lipschitzstetigkeit bzgl. F bleibt erhalten.

Literaturverzeichnis

[Ada75] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, 1. ed., Pure and applied mathematics, vol. 65, Academic Press, London, 1975.

[AF84] E. Acerbi and N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1984), 125–145.

[Alb94] H.D. Alber, *Mathematische Theorie des inelastischen Materialverhaltens von Metallen.*, Preprint 1682, Technische Universität Darmstadt, 1994.

[Alb95] H.D. Alber, *Global existence and boundedness of large solutions to nonlinear equations of viscoelasticity with hardening.*, Comm. Math. Phys. **166** (1995), 565–601.

[Alb98] H.D. Alber, *Materials with memory. Initial-boundary value problems for constitutive equations with internal variables.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1682, Springer, Berlin, 1998.

[Alb99] H.D. Alber, *Evolving microstructure and homogenization*, Preprint, Technische Universität Darmstadt, 1999.

[AMR83] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu, *Manifolds,tensor analysis and applications*, Addison-Wesley, London, 1983.

[AZ90] J. Appell and P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators.*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Bal77a] J.M. Ball, *Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics*, (London) (R.J. Knops, ed.), Herriot Watt Symposion: Nonlinear analysis and mechanics., vol. 1, Pitman, London, 1977, pp. 187–238.

[Bal77b] J.M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.*, Arch. Rat. Mech. Anal. **63** (1977), 337–403.

[BCO81] J.M. Ball, J.C. Currie, and P.J. Olver, *Null Lagrangians, weak continuity and variational problems of arbitrary order.*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 135–174.

[BdG94] J.F. Besseling and E.van der Giessen, *Mathematical modelling of inelastic deformation*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 5, Chapman Hall, London, 1994.

[BKM77] J.M. Ball, R.J. Knops, and J.E. Marsden, *Journees d'analyse nonlineaire*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 665, Spinger, Berlin, 1977.

[BM84a] J.M. Ball and J.E. Marsden, *Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1984), 251–277.

[BM84b] J.M. Ball and V.J. Mizel, *One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **90** (1984), 325–388.

[BM84c] J.M. Ball and F. Murat, *$W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **58** (1984), 225–253.

[BT97] E. Benaouda and J. Telega, *On the existence of minimizers for St.-Venant Kirchhoff bodies:placement boundary condition*, Bull. Pol. Acad. Sc. Tech. Sc. **45** (1997), no. 2, 211–223.

[CE86] M. Chipot and L.C. Evans, *Linearisation at infinity and lipschitz estimates for certain problems in the calculus of variations*, Proc. R. Soc. Edinb. **102A** (1986), 291–303.

[Che95] K. Chelminski, *Global in time existence of solutions to the constitutive model of Bodner-Partom with isotropic hardening*, Dem. Math. **28** (1995), 667–688.

[Che96] K. Chelminski, *Energy estimates and global in time results for a problem from non-linear viscoelasticity*, Bull. Pol. Acad. Sc.:Math. **44** (1996), 465–477.

[Che97] K. Chelminski, *Coercive limits for a subclass of monotone constitutive equations in the theory of inelastic material behaviour of metals*, Roczniki PTM: App. Math. **40** (1997), 41–81.

[Che98] K. Chelminski, *On self-controlling models in the theory of inelastic material behaviour of metals*, Continuum Mech. Thermodyn. **10** (1998), 121–133.

[Che99] K. Chelminski, *On monotone plastic constitutive equations with polynomial growth condition*, Math. Meth. App. Sc. **22** (1999), 547–562.

[Cia88] Philippe G. Ciarlet, *Three-dimensional elasticity*, first ed., Studies in mathematics and its applications, vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1988.

[CN80] J. Casey and P.M. Naghdi, *A remark on the use of the decomposition $F = F_e \cdot F_p$ in plasticity*, J. Appl. Mech. **47** (1980), 672–675.

[CS82] N. Cristescu and I. Sulliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1982.

[CW84] H. Cohen and C. Wang, *A note on Hyperelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. **85** (1984), 213–236.

[Dac89] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, 1. ed., Applied mathematical sciences, vol. 78, Springer, Berlin, 1989.

[Dru51] D.C. Drucker, *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*, Proc. First U.S Nat. Cong. Appl. Mech. (1951), 487–491.

[Eri78] A.C. Eringen, *Nonlocal continuum mechanics and some applications*, Nonlinear equations in physics and mathematics (Dordrecht) (A.O. Barut, ed.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1978, pp. 271–318.

[Eva86] L.C. Evans, *Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **95** (1986), 227–252.

[Fri97] P. Fritzen, *Numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie*, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 1997.

[Gia93] M. Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, 1. ed., Lectures in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 1993.

[GM68] E. Giusti and M. Miranda, *Sulla regolarita delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellitici quasi-lineari*, Arch. Rat. Mech. Anal. **31** (1968), 173–184.

[GMS98] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Soucek, *Cartesian currents in the calculus of variations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 38, Spinger, Berlin, 1998.

[GN65] A.E. Green and P.M. Naghdi, *A general theory of an elastic-plastic continuum.*, Arch. Rat. Mech. Anal. **18** (1965), 251–281.

[Gur81] M.E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, erste ed., Mathematics in Science and Engineering, vol. 158, Academic Press, London, 1981.

[Han85] A. Hanyga, *Mathematical theory of non-linear elasticity*, Ellis Horwood, Chichester, 1985.

[Hau85] P. Haupt, *On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behaviour*, Int. J. Plasticity **1** (1985), 303–316.

[HC84] A. Hoger and D. Carlson, *Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient*, Quart. Appl. Math. **42** (1984), 113–117.

[HJ85] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[HJ91] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.

[HN91] J. Hilgert and K.H. Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, Braunschweig, 1991.

[HR99] W. Han and B.D. Reddy, *Plasticity. Mathematical theory and numerical analysis*, Springer, Berlin, 1999.

[HRS97] W. Han, B.D. Reddy, and G. Schroeder, *Qualitative and numerical analysis of quasi-static problems in elastoplasticity*, SIAM J.Num.Anal. **34** (1997), 143–177.

[IS93] I.R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and numerical methods in viscoplasticity*, 1. ed., Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[Koi65] W.T. Koiter, *The energy criterion of stability for continuous elastic bodies I,II*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap **B 68** (1965), 178–202.

[Koi76] W.T. Koiter, *A basic open problem in the theory of elastic stability*, Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics (Berlin), Lecture Notes in Mathematics, vol. 503, Springer, Berlin, 1976, pp. 366–373.

[Koi80] W.T. Koiter, *Elastic stability, buckling and post-buckling behaviour*, Proceedings of the IUTAM Symposion on Finite Elasticity (Den Haag) (D.E. Carlson and R.T. Shields, eds.), Martinus Nijhoff, Den Haag, 1980, pp. 13–24.

[Kon55] K. Kondo, *Geometry of elastic deformation and incompatibility*, Memoirs of the unifying study of the basic open problems in engineering sciences by means of geometry **1, Division C** (1955), 5–17.

[Kos95] A. Koshelev, *Regularity problem for quasilinear elliptic and parabolic systems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1614, Springer, Berlin, 1995.

[Krö63] E. Kröner, *Dislocation: a new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. Phys. **42** (1963), 27–37.

[Krö92] E. Kröner, *Mikrostrukturmechanik*, Mitt. Ges. Angew. Math. Mech. (1992), 104–119.

[LC85] J. Lemaitre and J.L. Chaboche, *Mecanique des materiaux solides*, Dunod, Paris, 1985.

[Lee69] E.H. Lee, *Elastic-plastic deformation at finite strain*, J. Appl. Mech. **36** (1969), 1–6.

[LHH97] G. Lührs, S. Hartmann, and P. Haupt, *On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. **144** (1997), 1–21.

[Li96] Z. Li, *Existence of minimizers and microstructure in nonlinear elasticity*, Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. **27** (1996), 297–308.

[MH83] J.E. Marsden and J.R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

[Mie92] C. Miehe, *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation*, Habilitationsschrift, Universität Hannover, 1992.

[Mie95] C. Miehe, *A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors*, Archive Appl. Mech. **66** (1995), 45–64.

[Nag90] P.M. Naghdi, *A critical review of the state of finite plasticity*, J.Appl. Math. Phys.(ZAMP) **41** (1990), 315–394.

[Nef00] P. Neff, *On Korn's first inequality with nonconstant coefficients, Preprint Nr.2080 TU Darmstadt*, submitted to Proc. Roy. Soc. Edinb. (2000).

[Ogd72a] R.W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids.*, Proc. R. Soc. London **A 326** (1972), 565–584.

[Ogd72b] R.W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids.*, Proc. R. Soc. London **A 328** (1972), 567–583.

[Ogd83] R.W. Ogden, *Non-linear elastic deformations*, 1. ed., Mathematics and its Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1983.

[OR93] M. Ortiz and E.A. Repetto, *Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals*, 1993.

[Rao86] A. Raoult, *Non-polyconvexity of the stored energy function of a St. Venant-Kirchhoff material*, Aplikace Matematiky **6** (1986), 417–419.

[Ree94] S. Reese, *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper*, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mechanik, 1994.

[Ree97] S. Reese, *Elastoplastic material behaviour with large elastic and large plastic deformations.*, Z. angew. Math. Mech **77** (1997), S277–S278.

[Roc70] T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[RW97] S. Reese and P. Wriggers, *A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformation: computational aspects and a comparison with experimental results.*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. **148** (1997), 279–298.

[SH98] J.C. Simo and J.R. Hughes, *Computational inelasticity*, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 7, Springer, Berlin, 1998.

[Sim88a] J.C. Simo, *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: continuum formulation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **66** (1988), no. 2, 199–219.

[Sim88b] J.C. Simo, *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: computational aspects*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **68** (1988), no. 1, 1–31.

[Sim98] J.C. Simo, *Numerical analysis and simulation of plasticity*, Handbook of numerical analysis (Amsterdam) (P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds.), vol. VI, Elsevier, Amsterdam, 1998.

[SK96] C. Sansour and F.G. Kollmann, *On theory and numerics of large viscoplastic deformation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. **146** (1996), 351–369.

[SO85] J.C. Simo and M. Ortiz, *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations.*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. **49** (1985), 221–245.

[Suq80] P.M. Suquet, *Evolution problems for a class of dissipative materials*, Quart. Appl. Math. **38** (1980), 391–414.

[Suq81] P.M. Suquet, *Sur les equations de la plasticite: existence et regularite des solutions*, J. de Mecanique **20,No. 1** (1981), 3–39.

[Suq84] P.M. Suquet, *Evolution quasi-statique des milieux visco-plastique de maxwell-norton*, Math. Meth. Appl. Sci. **6** (1984), 192–205.

[Sve98] B. Svendson, *Hyperelastic models for elastoplasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening at large deformation*, Int. J. Solids Structures **35** (1998), no. 25, 3363–3389.

[Tal94] P. Le Tallec, *Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity*, Handbook of numerical analysis (Amsterdam) (P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds.), vol. III, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 465–622.

[TH97] C. Tsakmatis and O. Häusler, *Thermodynamically consistent formulation of finite deformation anisotropic plasticity laws*, Große plastische Formänderungen, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, vol. 114, Ruhr Universität Bochum, 1997, pp. 11–14.

[Val88] T. Valent, *Boundary value problems of finite elasticity*, Springer, Berlin, 1988.

[Wal90] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 4. ed., Springer Lehrbuch, Springer, Berlin, 1990.

[Zei88] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, vol. IV, Springer, Berlin, 1988.

[Zei95a] E. Zeidler, *Applied functional analysis. Applications to mathematical physics*, Applied mathematical sciences, vol. 108, Springer, Berlin, 1995.

[Zei95b] E. Zeidler, *Applied functional analysis. Main principles and their applications*, Applied mathematical sciences, vol. 109, Springer, Berlin, 1995.

[Zha91] K. Zhang, *Energy minimizers in nonlinear elastostatics and the implicit function theorem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **114** (1991), 95–117.

Patrizio Neff
Ziegelwaldweg 22
64823 Gross-Umstadt

Geboren am 17.September 1968 in Mosbach/Baden
Deutscher, verheiratet

Bildungsweg

Grundschule	1975-1979	Pestalozzischule, Gross-Umstadt
Förderstufe	1979-1981	Geiersbergschule, Gross-Umstadt
Realschule	1981-1985	Ernst-Reuter-Schule, Gross-Umstadt **Mittlere Reife**
Gymnasiale Oberstufe	1985-1988	Alfred-Delp-Schule, Dieburg **Allgemeine Hochschulreife**
Wehrdienst	1988-1989	Panzergrenadierbataillon 53, Fritzlar
Studium der Mathematik u. Philosophie	1989-1995	Technische Universität Darmstadt
Grundstudium Geschichte(Lehramt)	1989-1992	Technische Universität Darmstadt
Zwischenprüfung u.Vordiplom	1992	
Auslandsaufenthalt	1992-1993	University of Sussex, Brighton(GB) (Erasmus-Stipendium)
Diplom Mathematik	Nov. 1995	„mit Auszeichnung bestanden“
Promotionsstipendium des Hessischen Staates	1996-1997	
Mitarbeiter am SFB 298	1997-1998	
Wiss. Angestellter am FB Mathematik	seit 1998	